مقدمه مؤلف

متعاقب انتشار کتاب «مقاومت مصالح» و تعدد چاپ آن در قالب ویرایش‌های متعدد، موجی از پیام‌ها و تماس‌های محبت‌آمیز از سوی برخی از همکاران ،دانشجویان و داوطلبان شرکت در آزمون‌های رشته‌های مهندسی از سراسر کشور دریافت گردید که جملگی به پاس انتشار این کتاب، نویسنده و دیگر دست‌اندکاران چاپ و انتشار آن را رهین محبت‌های بی‌دریغ خویش قرار داده و در خلال آن مصرانه اظهار می‌داشتند که موجبات چاپ و انتشار کتابی با عنوان «استاتیک» برای داوطلبان شرکت در آزمون‌های کارشناسی ارشد در همه رشته‌های مهندسی فراهم شود. این امر موجب شد تا مقدمات تالیف کتابی با این مضمون در اولویت کارهای علمی روزانه قرار گیرد. با شناختی که از جامعه مخاطب وجود داشت تمهیداتی برای انجام این مهم می‌بایست پیش‌بینی می‌گردید که از مهم‌ترین آن تاکید در انتشار کتابی با این مفهوم و با توان پاسخگویی به عنوان یک کتاب درسی برای همه دانشجویان رشته‌های مهندسی و مهم‌تر از آن در مقام یک کتاب راهنما و کمکی جهت پاسخگویی به نیاز داوطلبان شرکت در آزمون‌های کارشناسی ارشد رشته‌های مرتبط با موضوع بود. انجام این کار بعد از یک سال به نتیجه دلخواه رسید و حاصل آن کتابی است که پیش رو دارید.

این کتاب مشتمل بر ده فصل می‌باشد. در طراحی محتویات هر فصل ابتدا شرح کاملی از موضوع مورد بحث همراه با تعدادی از انواع مثال‌های مرتبط با آن تهیه و ارائه شده است سپس پاسخ هریک از مثال‌ها نیز به دنبال آن در همان فصل درج گردید. ذکر این مثال‌ها با هدف افزایش توان علمی فرد و اشراف و احاطه وی به موضوع طراحی شده است.

در همین راستا آن‌چه که می تواند داوطلبان را برای شرکت در آزمون‌های مورد نظر آماده‌تر نماید پاسخ به تست‌های تکمیلی است که بلافاصله بعد از مثال‌ها ارائه شده است. در ادامه و در انتهای هر فصل سئوال‌های طبقه‌بندی‌شده آزمون‌های سراسری رشته مهندسی مکانیک از سال ۱۳۶۷ به بعد قرار گرفته است که هدف از انجام این کار تقویت بنیه علمی و شناخت هر چه بیشتر دانشجویان با نوع سئوالاتی است که تا کنون طرح شده است. انتظار می‌رود علاقمندان با مطالعه هر فصل و با انجام تکالیف آن بتوانند خود را برای آزمون‌های رشته مهندسی آماده نمایند و در اقل زمان به سئوال‌های داده شده پاسخ دهند. ذکراین نکته را لازم می‌داند که در فرآیند انجام این مهم سعی بر آن بوده تا محتویات این مجموعه از هرگونه کم و کاستی مصون باشد، لیکن باید انتظار داشت که خوانندگان عزیز احتمالا با مواردی مواجه گردند که حاصل اشتباه تایپی و یا محاسباتی است و یا اینکه به مواردی اشاره نمایند که به هر دلیل از نگاه مولف پوشیده مانده است. در چنین شرایطی انتظار این است که عزیزان کمبودها را به لطف بزرگی‌شان اغماض نمایند و پیشنهادات سازنده خویش را از طریق ایمیل آدرس نویسنده ارسال فرمایند. انجام آن منتی است که از سوی تک تک عزیزان بر آن ارج می‌نهم و پیشاپیش سپاس خویش را تقدیم حضورشان می‌نمایم.

وظیفه خود می‌دانم از تمامی عزیزانی که با تلاش صادقانه خویش موجباتی را فراهم کردند تا این مجموعه آماده و ارائه گردد تشکر و قدردانی نمایم.

در همین ارتباط آن‌چه که بیش از همه مرا در انجام این مهم یاری کرد صبر و متانت همیشگی یاری دیرینه بود که افتخار همسری وی را دارم. همسری مهربان که محبت‌های وی در طول زندگی و به طور خاص زندگی علمی من همواره غروب تمام خستگی‌ها بوده و یقینا خواهد بود.

در نهایت این اثر را که پاسخی هر چند ناچیز به زحمات همه آنانی است که حقی بر گردن اینجانب دارند، به خصوص ارواح پاک و منزه پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌دارم. امید است که مورد قبول حضرت دوست قرار گیرد.

محمد حسن نائی
تابستان ۱۴۰۰
mhnaei@ut.ac.ir

فهرست مطالب

فصل اول، مفاهیم اولیه نیرو ---- ۱
مثال‌های حل شده ---- ۶
سؤال‌های تکمیلی ---- ۱۰
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۱۲
پاسخ سؤال‌ها ---- ۱۳

فصل دوم، تعادل نقطه مادی ---- ۱۹
مثال‌های حل شده ---- ۲۳
سؤال‌های تکمیلی ---- ۳۴
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۳۹
پاسخ سؤال‌ها ---- ۴۵

فصل سوم، تعادل اجسام صلب ---- ۶۱
مثال‌های حل شده ---- ۷۰
سؤال‌های تکمیلی ---- ۸۳
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۸۹
پاسخ سؤال‌ها ---- ۱۰۰

فصل چهارم، خرپا ---- ۱۲۳
مثال‌های حل شده ---- ۱۲۹
سؤال‌های تکمیلی ---- ۱۳۸
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۱۴۹
پاسخ سؤال‌ها ---- ۱۵۵

فصل پنجم، قاب‌ها و ماشین‌ها ---- ۱۷۷
مثال‌های حل شده ---- ۱۸۴
سؤال‌های تکمیلی ---- ۱۹۳
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۲۰۰
پاسخ سؤال‌ها ---- ۲۰۳

فصل ششم، مرکز سطح ---- ۲۲۳
مثال‌های حل شده ---- ۲۳۵
سؤال‌های تکمیلی ---- ۲۴۲
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۲۴۷
پاسخ سؤال‌ها ---- ۲۵۰

فصل هفتم، نیروهای داخلی –نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی – کابل‌ها ---- ۲۶۵
مثال‌های حل شده ---- ۲۸۲
سؤال‌های تکمیلی ---- ۲۸۹
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۲۹۵
پاسخ سؤال‌ها ---- ۳۰۱

فصل هشتم، اصطکاک ---- ۳۱۷
مثال‌های حل شده ---- ۳۲۷
سؤال‌های تکمیلی ---- ۳۳۸
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۳۴۴
پاسخ سؤال‌ها ---- ۳۵۳

فصل نهم، گشتاور (ممان) اینرسی و حاصل‌ضرب اینرسی سطح ---- ۳۷۹
مثال‌های حل شده ---- ۳۹۰
سؤال‌های تکمیلی ---- ۳۹۵
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۳۹۹
پاسخ سؤال‌ها ---- ۴۰۱

فصل دهم، کار مجازی ---- ۴۱۱
مثال‌های حل شده ---- ۴۲۰
سؤال‌های تکمیلی ---- ۴۲۵
سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک ---- ۴۲۸
پاسخ سؤال‌ها ---- ۴۳۰
تست‌های سراسری سال ۱۳۹۳ تا ۱۴۰۱ ---- ۴۳۹

فصل ۱ مفاهیم اولیه – نیرو

* **مکانیک:** شاخه‌ای از فیزیک می‌باشد که به مطالعه اجسام در وضعیت سکون یا حرکت تحت اثر نیروهایی که به آنها وارد می‌شود، می‌پردازد.

استاتیک: شاخه‌ای از مکانیک می‌باشد که به بررسی تعادل اجسام صلب ساکن یا با حرکت یکنواخت تحت اثر نیروهای وارده بر آنها می‌پردازد.

نیرو: اثر (اندرکنش) یک جسم به جسم دیگر نیرو نامیده می‌شود. نیرو یک کمیت برداری می‌باشد. مشخصه نیرو عبارت است از اندازه، جهت و نقطه اثر آن. کلیه عملیات مربوط به بردارها برای نیروها نیز صادق است.

دسته‌بندی نیروها: نیروها را می‌توان مانند بردارها به سه نوع دسته‌بندی نمود:

۱- نیروی ثابت: نیرویی است که نقطه اثر، راستا و جهت آن مشخص باشد.

۲- نیروی آزاد: نیرویی است که جهت آن مشخص باشد، مانند نیروی باد بر روی یک تابلو.

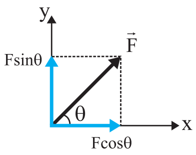
۳- نیروی لغزنده: نیرویی است که راستا و جهت آن مشخص ولی نقطه اثر آن متغیر باشد.

واحد نیرو: واحد نیرو در سیستم بین‌المللی (SI) نیوتن (N)، در سیستم مرسوم آمریکایی (USCU) پوند (lb) و در سیستم متریک قدیم (MKS) کیلوگرم (kg) می‌باشد. هزار نیوتن را با kN، هزار کیلوگرم را با ton و هر هزار پوند را با kip نمایش می‌دهند.

تصویر نیرو بر روی محور: برای بدست آوردن تصویر نیرو (مولفه نیرو) بر روی یک محور، مقدار نیرو را در کسینوس زاویه بین نیرو و محور ضرب می‌کنیم.

نمایش نیرو: نیرو را مانند بردار با یک پاره‌خط جهت‌دار (پیکان) نمایش می‌دهند.

در مختصات کارتزین (x,y) نیرو را می‌توان بوسیله مولفه‌هایش در جهات x و y بصورت زیر نشان داد:



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (F\cos\theta)\vec{i} + (F\sin\theta)\vec{j} \qquad (۱-۱)$$

که در آن F اندازه‌ی نیرو و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد در جهات x و y هستند.

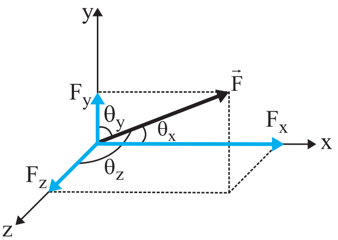
در حالت فضایی (سه بعدی) نیروی $\vec{F}$ را می‌توان به سه صورت نمایش داد:

a) **زاویه نیرو با سه محور x، y و z معلوم است.** در صورتیکه زاویه سه نیرو با محورهای x، y و z به ترتیب θ_x، θ_y و θ_z باشند تصویر نیروی F بر سه محور عبارت است از:

$F_x = F\cos\theta_x \quad , \quad F_y = F\cos\theta_y \quad , \quad F_z = F\cos\theta_z$ بنابراین:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \Rightarrow \vec{F} = (F\cos\theta_x)\vec{i} + (F\cos\theta_y)\vec{j} + (F\cos\theta_z)\vec{k} \qquad (۱-۲)$$

* مطالب این فصل مربوط به دروس فیزیک و هندسه تحلیلی می‌باشد. این فصل صرفاً جهت یادآوری ارائه شده است. فراوانی تست‌های آزمون سراسری از این فصل حدود یک درصد بوده است.

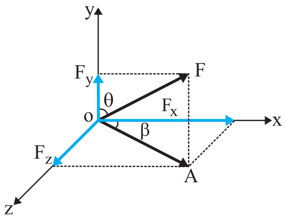


که در آن $\vec{i}$, $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردار واحد در جهت محورهای x، y و z می‌باشند. رابطه زیر بین θ_x، θ_y و θ_z برقرار می‌باشد.

$$\cos^{۲}\theta_x + \cos^{۲}\theta_y + \cos^{۲}\theta_z = ۱ \qquad (۱-۳)$$

b) زاویه نیرو با محور y، (θ) و زاویه تصویر آن بر روی صفحه xz با محور x (β)، معلوم می‌باشد.

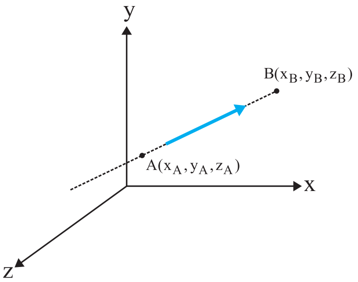
در این حالت داریم:



$$OA = F\sin\theta$$
$$F_x = OA\cos\beta \Rightarrow F_x = F\sin\theta\cos\beta$$
$$F_y = F\cos\theta$$
$$F_z = OA\sin\beta \Rightarrow F_z = F\sin\theta\sin\beta$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \Rightarrow \vec{F} = (F\sin\theta\cos\beta)\vec{i} + (F\cos\theta)\vec{j} + (F\sin\theta\cos\beta)\vec{k} \qquad (۱-۴)$$

c) مختصات دو نقطه در راستای نیرو معلوم باشد: در صورتی که مختصات دو نقطه‌ی دلخواه $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ که در راستای نیرو قرار دارند معلوم باشد، با فرض:



$$\Delta x = x_B - x_A \;,\; \Delta y = y_B - y_A \;,\; \Delta z = z_B - z_A$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^{۲} + \Delta_y^{۲} + \Delta_z^{۲}}$$

$$F_x = \frac{\Delta x}{\Delta}F \;,\; F_y = \frac{\Delta y}{\Delta}F \;,\; F_z = \frac{\Delta z}{\Delta}F$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \Rightarrow F = (\frac{\Delta x}{\Delta}F)\vec{i} + (\frac{\Delta y}{\Delta}F)\vec{j} + (\frac{\Delta z}{\Delta}F)\vec{k} \qquad (۱-۵a)$$

توجه داشته باشیم که:

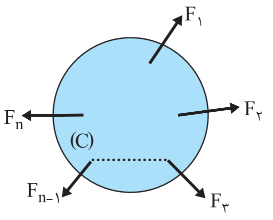
$$\cos\theta_x = \frac{\Delta x}{\Delta} \;,\; \cos\theta_y = \frac{\Delta y}{\Delta} \;,\; \cos\theta_z = \frac{\Delta z}{\Delta} \qquad (۱-۵b)$$

نکته ۱

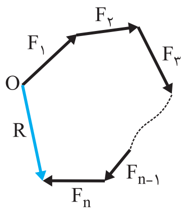
در صورتی که تفاضل‌های مختصات نظیر دو نقطه دلخواه در امتداد نیرویی با هم برابر باشند $(\Delta x = \Delta y = \Delta z)$، مولفه‌های (تصاویر) آن نیرو بر محورهای x، y و z برابر می‌باشند $(F_x = F_y = F_z)$. مسلم است زاویه نیرو با سه محور نیز برابر است وکسینوس این زاویه برابر است با $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$.

برآیند نیروها در حالت دو بعدی: برآیند (مجموع) چند نیرو را می‌توان به روش ترسیمی یا تحلیلی بدست آورد.

a) روش ترسیمی: برای بدست آوردن برآیند نیروهای $F_1, F_2, ..., F_n$ که بر جسم (C) وارد شده‌اند (شکل a)، ابتدا از نقطه O نیروئی موازی و مساوی F_1 رسم می‌کنیم از انتهای نیروی F_1 نیروئی موازی و مساوی F_2 را رسم می‌کنیم. به همین ترتیب تا نیروی n‌ام ادامه می‌دهیم. برآیند n نیرو، از اتصال ابتدای نیروی F_1 به انتهای نیروی F_n بدست می‌آید. (نیروی R شکل (b))

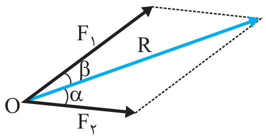


(a)



(b)

در حالت خاص، برآیند دو نیرو که با یکدیگر زاویه θ می‌سازند با استفاده از قانون کسینوس‌ها در مثلث برابر است با:



$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\theta \qquad (\theta = \alpha + \beta) \qquad (۱-۶)$$

زاویه بین نیروها با نیروی برآیند را می‌توان با استفاده از قانون سینوس‌ها در مثلث بدست آورد.

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} \qquad (۱-۷)$$

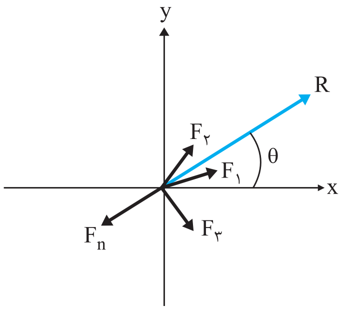
در این حالت در صورتی که $F_1 = F_2 = F$ باشد برآیند دو نیرو برابر است با $R = 2F\cos\frac{\theta}{2}$ و زاویه نیروها با برآیند، برابر با $\frac{\theta}{2}$ می‌شود.

b) روش تحلیلی: در این روش ابتدا نیروهایی که به جسم C وارد می‌شود را در دستگاه مختصات (x-y) نمایش می‌دهیم در این حالت برآیند نیروهای $F_1, F_2, ..., F_n$ برابر است با:

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \qquad (۱-۸a)$$

$$\tan\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \qquad (۱-۸b)$$

که در آن R اندازه برآیند نیروها، $\sum F_x$ مجموع مولفه‌های (تصاویر) نیروها روی محور x، $\sum F_y$ مجموع مولفه‌های (تصاویر) نیروها روی محور y و θ زاویه برآیند نیروها با محور x می‌باشد.



بنابراین بردار برآیند نیروها در حالت دو بعدی را می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$\vec{R} = (\sum F_x)\vec{i} + (\sum Fy)\vec{j} \qquad (۱-۹)$$

برآیند نیروها در حالت سه بعدی: برای بدست آوردن برآیند نیروها در حالت سه بعدی، ابتدا نیروهای $F_1, F_2, ..., F_n$ را بصورت برداری نشان می‌دهیم (مانند روابط (۱-۲)، (۱-۴) یا (۱-۵a). در این حالت برآیند نیروها برابر است با:

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \tag{1-10a}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R} \quad , \quad \cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R} \quad , \quad \cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R} \tag{1-10b}$$

که در آن R اندازه برآیند نیروها و $\sum F_x$، $\sum F_y$ و $\sum F_z$ به ترتیب برابر است با مجموع مولفه‌های (تصاویر) نیروها در جهات x، y و z. θ_x، θ_y و θ_z به ترتیب زاویه برآیند نیروها با محورهای x، y و z می‌باشد. بنابراین بردار برآیند نیروها را می‌توان بصورت زیر نشان داد:

$$\vec{R} = (\sum F_x)\vec{i} + (\sum F_y)\vec{j} + (\sum F_z)\vec{k} \tag{1-11}$$

برای مثال برآیند دو نیروی $\vec{F_1} = 2i - 3j + 5k$ و $\vec{F_2} = 4i - 6j + 9k$ برابر است با:

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (2+4)\,i + (-6-3)\,j + (5+9)\,k = 6i - 9j + 14k$

حاصل‌ضرب داخلی (یا عددی) دو بردار: حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو بردار در کسینوس زاویه بین دو بردار. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک کمیت اسکالر (عددی) می‌باشد. بنابراین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که به صورت $\vec{A}\cdot\vec{B}$ نشان داده می‌شود برابر است با:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|A\|\,\|B\|\cos\theta \tag{1-12a}$$

که در آن $\|A\|$ و $\|B\|$ به ترتیب اندازه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ زاویه بین دو بردار می‌باشد.

در صورتی که دو بردار توسط مولفه‌هایشان نشان داده شده باشد حاصل‌ضرب دو بردار برابر است با مجموع حاصل‌ضرب مولفه‌های نظیر دو بردار.

برای مثال اگر دو بردار A و B توسط مولفه‌هایشان به صورت $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ و $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ نشان داده شده باشند، همان‌طور که ملاحظه می‌شود مولفه‌های نظیر A_y و A_z به ترتیب برابر با B_x، B_y و B_z می‌باشد. بنابراین حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر است با:

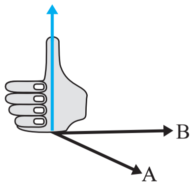
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|A\|\,\|B\|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1-12b}$$

با توجه به رابطه (۱-۱۲b) کسینوس زاویه بین دو بردار برابر است با:

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\|A\|\cdot\|B\|} \tag{1-13}$$

در رابطه (۱-۱۳) $\|A\|$ و $\|B\|$ اندازه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که برابر با مقادیر زیر می‌باشند

$$\|B\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad , \quad \|A\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



(e)

حاصلضرب خارجی (برداری) دو بردار: حاصلضرب خارجی دو بردار یک کمیت‌برداری است که اندازه آن برابر با حاصلضرب اندازه دو بردار در سینوس زاویه بین دو بردار می‌باشد. راستای آن عمود بر صفحه دو بردار است و جهت آن از قانون دست راست مطابق شکل (e) تعیین می‌گردد. در صورتی که اندازه حاصل‌ضرب دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر C باشد. مقدار C برابر است با:

$$\|C\| = \|A\| \cdot \|B\| \sin\theta \qquad (۱-۱۴a)$$

که در آن $\|A\|$ و $\|B\|$ اندازه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و θ زاویه بین دو بردار می‌باشد.

در صورتی که دو بردار به وسیله مولفه‌هایشان نمایش داده شده باشند، مانند $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$ و $\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$ در این حالت بردار حاصلضرب خارجی آنها از بسط دترمینان زیر حاصل می‌گردد.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \Rightarrow \qquad (۱-۱۴b)$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (B_x A_z - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - B_x A_y)\vec{k}$$

تصویر نیرو بر امتداد داده شده: تصویر نیروی $F = F_x i + F_y j + F_z k$ بر امتداد L که بردار واحد (بردار یکه) آن به صورت $\vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$ می‌باشد، برابر است با حاصلضرب داخلی نیروی $\vec{F}$ در بردار واحد (بردار یکه) امتداد L، بنابراین:

$$\text{تصویر نیروی } \vec{F} \text{ بر امتداد } L = \vec{F} \cdot \vec{\lambda} = F_x \lambda_x + F_y \lambda_y + F_z \lambda_z \qquad (۱-۱۴c)$$

که در آن λ_x، λ_y و λ_z کسینوس هادی‌های امتداد L، یا به عبارت دیگر کسینوس‌های زوایای امتداد L با محورهای x و y و z می‌باشند.

لازم به ذکر است برای بدست آوردن کسینوس هادی‌های مربوط به یک بردار، مولفه‌های بردار را بر اندازه بردار تقسیم می‌کنیم. برای مثال کسینوس هادی‌های بردار $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ برابرند با:

$$\lambda_x = \frac{a}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}, \quad \lambda_y = \frac{b}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}, \quad \lambda_z = \frac{c}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} \qquad (۱-۱۴d)$$

حال برای بدست آوردن تصویر بردار $\vec{F} = ۷i - ۲۸j - ۳۵k$ بر امتداد $\overrightarrow{AB} = ۶i - ۳j + ۲k$ ابتدا کسینوس‌های هادی بردار $\overrightarrow{AB}$ را بدست می‌آوریم. اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با $\|AB\| = \sqrt{۶^۲ + (-۳)^۲ + ۲^۲} = ۷$ و با توجه به رابطه‌ی (۱-۱۴d) داریم $\lambda_x = \frac{۶}{۷}$ و $\lambda_y = \frac{-۳}{۷}$ و $\lambda_z = \frac{۲}{۷}$، بنابراین، با توجه به رابطه‌ی (۱-۱۴c) تصویر بردار F بر امتداد AB برابر است با:

$$F_{AB} = ۷ \times \frac{۶}{۷} + (-۲۸) \times -\frac{۳}{۷} + (-۳۵) \times \frac{۲}{۷} = ۸$$

- مثال‌های حل شده -

مثال ۱ مولفه نیروی F بر روی محور x برابر $F_x = -۴۰۰N$ می‌باشد. در صورتی که زاویه نیروی F با محورهای y و z به ترتیب °۴۵ و °۶۰ باشد، نیروی F را به صورت برداری نمایش دهید.

- با استفاده از رابطه (۳-۱) داریم:

$$\cos^۲\theta_x + \cos^۲\theta_y + \cos^۲\theta_z = ۱ \Rightarrow \cos^۲\theta_x = ۱ - (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ - (\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow \cos\theta_x = \pm ۰/۵$$

با توجه به اینکه مولفه نیروی F بر روی محور x منفی می‌باشد، بنابراین $\cos\theta_x = -۰/۵$ قابل قبول می‌باشد مولفه نیروی F بر روی محور x برابر است با $F_x = F\cos\theta_x$، بنابراین:

$$-۴۰۰ = F(-۰/۵) \Rightarrow F = ۸۰۰N \;,\quad \vec{F} = F\cos\theta_x i + F\cos\theta_y j + F\cos\theta_z k$$

$$\Rightarrow F = -۴۰۰i + ۸۰۰ \times ۰/۷۰۷j + ۸۰۰ \times ۰/۵k, \quad \Rightarrow \vec{F} = -۴۰۰i + ۵۶۵/۶۸j + ۴۰۰k$$

مثال ۲ ابتدای نیروی $F_۱ = ۱۴۰N$ در مبدا مختصات قرار دارد، این نیرو از نقطه $B(۳,۲,۶)$ نیز عبور می‌کند. برآیند این نیرو و نیروی $\vec{F_۲} = ۶۰i + ۳۰j - ۷۵k$ را بدست آورید. همچنین اندازه تصویر نیروی $F_۲$ بر $F_۱$ را محاسبه نماید.

- ابتدا نیروی $F_۱$ را به صورت برداری نمایش می‌دهیم. با استفاده از رابطه (۵a-۱) داریم:

$$\Delta x = ۳ - ۰ \,,\quad \Delta y = ۲ - ۰ \,,\quad \Delta z = ۶ - ۰ \,,\quad \Delta = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲ + ۶^۲} = ۷$$

$$\Rightarrow \vec{F_۱} = \frac{۳}{۷} \times ۱۴۰i + \frac{۲}{۷} \times ۱۴۰j + \frac{۶}{۷} \times ۱۴۰k \Rightarrow F_۱ = ۶۰i + ۴۰j + ۱۲۰k$$

$$\vec{R} = \vec{F_۱} + \vec{F_۲} = ۱۲۰i + ۷۰j + ۴۵k$$

اندازه تصویر نیروی $F_۲$ بر $F_۱$ برابر است با قدر مطلق حاصلضرب داخلی نیروی $F_۲$ در بردار واحد نیروی $F_۱$. بنابراین ابتدا، بردار واحد نیروی $F_۱$ را که با $\vec{\lambda}$ نمایش می‌دهیم بدست می‌آوریم، داریم:

$$\vec{\lambda} = \frac{\Delta_x}{\Delta}i + \frac{\Delta_y}{\Delta}j + \frac{\Delta_z}{\Delta}k = \frac{۳}{۷}i + \frac{۲}{۷}j + \frac{۶}{۷}k \;,\; |\vec{F_۲}.\vec{\lambda}| = \left|(۶۰i + ۳۰j - ۷۵k)\cdot(\frac{۳}{۷}i + \frac{۲}{۷}j + \frac{۶}{۷}k)\right|$$

$$= \left|۶۰ \times \frac{۳}{۷} + ۳۰ \times \frac{۲}{۷} - ۷۵ \times \frac{۶}{۷}\right| = ۳۰N$$

نکته ۲

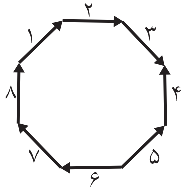
اگر ابتدای نیرویی در مبدا مختصات باشد و این نیرو از نقطه دلخواهی عبور کند به طوری که مختصات آن نقطه نسبت به محورهای x، y و z با هم برابر باشند، زاویه این نیرو با سه محور مساوی و در نتیجه تصاویر (مولفه‌های) آن بر روی سه محور برابر می‌باشند. (این نکته حالت خاص نکته (۱) است.)

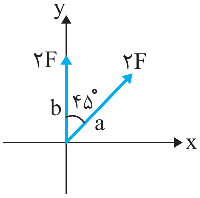
برای مثال، در صورتی که مختصات انتهای برداری که ابتدای آن در مرکز مختصات قرار دارد (b,b,b) باشد، در این حالت داریم $\Delta x = \Delta y = \Delta z = b - ۰ = b$ و $\Delta = \sqrt{\Delta_x^۲ + \Delta_y^۲ + \Delta_z^۲} = b\sqrt{۳}$ و

$$\cos\theta_x = \cos\theta_y = \cos\theta_z = \frac{b}{b\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

در مثال (۲) اگر مختصات B به صورت $B(۳,۳,۳)$ باشد $\cos\theta_x=\cos\theta_y=\cos\theta_z=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و تصویر آن بر سه محور برابر می‌شود با: $F_x=F_y=F_z=۱۴۰\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۱۴۰}{\sqrt{۳}}$

مثال ۳ نیروهای نشان داده شده مطابق شکل یک هشت ضلعی منتظم تشکیل داده‌اند. در صورتی که اندازه هر یک از نیروها F باشد، اندازه برآیند نیروها و زاویه آن با افق را بدست آورید.





– نیروهای ۲ و ۶ و همچنین نیروهای ۳ و ۷ موازی و مخالف جهت یکدیگر می‌باشند بنابراین برآیند آنها صفر می‌باشد. نیروهای ۴ و ۸ مساوی و هم‌جهت هستند، بنابراین برآیند آنها برابر ۲F می‌باشد. به همین ترتیب برآیند نیروی ۱ و ۵ برابر ۲F است. برآیند ۱ و ۵ را با a و ۴ و ۸ را با b نمایش می‌دهیم. از آنجایی که زوایای داخلی ۸ ضلعی منتظم برابر °۱۳۵ می‌باشد زاویه بین a و b برابر می‌شود با °۴۵، داریم:

$$\sum F_x=۲F\cos ۴۵^\circ=\sqrt{۲}F,\quad \sum F_y=۲F+۲F\cos ۴۵^\circ=(۲+\sqrt{۲})F$$

$$R=\sqrt{(\sum F_x)^۲+(\sum F_y)^۲}\Rightarrow R=\sqrt{۲F^۲+(۶+۴\sqrt{۲})F^۲}=(۲\sqrt{۲+\sqrt{۲}})F=۳/۷F$$

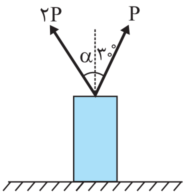
$$\tan\theta=\frac{\sum F_y}{\sum F_x}=\frac{(۲+\sqrt{۲})F}{\sqrt{۲}F}=\sqrt{۲}+۱\Rightarrow\theta=۶۷/۵^\circ$$

θ زاویه برآیند نیروی a و b با محور x می‌باشد.(θ در شکل نشان داده نشده است.)

لازم به ذکر است اندازه برآیند نیروی a و b را می‌توان به سادگی از رابطه (۷-۱) بدست آورد.

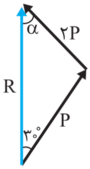
$$R=\sqrt{(۲F)^۲+(۲F)^۲+۲(۲F)(۲F)\cos ۴۵^\circ}=۳/۷F$$

مثال ۴ در شکل نشان داده شده برآیند دو نیروی P و ۲P در جهت قائم می‌باشد. مقدار زاویه α را بدست آورید.



– برای آنکه برآیند دو نیرو در جهت قائم باشد، باید مجموعه مولفه‌های دو نیرو در جهت افق برابر صفر باشد.

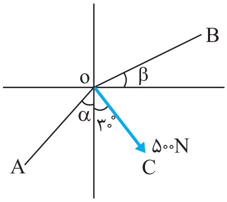
$$P\sin ۳۰^\circ-۲P\sin\alpha=۰\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\alpha=۱۴/۴۷$$



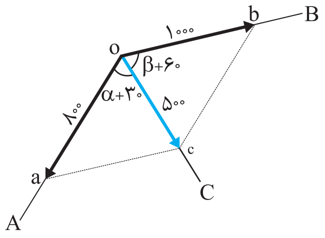
روش ترسیمی: در صورتی که برآیند نیروها R باشد، امتداد باید مطابق شکل نشان داده شده در جهت قائم باشد. با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{P}=\frac{\sin ۳۰}{۲P}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\alpha=۱۴/۴۷^\circ$$

مثال ۵ در شکل نشان داده شده نیروی ۵۰۰N به دو مولفه در امتداد oA و oB تجزیه شده است. در صورتی که مولفه نیرو در امتداد oA برابر ۸۰۰N و در امتداد oB ۱۰۰۰N باشد، زوایای α و β را محاسبه نمایید. $(|\alpha,\beta|<۹۰)$



– همانطور که از شکل مسئله مشهود است زاویه بین oA و oC برابر $\alpha+۳۰$ و بین oB و oC برابر $\beta+۶۰$ می‌باشد. با استفاده از قانون کسینوس‌ها در مثلث oac و obc داریم:



$$ac^{۲} = oa^{۲} + oc^{۲} - ۲oa.oc\cos(\alpha+۳۰) \ ,$$

$$۱۰۰۰^{۲} = ۸۰۰^{۲} + ۵۰۰^{۲} - ۲\times ۸۰۰\times ۵۰۰\cos(\alpha+۳۰)$$

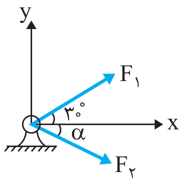
$$\Rightarrow \cos(\alpha+۳۰) = -۰/۱۳۸ \Rightarrow \alpha = ۶۷/۹^{\circ}$$

$$bc^{۲} = oc^{۲} + ob^{۲} - ۲oc.ob\cos(\beta+۶۰)$$

$$۸۰۰^{۲} = ۵۰۰^{۲} + ۱۰۰۰^{۲} - ۲\times۵۰۰\times۱۰۰۰\cos(\beta+۶۰)$$

$$\Rightarrow \cos(\beta+۶۰) = ۰/۶۱ \Rightarrow \beta+۶۰ = \pm۵۲/۴ \Rightarrow \beta = -۷/۸۵$$

مثال ۶ برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ برابر ۸۰۰N و بر محور x منطبق می‌باشد. اگر نیروی $F_۱ = ۲۰۰$ نیوتن باشد، نیروی $F_۲$ و زاویه α را بدست آورید.



– از آنجایی که برآیند دو نیرو در امتداد محور x می‌باشد، بنابراین مجموع مولفه‌های نیروهای $F_۱$ و $F_۲$ در امتداد محور y برابر صفر و در امتداد محور x برابر ۸۰۰N می‌باشد.

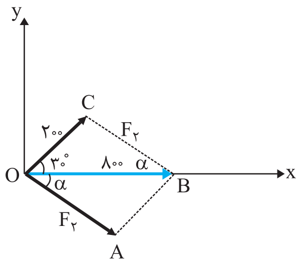
$$\sum F_y = ۰\ , \quad ۲۰۰\sin ۳۰^{\circ} - F_۲\sin\alpha = ۰ \Rightarrow F_۲\sin\alpha = ۱۰۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_x = ۸۰۰ \Rightarrow ۲۰۰\cos ۳۰ + F_۲\cos\alpha = ۸۰۰ \Rightarrow F_۲\cos\alpha = ۶۲۶/۸ \qquad (۲)$$

$$\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱۰۰}{۶۲۶/۸} \Rightarrow \tan\alpha = ۰/۱۶ \Rightarrow \alpha = ۹/۰۶^{\circ} \ ,$$

رابطه (۱): $F_۲ = \frac{۱۰۰}{\sin\alpha} = \frac{۱۰۰}{\sin ۹/۰۶} \Rightarrow F_۲ = ۶۳۴/۷N$

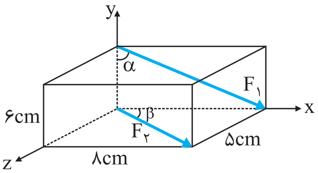
روش ترسیمی: برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ باید بر روی محور x قرار گیرد. با استفاده از قانون کسینوس‌ها در مثلث OCB داریم:



$$F_۲^{۲} = ۸۰۰^{۲} + ۲۰۰^{۲} - ۲\times۲۰۰\times۸۰۰\cos ۳۰^{\circ} \Rightarrow F_۲ = ۶۳۴/۷N$$

$$\frac{\sin\alpha}{۲۰۰} = \frac{\sin ۳۰}{۶۳۴/۷} \Rightarrow \alpha = ۹/۰۶$$

مثال ۷ در شکل نشان داده شده اندازه برآیند دو نیروی $F_1 = 300N$ و $F_2 = 1000N$ را بدست آورید.



– نیروی F_1 در صفحه (x-y) و نیروی F_2 در صفحه $(x-z)$ قرار دارد. بنابراین با محاسبه تصاویر دو نیرو آنها را بصورت برداری نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\tan\alpha = \frac{8}{6} \Rightarrow \alpha = 53/13^\circ \quad , \quad \tan\beta = \frac{5}{8} \Rightarrow \beta = 32^\circ$$

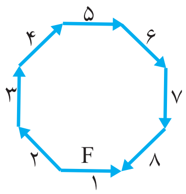
$$\vec{F_1} = F_1 \sin\alpha i - F_1 \cos\alpha j + 0k = 240 i - 180 j \;,\; \vec{F_2} = F_2 \cos\beta i + 0 \times j + F_2 \sin\beta k = 848 i + 530 k$$

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 1088 i - 180 j + 530 k \qquad |R| = \sqrt{1088^2 + (-180)^2 + 530^2} = 1223/53N$$

می‌توان با استفاده از رابطه (۱-۵a) نیز نیروی F_1 و F_2 را بصورت برداری نمایش داد.

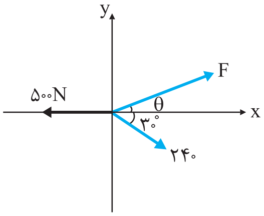
– سؤال‌های تکمیلی –

۱- هشت ضلعی متنظم نشان داده شده از هشت نیروی مساوی به بزرگی F تشکیل شده است. برآیند نیروها برابر است با:



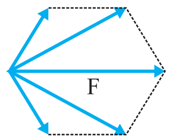
۱) F
۲) صفر
۳) ۲F
۴) $۸\sqrt{۲}F$

۲- برآیند سه نیروی نشان داده شده برابر با ۲۰۰N و در جهت مثبت محور y قرار دارد. زاویه θ بر حسب درجه برابر است با:



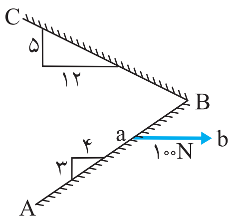
۱) ۵۳/۴
۲) ۴۷/۶
۳) ۸۳/۷
۴) ۱۲/۸

۳- در سیستم نیروهای نشان داده شده ابتدا و انتهای نیروها بر رئوس شش ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند. برآیند نیروها برابر است با:



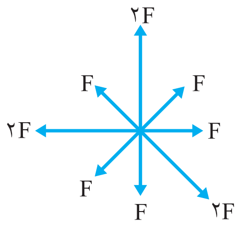
۱) -۲F
۲) ۳F
۳) ۴F
۴) ۶F

۴- اگر نیروی ۱۰۰N به دو مولفه یکی بر روی AB و دیگری در امتداد موازی با CB تجزیه شود مولفه آن بر روی AB برابر است با:



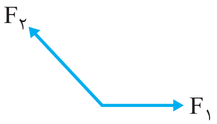
۱) ۵۳/۴ N
۲) ۴۰/۱۸ N
۳) ۴۴/۶۴ N
۴) ۱۲/۳۳ N

۵- در سیستم نیروهای نشان داده شده زاویه بین نیروها °۴۵ است مقدار برآیند آنها برابر است با:



۱) صفر
۲) $(\sqrt{۲}-۱)F$
۳) $\frac{F}{\sqrt{۲}}$
۴) $\sqrt{۲}F$

۶- برآیند دو نیروی F_1 و F_2 عمود بر نیروی کوچکتر و اندازه آن نصف نیروی بزرگتر است. زاویه بین دو نیروی F_1 و F_2 برابر است با:

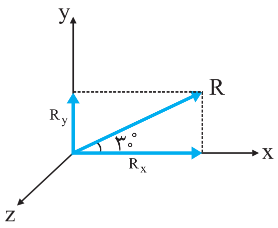


۱) 120°
۲) 180°
۳) 150°
۴) 145°

۷- تصویر نیروی $\vec{F} = 3i + (b-1)j + bk$ بر امتداد L که با سه محور زوایای مساوی می‌سازد، برابر $2\sqrt{3}$ kN می‌باشد. مقدار b برابر است با:

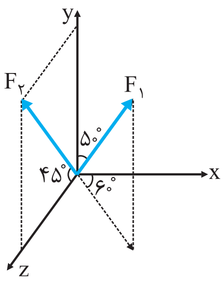
۱) ۳-
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۸- برآیند دو نیروی $F_1 = ai + 2bj + 3k$ و $F_2 = (a-2)i + bj + (c-1)k$ (که در شکل نشان داده نشده‌اند) برابر $\vec{R}$ و در صفحه (x-y) واقع شده است (نیروی R) و زاویه آن با محور x برابر 30° می‌باشد. در صورتی که اندازه برآیند دو نیرو 12kN باشد، مقادیر a، b و c برابر است با:



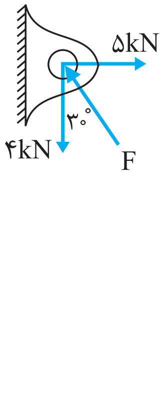
۱) $c = -2,\ b = 2,\ a = 3\sqrt{3} + 1$
۲) $c = \sqrt{3},\ b = 1,\ a = \frac{3}{2}$
۳) $c = -2,\ b = 2,\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $c = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b = 3,\ a = -2$

۹- اندازه برآیند دو نیروی $F_1 = 400N$ و $F_2 = 600N$ و زاویه آنها با محور y را بدست آورید.



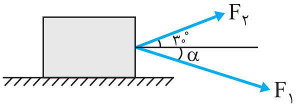
۱) ۹۵۱/۵ , 58°
۲) ۴۱۲/۸ , 59°
۳) ۱۴۲/۷ , 38°
۴) ۹۸۱/۵ , 46°

۱۰- در شکل نشان داده شده بزرگی نیروی F برای آنکه برآیند سه نیرو حداقل مقدار ممکن باشد برابر است با:



۱) ۴/۱۳ kN
۲) ۸۱/۱۴ kN
۳) ۹/۸۱ kN
۴) ۵/۹۶ kN

۱۱- برآیند نیروهایی که برای حرکت جعبه به آن اعمال می‌شود در امتداد محور x می‌باشد و اندازه آن ۴kN است. در صورتی که در زاویه α نیروی F_1 می‌نیمم شود در این حالت نیروی F_1 و F_2 برحسب نیوتن برابر است با:



۱) $F_2 = ۲\sqrt{۳}$, $F_1 = ۲$

۲) $F_2 = ۴$, $F_1 = \sqrt{۳}$

۳) $F_2 = ۲$, $F_1 = ۴$

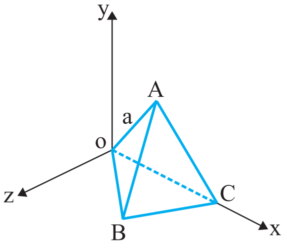
۴) $F_2 = \sqrt{۳}$, $F_1 = ۲\sqrt{۳}$

- سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک -

۱۲- نیروی $F = ۱۰۰kN$ در امتداد قطر مکعبی به ابعاد واحد اعمال می‌شود به طوری که کلیه مولفه‌های آن در امتداد سه ضلع مکعب مثبت است. تصویر این نیرو در امتداد $\vec{r} = ۳\vec{i} + \vec{j} - ۴\vec{k}$ چقدر است؟ (۸۶)

۱) صفر
۲) $\frac{۱۰۰}{\sqrt{۷۸}}kN$
۳) $\frac{۳۰۰}{\sqrt{۷۸}}kN$
۴) $۱۰۰۰kN$

۱۳- منشور منتظمی که دارای شش ضلع با طول a است را مطابق شکل در نظر بگیرید. بردار یکه‌ی امتداد OA را به دست آورید. $(\bar{\lambda}_{OA} = ?)$ (۹۰)



۱) $\bar{\lambda}_{OA} = \frac{a}{۲}\bar{i} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a\bar{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}a\bar{k}$

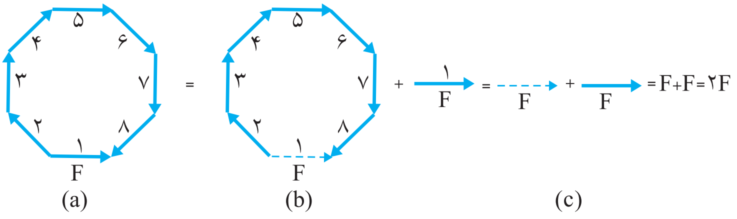
۲) $\bar{\lambda}_{OA} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a\bar{i} + \frac{\sqrt{۶}}{۳}a\bar{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۶}a\bar{k}$

۳) $\bar{\lambda}_{OA} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a\bar{i} + \frac{\sqrt{۶}}{۳}a\bar{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}a\bar{k}$

۴) $\bar{\lambda}_{OA} = \frac{a}{۲}\bar{i} + \frac{\sqrt{۶}}{۳}a\bar{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۶}a\bar{k}$

– پاسخ سؤال‌ها –

۱– گزینه‌ی (۳). برآیند نیروهای ۲ تا ۸ برابر ۱ می‌باشد، (نیروی خط چین شکل b)، (به روش ترسیمی مراجعه شود) مجموع این برآیند و نیروی ۱ برابر می‌شود با برآیند نیروهای هشت ضلعی شکل (a) یعنی دو برابر نیروی ۱ یا به عبارت دیگر ۲F (شکل c)



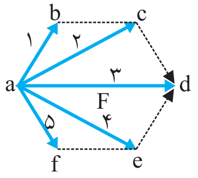
۲– گزینه‌ی (۲). از آنجایی که برآیند سه نیرو در امتداد y قرار دارد بنابراین مجموع مولفه نیروها بر روی محور x باید صفر باشد و مجموع مولفه نیروها بر روی محور y باید برابر برآیند نیروها یعنی ۲۰۰ گردد.

$$\sum F_x = ۰ \quad , \quad F\cos\theta + ۲۴۰\cos ۳۰ - ۵۰۰ = ۰ \Rightarrow F\cos\theta = ۲۹۲/۱۵\,N \qquad (۱)$$

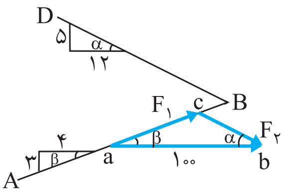
$$\sum F_y = ۲۰۰ \quad , \quad F\sin\theta - ۲۴۰\sin ۳۰ = ۲۰۰ \Rightarrow F\sin\theta = ۳۲۰\,N \qquad (۲)$$

$$\frac{(۲)}{(۱)} = \tan\theta = \frac{۳۲۰}{۲۹۲/۱۵} = ۱/۹ \Rightarrow \theta = ۴۷/۶^\circ$$

۳– گزینه‌ی (۲). از روش ترسیمی استفاده می‌کنیم. برای بدست آوردن برآیند نیروی ۲ و ۵ از انتهای نیروی ۲، نیروئی موازی و مساوی نیروی ۵ رسم می‌کنیم. از آنجایی که cd با af موازی و مساوی است نیروی رسم شده بر cd منطبق می‌شود. بنابراین برآیند دو نیروی ۲ و ۵ برابر ad یعنی F می‌شود. به همین ترتیب برآیند دو نیروی ۱ و ۴ برابر F است. با توجه به اینکه نیروی ۳، مساوی F است، در نتیجه برآیند سیستم نیروها برابر ۳F می‌گردد.



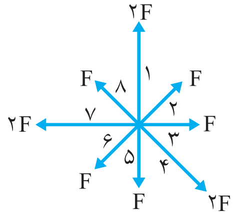
۴– گزینه‌ی (۳). از نقطه b انتهای نیروی ۱۰۰N خطی موازی با DB رسم می‌کنیم تا AB را در c قطع کند. بدین ترتیب نیروی ۱۰۰N به دو مولفه $F_۱$ بر روی AB و $F_۲$ موازی DB تجزیه می‌شود. با استفاده از رابطه (۷-۱) داریم:



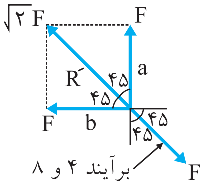
$$\tan\alpha = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \alpha = ۲۲/۶۲^\circ \quad , \quad \tan\beta = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \beta = ۳۶/۸۶^\circ$$

مثلث abc قانون سینوس‌ها :

$$\frac{F_۱}{\sin\alpha} = \frac{۱۰۰}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow F_۱ = ۱۰۰ \cdot \frac{\sin(۲۲/۶۲^\circ)}{\sin(۵۹/۴۸^\circ)} = ۴۴/۶۴\,N$$



(a)



(b)

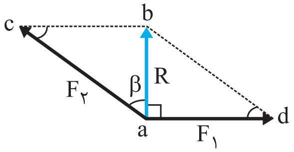
۵- گزینه‌ی (۲). نیروی ۲ و ۶ مساوی مخالف جهت می‌باشند بنابراین برآیند آنها برابر صفر است. برآیند نیروهای ۸ و ۴ برابر F در امتداد و هم جهت با نیروی ۴ است و زاویه آن با افق و قائم ۴۵° است. (شکل b) برآیند نیروهای ۱ و ۵ برابر F در امتداد قائم به طرف بالا (نیروی a در شکل b) و برآیند نیروهای ۳ و ۷ برابر F در امتداد افق به طرف چپ می‌باشد (نیروی b در شکل b). نیروی برآیند نیروهای a و b (نیروی R') برابر $R' = \sqrt{F^۲ + F^۲} = \sqrt{۲}F$ و زاویه آن با نیروهای a و b ۴۵° است، بنابراین در امتداد برآیند نیروهای ۴ و ۸ ولی در جهت مخالف می‌باشد. در نتیجه برآیند سیستم نیروها برابر $\sqrt{۲}F - F = (\sqrt{۲} - ۱)F$ می‌باشد.

روش دیگر: زوایای بین نیروها ۴۵° می‌باشد داریم:

$$\sum F_x = F\cos ۴۵ + F + ۲F\cos ۴۵ - F\cos ۴۵ - ۲F - F\cos ۴۵ = F\frac{\sqrt{۲}}{۲} - F$$

$$\sum F_y = ۲F + F\cos ۴۵ - ۲F\cos ۴۵ - F - F\cos ۴۵ + F\cos ۴۵ = F - \frac{F\sqrt{۲}}{۲}$$

$$R = \sqrt{(F\frac{\sqrt{۲}}{۲} - F)^۲ + (F - \frac{F\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \sqrt{۳F^۲ - ۲\sqrt{۲}F^۲} = F\sqrt{(\sqrt{۲} - ۱)^۲} = (\sqrt{۲} - ۱)F$$



۶- گزینه‌ی (۳). فرض می‌کنیم نیروی $F_۱$ نیروی کوچکتر باشد، برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ را با روش ترسیمی مطابق شکل بدست می‌آوریم. برآیند دو نیرو برابر R و مطابق فرض مسأله نصف نیروی $F_۲$ است بنابراین داریم:

$$\cos\beta = \frac{R}{F_۲} = \frac{\frac{F_۲}{۲}}{F_۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \beta = ۶۰^\circ \Rightarrow c\hat{a}d = \beta + ۹۰^\circ = ۶۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۵۰^\circ$$

۷- گزینه‌ی (۳). در صورتی که زاویه امتداد L با سه محور $\theta_x = \theta_y = \theta_z = \alpha$ باشد با توجه به رابطه (۳-۱) داریم:

$$۳\cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بردار واحد (یکه) در امتداد L برابر است با:

$$\vec{\lambda} = (\cos\theta_x)i + \cos(\theta_y)j + (\cos\theta_z)k = \frac{\sqrt{۳}}{۳}i + \frac{\sqrt{۳}}{۳}j + \frac{\sqrt{۳}}{۳}k$$

تصویر برداری $\vec{F}$ بر امتداد L برابر است با حاصلضرب داخلی بردار $\vec{F}$ و $\vec{\lambda}$ (به متن درس مراجعه شود) بنابراین:

$$۲\sqrt{۳} = ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} + (b - ۱)\frac{\sqrt{۳}}{۳} + b \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow ۶ = ۳ + b - ۱ + b \Rightarrow b = ۲$$

۸- گزینه‌ی (۱). از آنجایی که برآیند دو نیرو در صفحه (x,y) واقع شده است مولفه آن روی محور z، $R_z=0$ است. مولفه برآیند روی محور x برابر $R_x=12\cos30=6\sqrt{3}\,kN$ و روی محور y برابر $R_y=12\sin30=6kN$ می‌باشد، بنابراین:

$$\vec{R}=R_x i+R_y j+R_z k=6\sqrt{3}\,i+6j \qquad (1)$$

از طرفی:

$$\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=(2a-2)i+3bj+(c+2)k \qquad (2)$$

از تساوی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$2a-2=6\sqrt{3}\Rightarrow a-1=3\sqrt{3}\Rightarrow a=3\sqrt{3}+1 \text{ و } 3b=6\Rightarrow b=2\;,\; c+2=0\Rightarrow c=-2$$

۹- گزینه‌ی (۴). با استفاده از رابطه (۴-۱) نیروی F_1 را بصورت برداری نمایش می‌دهیم.

$$\vec{F_1}=400\sin50^\circ\cos60^\circ i+400\cos50^\circ j+400\sin50\sin60^\circ k$$
$$=153/2i+257/12j+265/36k$$

نیروی F_2 در صفحه y-z قرار گرفته است بنابراین مولفه آن بر روی محور x صفر است، داریم:

$$\vec{F_2}=600\sin45^\circ j+600\cos45^\circ k=424/26j+424/26k$$

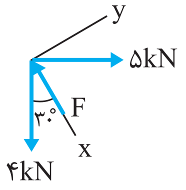
$$R=F_1+F_2=153/2i+681/38j+689/62k$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{(153/2)^2+(681/38)^2+(689/62)^2}=981/5\,N$$

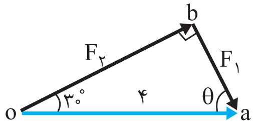
$$\cos\theta_y=\frac{R_y}{R}=\frac{681/38}{981/5}=0/694\Rightarrow\theta=46^\circ$$

۱۰- گزینه‌ی (۴). اگر محور x را در امتداد F و محور y را عمود بر آن فرض کنیم فقط مجموع مؤلفه نیروها بر روی محور x به F بستگی دارد. بنابراین برآیند نیرو هنگامی مینیمم می‌شود که مجموع نیروها روی محور x حداقل یعنی صفر باشد.

$$\sum F_x=0 \qquad 4\cos30+5\sin30-F=0\Rightarrow F=5/96kN$$



۱۱- گزینه‌ی (۱). برآیند دو نیروی F_1 و F_2 را از روش ترسیمی بدست می‌آوریم. اندازه و جهت برآیند دو نیرو معلوم است (oa). برای بدست آوردن برآیند دو نیرو باید از نقطه o برداری موازی F_2 رسم کنیم و از انتهای F_2 برداری موازی F_1 رسم شود به طوری که انتهای بردار F_1 در نقطه a قرار گیرد و طول F_1 حداقل باشد. بنابراین باید F_1 بر F_2 عمود گردد (کوتاهترین فاصله نقطه a از امتداد F_2 خط عمود می‌باشد). بنابراین زاویه F_1 با محور x،



$\theta=60^\circ$ بدست می‌آید. در مثلث oab داریم:

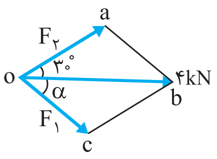
$$F_1=4\sin 30^\circ=2kN\ ,\qquad F_2=4\cos 30^\circ=2\sqrt{3}kN$$

روش دیگر: با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) و با توجه به شکل نشان داده شده، F_1 برابر است با،

$F_1=\dfrac{\sin 30}{\sin(\theta+30)}\times 4$: نیروی F_1 هنگامی می‌نیمم می‌شود که مخرج کسر حداکثر شود بنابراین:

$$\sin(\alpha+30)=1\Rightarrow \alpha+30=90\Rightarrow \alpha=60$$

F_1 و F_2 برابرند با (رابطه‌ی ۷-۱):



$$F_1=\frac{\sin 30}{\sin 90}\times 4=2kN$$

$$F_2=\frac{\sin 60}{\cos 90}\times 4=2\sqrt{3}\,kN$$

از آنجائی $\alpha=60$ می‌باشد می‌توان F_1 و F_2 را از مثلث قائم‌الزاویه oab بدست آورد.

۱۲- گزینه‌ی (۱). تصویر نیروی F در امتداد بردار $\vec{r}$ برابر است با حاصل‌ضرب داخلی بردار F در بردار واحد در امتداد $\vec{r}$. بنابراین ابتدا، نیروی F را به صورت برداری نمایش می‌دهیم. از آنجائی که مختصات انتهای نیروی F نسبت به محورهای مختصات x، y و z برابر می‌باشد با توجه به نکته (۲) داریم:

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}=\frac{100}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{100}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{100}{\sqrt{3}}\vec{k}=\frac{100}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

از طرفی بردار واحد در امتداد $\vec{r}$ برابر است با:

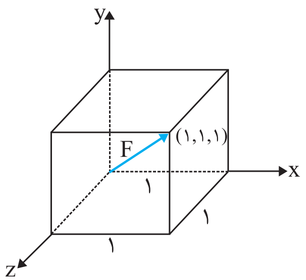
$$\vec{\lambda}=\frac{3}{\sqrt{26}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{26}}\vec{j}-\frac{4}{\sqrt{26}}\vec{k}\qquad \text{رابطه (1-14c)}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\lambda}=\frac{100}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}(3\vec{i}+1\vec{j}-4\vec{k})=\frac{100}{\sqrt{78}}(1\times3+1-1\times4)\cdot\frac{100}{\sqrt{78}}\times 0=0$$

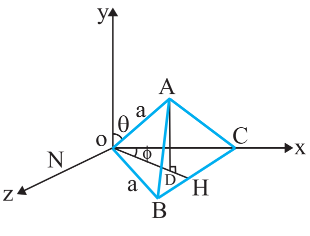
روش تستی: با توجه به نکته (۲) مولفه‌های بردار F بر روی سه محور برابر است اگر این مولفه را b فرض کنیم و اندازه بردار $\vec{r}$ را a فرض کنیم داریم:

$$\vec{F}\cdot\vec{\lambda}=b(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot\frac{1}{a}(3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=$$

$$\frac{b}{a}(1\times3+1\times1+1\times-4)=\frac{b}{a}\times 0=0$$



۱۳- گزینه‌ی (۴). برای به دست آوردن بردار یکه ابتدا OA را به صورت برداری نمایش می‌دهیم. از آنجائی که هرم منتظم می‌باشد عمود AD از مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع OBC می‌گذرد (هندسه)، داریم:



$$OH = a\sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \quad , \quad OD = \frac{۲}{۳}OH = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cos \widehat{AOD} = \sin\theta = \frac{OD}{OA} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos\theta = \sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

برای نشان دادن OA به صورت برداری از رابطه (۴-۱) استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه در این رابطه $F = OA = a$ و $\phi = ۳۰^\circ$ داریم. (در مثلث متساوی‌الاضلاع OBC، ارتفاع OH نیمساز زاویه O می‌باشد (هندسه)، بنابراین $\phi = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$)

$$OA = (a\sin\theta\cos\phi)\vec{i} + a\cos\theta\vec{j} + (a\sin\theta\sin\phi)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA} = a\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times(\cos ۳۰)\vec{i} + a\times\frac{\sqrt{۶}}{۳}j + a\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times(\sin ۳۰)\vec{k} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \frac{a}{۲}\vec{i} + \frac{\sqrt{۶}}{۳}a\vec{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۶}a\vec{k}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{۱}{۲}\vec{i} + \frac{\sqrt{۶}}{۳}\vec{j} + \frac{\sqrt{۳}}{۶}\vec{k}$$

توجه داشته باشید در گزینه‌های تست، بردار $\overrightarrow{OA}$ داده شده است که فراموش شده است به طول OA یعنی a تقسیم گردد.

روش تستی: اندازه‌ی بردار واحد برابر یک است. تنها گزینه‌ای که اندازه‌ی آن (پس از تقسیم بر a) برابر یک است، گزینه ۴ می‌باشد. اندازه‌ی بردار واحد در بقیه‌ی گزینه‌ها مخالف یک می‌باشد. برای گزینه ۴ اندازه‌ی بردار واحد برابر است با:

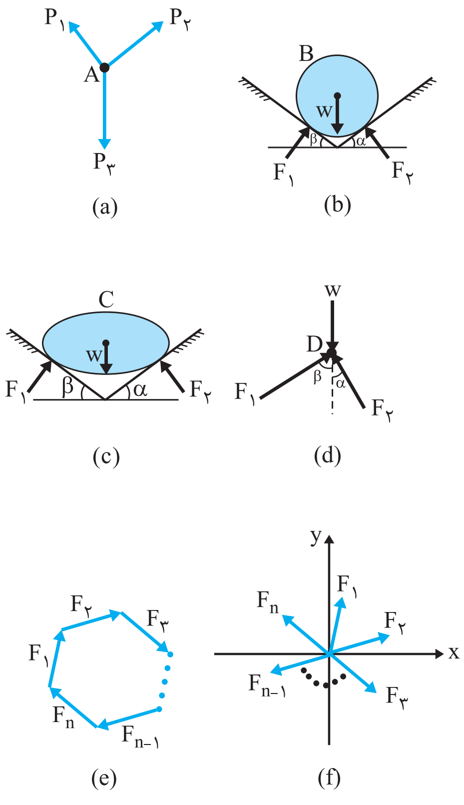
$$|\vec{\lambda}| = \left[(\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۶}}{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۶})^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۱۲}} = ۱$$

اندازه‌ی بردار واحد در گزینه ۱و۳ برابر $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و در گزینه ۲ برابر $\frac{\sqrt{۳۹}}{۶}$ می‌باشد که همگی از یک بزرگ‌تر می‌باشند. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

فصل ۲ تعادل نقطه مادی

*** نقطه مادی:** جسم کوچکی که اندازه ابعاد آن قابل صرف‌نظر کردن باشد را نقطه مادی می‌نامند و آن را به صورت یک نقطه هندسی نمایش می‌دهند. در مکانیک برای بررسی تعادل اجسام، جسم کوچک یا بزرگ را می‌توان به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت به شرط آنکه نیروهای مجهول، که غالباً دو نیرو می‌باشند، به شکل جسم بستگی نداشته باشد.

شکل (a) نقطه مادی A را نشان می‌دهد که تحت نیروهای $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ قرار گرفته است. در شکل‌های (b) و (c) راستای عکس‌العمل سطوح شیب‌دار بستگی به شکل و یا اندازه اجسام B و C ندارد. برای بدست آوردن نیروی عکس‌العمل سطوح شیب‌دار می‌توان این دو جسم را به صورت نقطه مادی D در شکل (d) در نظر گرفت.



معادلات تعادل برای یک نقطه مادی: نقطه مادی A که تحت نیروهای $F_۱, F_۲, ..., F_n$ قرار گرفته است را در نظر می‌گیریم (شکل a). برای آنکه این نقطه در تعادل باشد باید برآیند نیروهای $F_۱, F_۲, ..., F_n$ برابر صفر گردد.

در صورتی که بخواهیم برآیند نیروها را از روش ترسیمی بدست آوریم، باید چند ضلعی که از اتصال نیروها حاصل می‌شود بسته باشد. بدین معنی که ابتدای اولین نیروئی که رسم می‌شود $(F_۱)$ به انتهای آخرین نیرویی که رسم می‌شود (F_n)، منطبق گردد (شکل e). در روش تحلیلی در حالت دو بعدی با توجه به رابطه (۹-۱) مجموع مولفه‌های نیروهائی که به نقطه‌ی مادی وارد می‌شود، بر دو محور متعامد، باید صفر گردد، بنابراین:

$$\sum F_x = ۰ \quad , \quad \sum F_y = ۰ \qquad (۱-۲)$$

در حالت سه بعدی با توجه به رابطه (۱۰a-۱) نتیجه می‌شود که مجموع مولفه‌های نیروها بر سه محور

* فراوانی سؤالات آزمون سراسری از این فصل حدود ده درصد بوده است.

متعامد (x,y,z) باید صفر گردد.

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۲)$$

پیکر آزاد: برای کلیه مسائل تعادل باید ابتدا پیکر آزاد نقطه مادی (یا جسمی که آن را بصورت نقطه مادی در نظر می‌گیریم) رسم گردد. برای رسم پیکر آزاد به ترتیب مراحل زیر عمل می‌کنیم:

۱- ابتدا نقطه مادی را بصورت تنها در نظر می‌گیریم؛ بدین معنی که آن را از کلیه اعضایی که به آن متصل شده است جدا می‌کنیم. نقطه مادی ممکن است بصورت یک نقطه هندسی یا یک جسم و یا قسمتی از یک جسم در نظر گرفته شود (به تعریف نقطه مادی مراجعه شود).

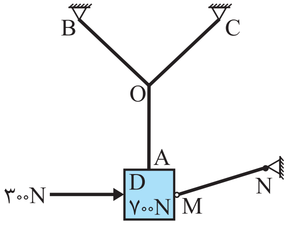
۲- کلیه نیروهایی که به نقطه مادی اعمال می‌شوند را مشخص می‌کنیم. این نیروها شامل نیروهایی هستند که یا مستقیما به نقطه‌ی مادی اعمال می‌شوند و یا نیروهایی هستند که از طرف اعضاء متصل، در نقطهٔ اتصالشان به نقطه مادی، به آن اعمال می‌گردند.

۳- از نیروهایی که به نقطه مادی وارد می‌شوند، آن دسته از نیروهایی که معلوم می‌باشند را به صورت بردار با جهت و مقدارشان به نقطه مادی اعمال می‌کنیم. در صورتی که یک نیرو امتدادش مشخص باشد ولی مقدار آن مجهول باشد، آن را بصورت یک بردار در آن امتداد نشان می‌دهیم که جهت بردار را می‌توان بطور دلخواه انتخاب کرد. (از نقطه مادی دور شود یا به آن نزدیک شود).

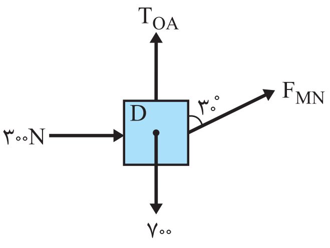
نکته ۳

در صورتی که با بکارگیری معادلات تعادل نیروی مجهولی محاسبه گردد و علامت آن نیرو منفی باشد این بدان معنی است که جهت انتخاب شده برای نیرو باید برعکس شود. لازم به ذکر است که در رسم پیکر آزاد، نیروی کابل، طناب و سیم باید کششی در نظر گرفته شود.

به عنوان مثال در شکل (e) برای رسم پیکر آزاد بلوک D مطابق آنچه که ذکر شد، در مرحله اول بلوک را از شکل مجزا کرده و به صورت تنها در نظر می‌گیریم. در مرحله دوم نیروهایی که به آن اعمال می‌شود را مشخص می‌کنیم. این نیروها عبارت‌اند از وزن بلوک، نیروی افقی ۳۰۰ نیوتنی، نیروی کابل AO و نیروی میله MN. در مرحله سوم این نیروها را بر روی بلوک نمایش می‌دهیم (شکل f). نیروهای معلوم ۳۰۰ N و ۷۰۰ N (وزن بلوک) را با جهت و مقدار معلوم بر روی بلوک رسم می‌کنیم. امتداد نیروی F_{MN} معلوم است ولی مقدار و جهت آن مشخص نمی‌باشد. میله MN می‌تواند نیروی فشاری یا کششی تحمل نماید، بنابراین جهت نیروی F_{MN} هم می‌تواند از M به N (کششی) و هم از N به M (فشاری) باشد که در اینجا به دلخواه جهت آن را از M به N در نظر می‌گیریم. کابل OA فقط نیروی کششی تحمل می‌کند، بنابراین جهت آن معلوم است و همانطور که در شکل نشان داده شده است از A به O می‌باشد، ولی مقدار نیروی آن، T_{OA}، نامعلوم است.

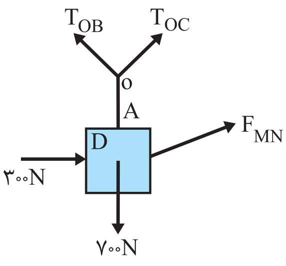


(e)



(f)

همانطور که قبلا ذکر شــد می‌توان بسته به نیاز مساله پیکر آزاد هر قســمتی از شکل را رســم نمود. برای مثال، بلوک D و کابل OA را یک پیکر در نظر می‌گیریم و نیروهائی که به این پیکر وارد می‌شوند را رســم می‌کنیم. بــرای این کار در مرحله اول بلــوک و کابل را از بقیه شــکل جدا می‌کنیم. در مرحله دوم نیروهایی که به آن اعمال می‌شــوند را مشخص می‌کنیم. این نیروها عبارتند از نیروی افقی N ۳۰۰ و نیــروی وزن N ۷۰۰، نیروی میلــه MN و نیروی کابل‌های OB و OC (T_{OB} ، T_{OC}) که در نقطه O به پیکر وارد می‌شــوند.

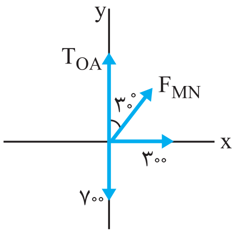


(g)

در مرحلــه ســوم این نیروها را مطابق شــکل (g) بر روی پیکر آزاد که شــامل بلــوک D و کابل OA می‌باشــد نمایش می‌دهیم. در مکانیک جامدات از جمله دروس استاتیک، مقاومت مصالح و دینامیک رســم پیکر آزاد (Free Body diagram) بســیار مهم است. شــاید بتوان گفت با رسم پیکر آزاد بیش از نیمی از مســاله حل شــده اســت. توجه داشته باشــید در مسائل اســتاتیک برای رسم پیکر آزاد نیروهای کالبدی مانند وزن و نیروهای مغناطیســی باید در نظر گرفته شوند و به پیکر اعمال گردند.

محاسبه نیروهای مجهول: پس از رسم پیکر آزاد با نوشتن معادلات تعادل، نیروهای مجهول محاسبه می‌گردد. برای نوشتن معادلات تعادل، مجموع مولفه‌های نیروهایی که به پیکر آزاد وارد شده است را روی دو محور عمود بر هم بدست آورده و برابر صفر قرار می‌دهیم یا به عبارت دیگر اگر دو محور متعامد x و y انتخاب شود برای تعادل نقطه مادی باید $\sum F_x = ۰$ و $\sum F_y = ۰$ باشد. (به تعادل نقطه مادی مراجعه شود)

با توجه به اینکه در حالت دو بعدی دو معادله تعادل برای نقطه مادی می‌توان نوشت، بنابراین تعداد مجهولات پیکر آزاد نباید از دو مجهول بیشتر باشد. برای مثال در شکل f برای محاسبه نیروهای F_{MN} و T_{OA} باید ابتدا مولفه نیروهایی که به بلوک D وارد می‌شود را روی دو محور عمود بر هم x و y بدست آوریم. این دو محور را می‌توان روی پیکر آزاد یا جدا از آن انتخاب نمود. در این مثال دو محور را جدا از پیکر انتخاب می‌کنیم و نیروهای پیکر را مطابق شکل ($h_۱$) روی محورهای x و y پیاده می‌کنیم. با بکارگیری معادلات تعادل داریم:

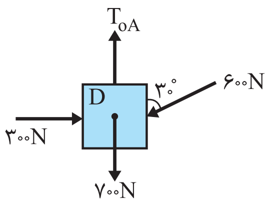


($h_۱$)

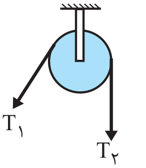
(f) شکل : $\sum F_x = ۰ \quad , \quad ۳۰۰ + F_{MN} \sin ۳۰^\circ = ۰ \Rightarrow F_{MN} = -۶۰۰\,N$

($h_۲$) شکل : $\sum F_y = ۰ \quad , \quad T_{OA} - ۶۰۰ \cos ۳۰ - ۷۰۰ = ۰ \Rightarrow T_{OA} = ۱۲۱۹/۶\,N$

علامــت منفی برای نیروی F_{MN}، نشــان می‌دهد جهتی که برای نیروی F_{MN} در پیکر آزاد شــکل (f) فرض شــده بود (کششی)، صحیح نمی‌باشد و باید برعکس شود که شکل صحیح آن در شکل ($h_۲$) نشــان داده شده است. یا به عبارت دیگر، نیرو در میله MN برابر ۶۰۰N و فشاری می‌باشد.

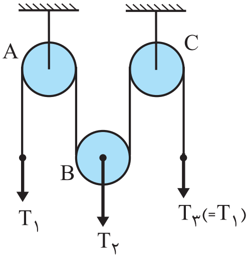


($h_۲$)



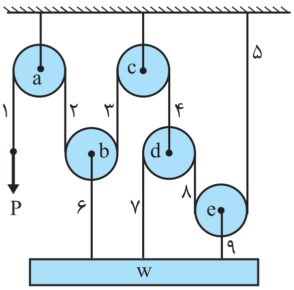
(i)

قرقره‌ها: قرقره‌ها وسیله‌ای هستند که برای تغییر جهت حرکت در کابل‌ها، تسمه‌ها و یا طناب‌ها در یک سیستم مکانیکی بکار گرفته می‌شوند. در صورتی که اصطکاک بین کابل و قرقره صفر باشد کشش کابل در دو طرف قرقره با یکدیگر برابر است. $(T_1 = T_2)$ شکل (i) قرقره‌هایی که در مرکز به یک عضو ثابت، متصل شده باشند و حرکتی نداشته باشند قرقره ثابت نامیده می‌شوند، مانند قرقره‌های A و C در شکل (j). در صورتی که مرکز قرقره ثابت نباشد و جابجا شود قرقره متحرک نامیده می‌شود، مانند قرقره B. اگر کابلی از قرقره‌های بدون اصطکاک متعدی عبور کرده باشد، کشش در کلیه نقاط آن ثابت است. برای مثال در شکل (j) کشش در سمت چپ و راست قرقره‌های A, B و C مساوی و برابر T_1 می‌باشد.



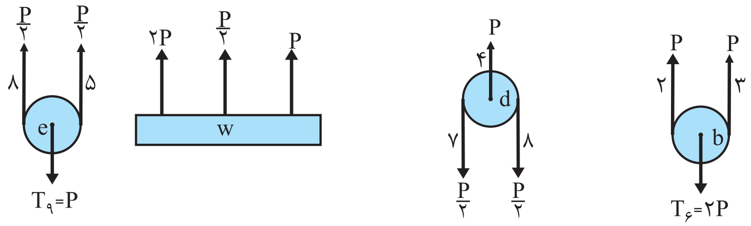
(j)

سیستم متشکل از کابلها و قرقره‌ها عموماً برای جابجایی یا تعادل نیروی بزرگ در یک طرف با اعمال نیروی کوچکتر در طرف دیگر بکار می‌رود. برای آنالیز سیستم قرقره و کابلها با معلوم بودن نیرو در یکی از کابلها، با در نظر گرفتن تعادل قرقره‌ها، نیرو در کابلهای دیگر محاسبه می‌گردد.



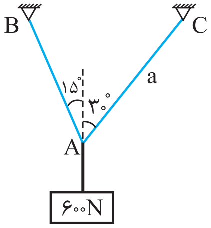
(k)

برای مثال در شکل (k) نیرو در کابل ۱ که به انتهای آن نیروی P متصل شده است برابر P می‌باشد. این کابل از روی قرقرهای a و b و c عبور کرده است و انتهای آن به مرکز قرقره d متصل شده است. بنابراین نیرو در قسمت‌های ۲ و ۳ و ۴ برابر P می‌باشد $(T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = P)$. با در نظر گرفتن تعادل قرقره b نتیجه می‌شود $T_6 = 2P$ نیرو در کابل ۴ برابر P است. کشش در قسمت‌های ۷، ۸ و ۵ که مربوط به یک کابل می‌باشند برابر است. با در نظر گرفتن تعادل قرقره d نتیجه می‌شود $T_7 = T_8 = T_5 = \frac{P}{2}$. حال با در نظر گرفتن تعادل قرقره e نتیجه می‌شود $T_9 = P$. نهایتاً با در نظر گرفتن تعادل وزنه w نتیجه می‌شود $2P + \frac{P}{2} + P = w \Rightarrow P = \frac{2}{7}w$ ملاحظه می‌شود می‌توان با اعمال نیروی P وزنه‌ای به وزن $w = 3/5P$ را در حالت تعادل نگاه داشت.



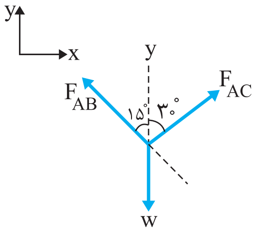
در مسائل مربوط به قرقره می‌توان به سادگی نیرو در هر کابل را از روی شکل مساله تعیین کرد و نیازی به رسم پیکر آزاد قرقره‌ها نمی‌باشد (به مثال‌ها و تست‌های مربوط به قرقره‌ها مراجعه شود).

- مثال‌های حل شده -



مثال ۱ در شکل نشان داده شده وزنه ۶۰۰ N توسط دو کابل AB و AC تحمل می‌شود نیرو در کابل‌ها را بدست آورید. (این مثال مهم می‌باشد)

– پیکر آزاد نقطه A را رسم می‌کنیم سپس با استفاده از معادلات تعادل، نیرو در کابلها را بدست می‌آوریم.



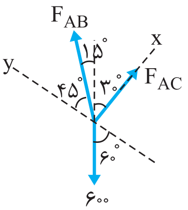
$$\sum F_x = ۰ \qquad -F_{AB}\sin ۱۵^\circ + F_{AC}\sin ۳۰^\circ = ۰ \qquad (۱)$$

$$\sum F_y = ۰ \qquad F_{AB}\cos ۱۵^\circ + F_{AC}\cos ۳۰^\circ - ۶۰۰ = ۰ \qquad (۲)$$

از حل همزمان معادلات ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$F_{AC} = ۲۱۹/۶\,N \ , \ F_{AB} = ۴۲۴/۳\,N$$

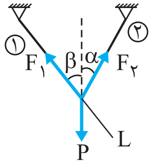
همانطور که در متن درس توضیح داده شد معادلات تعادل نیروها را روی دو محور عمود بر هم بدست می‌آوریم که الزاما این دو محور نباید افقی و قائم باشد. به منظور کاهش در محاسبات و زمان حل مساله، محور x را روی کابل AC و محور y را عمود بر آن انتخاب می‌کنیم. با نوشتن معادله تعادل روی محور y، F_{AB} مستقیما با یک معادله بدست می‌آید. زاویه نیروی ۶۰۰N با محور x، ۳۰° و زاویه F_{AB} با محور x، ۴۵° می‌باشد، بنابراین:



$$\sum F_y = ۰ \ , \ F_{AB}\sin ۴۵ - ۶۰۰\sin ۳۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = \frac{\sin ۳۰}{\sin ۴۵} \times ۶۰۰ = ۴۲۴/۳\,N$$

به همین ترتیب می‌توان برای محاسبه F_{AC} عمل نمود. البته با روش ترسیمی و قانون سینوس‌ها می‌توان نیرو در کابل AC و AB را به سادگی محاسبه نمود. با توجه به توضیح‌های داده شده نکته زیر نتیجه می‌شود.

نکته ۴



(d)

در شکل (d) نیروی P به دو میله ۱ و ۲ متصل شده است و در حالت تعادل می‌باشد. نیرو در میله ۱ برابر است با سینوس زاویه‌ی نیروی P با میله‌ی ۲، تقسیم بر سینوس زاویه بین میله‌ی ۱ و ۲، ضرب در نیروی P و بالعکس، بنابراین:

$$F_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}P \quad , \quad F_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}P$$

منظور از بالعکس در نکته‌ی (۴) این است که برای بدست آوردن نیرو در میله‌ی ۲، سینوس زوایه‌ی بین نیروی P و نیروی ۱ را در صورت کسر قرار می‌دهیم. برای تعیین علامت نیرو در میله ۲، میله ۱ را ادامه می‌دهیم اگر نیروی ۲ و نیروی P در دو طرف میله ۱ واقع شوند نیروی در میله‌ی ۲ مثبت (کششی) است. اگر در یک طرف میله ۱ واقع شوند نیروی میله‌ی ۲ منفی (فشاری) می‌باشد.

لازم به ذکر است برای تعیین علامت نیروهای مجهول ($F_۱$ و $F_۲$) هنگام رسم نیروها باید ابتدای همه نیروها ($F_۱$، $F_۲$ و P) در یک نقطه قرار داشته باشند.

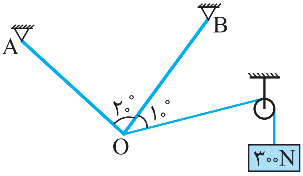
در مثال ۱ برای محاسبه نیرو در کابل AC سینوس زاویه نیروی ۶۰۰ N با میله AB یعنی $\sin ۱۵^\circ$ را بر سینوس زاویه بین AB و AC یعنی $\sin ۴۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم و حاصل را در ۶۰۰ ضرب می‌کنیم، بنابراین:

$$F_{AC} = \frac{\sin ۱۵}{\sin ۴۵} \times ۶۰۰ = ۲۱۹/۶N$$

توجه داشته باشیم برای محاسبه نیرو در هر میله سینوس زاویه نیروی P (نیروی اعمال شده) با میله دیگر را در صورت کسر قرار می‌دهیم. در مخرج کسر سینوس زاویه بین دو نیروی میله قرار می‌گیرد و حاصل کسر در نیروی P (نیروی اعمال شده) ضرب می‌گردد.

برای به دست آوردن علامت نیروی در میله‌ها مثلاً میله ۲، میله یک را ادامه می‌دهیم ملاحظه می‌شود نیروی کابل ۲ و نیروی P در دو طرف خط L قرار دارند بنابراین علامت نیرو در میله‌ی ۲ مثبت (کششی) می‌باشد.

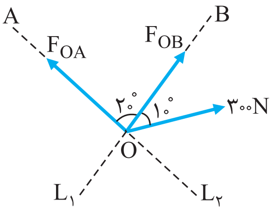
مثال ۲ در شکل نشان داده شده انتهای دو میله OA و OB توسط کابل به نیروی ۳۰۰ N متصل شده است. نیرو در میله‌ها را بدست آورید.



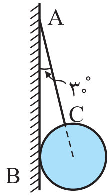
– نیرویی که توسط کابل به نقطه O اعمال می‌شود برابر ۳۰۰ N است با استفاده از نکته (۴) داریم:

$$F_{OB} = \frac{\sin ۳۰}{\sin ۲۰} \times ۳۰۰ = ۴۳۸/۶N \text{ (فشاری)}، \quad F_{OA} = \frac{\sin ۱۰}{\sin ۲۰} \times ۳۰۰ = ۱۵۲/۳ \text{ (کششی)}$$

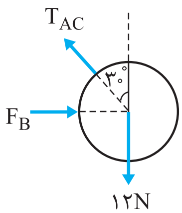
برای تعیین علامت نیرو در میله OB(F_{OB})، بنابر نکته (۴) میله دیگر یعنی OA را ادامه می‌دهیم. ملاحظه می‌شود F_{OB} و نیروی ۳۰۰N در یک طرف $L_۲$ واقع می‌شوند. بنابراین نیرو در OB منفی (فشاری) است. برای تعیین علامت نیرو در میله OA(F_{OA}) میله دیگر یعنی OB را ادامه می‌دهیم ملاحظه می‌شود F_{OA} و نیروی ۳۰۰N در دو طرف خط $L_۱$ قرار می‌گیرند. بنابراین علامت آن مثبت (کششی) می‌باشد.



مثال ۳ در شکل نشان داده شده کره کوچکی به وزن ۱۲ نیوتن توسط طناب به دیوار تکیه داده شده است. نیروی عکس‌العمل دیوار را بدست آورید.



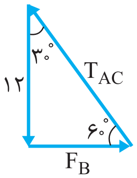
– همان‌طور که ملاحظه می‌شود زاویه نیروی ۱۲N (وزن کره) با نیروی دیگر یعنی T_{AC} برابر ۱۵۰° است. زاویهٔ بین دو نیروی دیگر یعنی F_B و T_{AC} برابر ۶۰° می‌باشد، بنابراین با استفاده از



نکته (۴) مقدار نیروی F_B برابر است با:

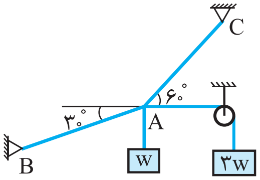
$$F_B=\frac{\sin ۱۵۰^\circ}{\sin ۶۰^\circ}\times ۱۲=۴\sqrt{۳}\ N$$

با توجه به اینکه $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ بهتر است زاویه حاده بین راستای دو نیرو در محاسبات به کار گرفته شود. بنابراین می‌توان برای محاسبه F_B به جای $\sin ۱۵۰^\circ$ سینوس زاویه ۳۰° $(\sin ۳۰)$ را جایگزین نمود.



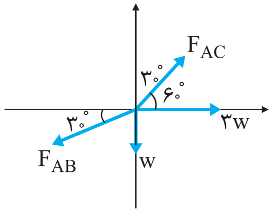
در مسائل تعادل که شامل سه نیرو باشد، در صورتی که دو تا از نیروها بر هم عمود باشند، برای محاسبه نیروی مجهول، پیشنهاد می‌شود از روش ترسیمی استفاده شود. با بکارگیری این روش داریم:

$$F_B=۱۲\tan ۳۰=۴\sqrt{۳}\ N$$



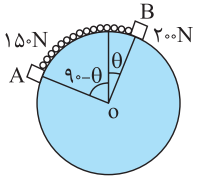
مثال ۴ در شکل نشان داده شده نیرو در میله AB را بدست آورید.

– زاویه بین نیرو F_{AB} و F_{AC} ۱۵۰° است. با استفاده از نکته (۴) نیروی F_{AB} را بر اثر نیروهای w و ۳w بدست آورده با هم جمع می‌کنیم. در محاسبه نیروی F_{AB} به علامت آن دقت شود.



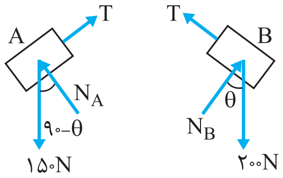
نکته(۴)
$$F_{AB}=\frac{\sin ۳۰}{\sin ۱۵۰}w+\frac{\sin ۶۰}{\sin ۱۵۰}(۳w)=w+۳\sqrt{۳}w=۶/۲w$$

می‌توان به جای زاویه ۱۵۰° در مخرج کسرها، مکمل آن یعنی زاویه ۳۰° را قرار داد.



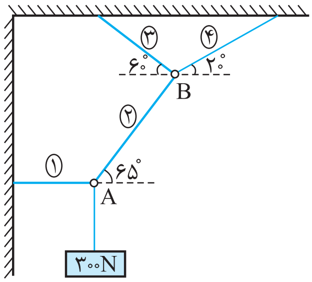
مثال ۵ دو وزنه A و B توسط طناب به یکدیگر متصل شده و روی استوانه بدون اصطکاکی مطابق شکل قرار گرفته‌اند. از وزن طناب صرف‌نظر شود. در وضعیت تعادل، زاویه‌ی θ (زاویه بین OB با خط قائم) و کشش طناب را بدست آورید. OA و OB بر هم عمودند.

– با در نظر گرفتن تعادل وزنه‌های A و B نیروی کشش طناب(T) را بدست آورده و با هم مساوی قرار می‌دهیم. با استفاده از نکته (۴) داریم: (زاویه بین N_A و N_B ۹۰° می‌باشد.)



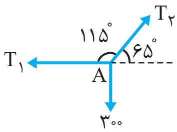
$$T=\underbrace{\frac{\sin\theta}{\sin ۹۰}\times ۲۰۰}_{\text{تعادل B نکته (۴)}}=\underbrace{\frac{\sin(۹۰-\theta)}{\sin ۹۰}\times ۱۵۰}_{\text{تعادل A نکته (۴)}}$$

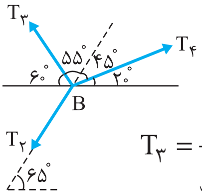
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \theta=۳۶/۹^\circ \Rightarrow T=\frac{\sin ۳۶/۹}{\sin ۹۰}\times ۲۰۰=۱۲۰N$$



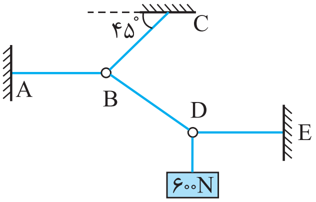
مثال ۶ وزنه N ۳۰۰ نیوتن توسط دو حلقه کوچک A و B و کابل‌ها در حالت تعادل قرار گرفته است. نیرو در کابل ۳ را محاسبه نمایید.

– ابتدا با در نظر گرفتن تعادل حلقه A نیروی کابل $T_۲$ را بدست می‌آوریم. سپس با معلوم بودن $T_۲$ از روی تعادل حلقه B، نیروی $T_۳$ را محاسبه می‌کنیم. (زاویه بین $T_۳$ و $T_۴$، ۱۰۰° می‌باشد) با استفاده از نکته (۴) داریم:





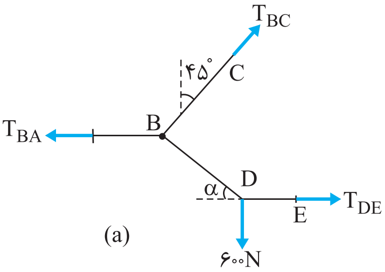
$$T_۳=\underbrace{\frac{\sin ۴۵}{\sin ۱۰۰}T_۲}_{\text{از تعادل حلقه B } T_۳}=\frac{\sin ۴۵}{\sin ۱۰۰}\underbrace{(\frac{\sin ۹۰}{\sin ۱۱۵}\times ۳۰۰)}_{\text{از تعادل حلقه A } T_۲}=۲۳۷/۶۷\,N$$



مثال ۷ در شکل روبرو نیروی کششی کابل BC را بدست آورید.

– پیکر آزاد کل شکل را در نظر می‌گیریم (شکل a).
از نوشتن معادله تعادل در جهت y داریم:

$$\sum F_y=۰\Rightarrow T_{BC}\cos ۴۵-۶۰۰=۰\Rightarrow T_{BC}=۶۰۰\sqrt{۲}\,N$$



(a)

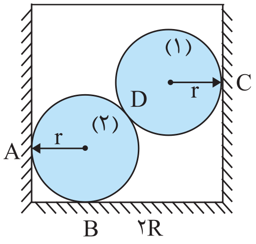
می‌توان از نکته ۴ نیز استفاده نمود در اینجا لازم است زاویه بین DB و DE را α فرض کنیم. سپس با روشی که در مثال ۶ توضیح داده شد می‌توان مساله را حل نمود. توجه داشته باشید زاویه α حذف خواهد شد.
برای این مثال خاص که دو نیروی T_{DE} و T_{BA} با هم موازی هستند روش اول پیشنهاد می‌شود، برای حل اینگونه مسائل می‌توان از نکته زیر استفاده نمود.

نکته ۴a

اگر به پیکر آزاد جسمی n نیروی مجهول وارد شود که از این n نیرو $n-۱$ نیرو موازی باشند، نیروی n ام قابل محاسبه می‌باشد. برای محاسبه نیروی n ام معادله‌ی تعادل کلیه نیروها (شامل نیروهای معلوم و مجهول) را در راستای عمود بر نیروهای موازی می‌نویسیم. بدین‌ترتیب نیروی n ام بدست می‌آید. با آنکه کلیه نیروهای وارده به پیکر را روی دو محور عمود بر هم پیاده می‌کنیم سپس با استفاده از نکته (۴) نیروی n ام را بدست می‌آوریم. (مثال‌های ۸ و ۹)

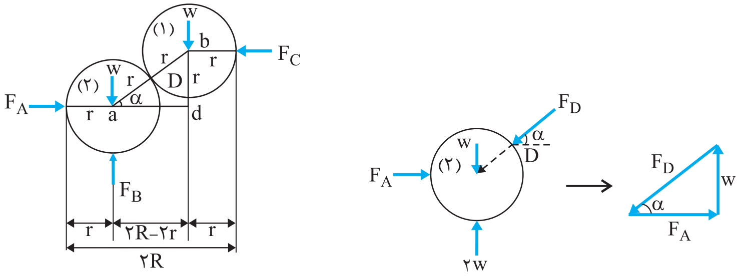
در مثال ۷ به پیکر آزاد سه نیروی مجهول T_{BC}، T_{DE} و T_{BA} وارد می‌شود $(n=۳)$ که از این سه نیرو، دو نیروی آن $(T_{BA}\ ,\ T_{DE})$ با هم موازیند. $(n-۱=۳-۱=۲)$ بنابراین نیروی سوم یعنی T_{BC} قابل محاسبه می‌باشد. با نوشتن معادله تعادل در جهت عمود بر دو نیروی موازی $T_{BC}\left(\sum F_y=۰\right)$ به سادگی محاسبه گردید. (به مثال ۸ و ۹ نیز مراجعه شود)

مثال ۸ دو کره یکسان به وزن w و شعاع r مطابق شکل، داخل استوانه‌ای به شعاع R قرار داده شده است. نیروی عکس‌العمل دیوار قائم با استوانه (۲) را بدست آورید. از اصطکاک صرفنظر شود.



– ابتدا دو کره را مجموعاً یک پیکر در نظر می‌گیریم (شکل a). به این پیکر سه نیروی مجهول F_A، F_B و F_C وارد شده است که از این سه نیرو دو نیروی F_A و F_C موازیند.

بنابراین با استفاده از نکته‌ی (۴a) معادله تعادل نیروهائی که به پیکر وارد می‌شود را در جهت عمود بر دو نیروی مجهول (جهت y) می‌نویسیم تا نیروی سوم (F_B) محاسبه گردد. داریم:



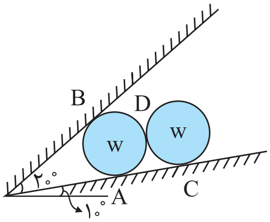
(a) (b) (c)

$$\text{(a) شکل}:\uparrow\sum F_y=۰\qquad F_B-w-w=۰\Rightarrow F_B=\ w$$

$$\text{(هندسه)}:bd^۲=ab^۲-ad^۲=(۲r)^۲-(۲R-۲r)^۲\Rightarrow bd=۲\sqrt{۲Rr-R^۲}$$

$$\text{(b) مثلث تعادل نیروهای شکل (c)، شکل}:F_A=w\cot g\,\alpha=w\frac{ad}{bd}\Rightarrow F_A=\frac{R-r}{\sqrt{۲Rr-R^۲}}w$$

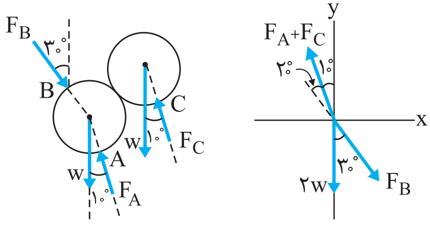
مثال ۹ در شکل نشان داده شده عکس‌العمل در B را بدست آورید. از اصطکاک صرفنظر شود.



– برای بدست آوردن F_B دو گلوله را به صورت یک پیکر در نظر می‌گیریم و پیکر آزاد آن را رسم می‌کنیم (شکل a). به این پیکر سه نیروی مجهول F_A، F_B و F_C وارد می‌شود. از این سه نیرو دو نیروی F_A و F_C موازیند. بنابراین با استفاده از نکته‌ی (۴a) نیروی سوم یعنی F_B را بدست می‌آوریم. همان‌طور که در نکته‌ی (۴a) توضیح داده شد ابتدا کلیه‌ی نیروهای پیکر را روی دو محور

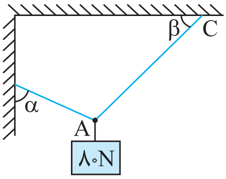
عمود بر هم x و y پیاده می‌کنیم (شکل b). سپس نیروی F_B را با استفاده از نکته (۴) بدست می‌آوریم. زاویه بین دو نیروی مجهول F_B و F_A+F_C برابر ۱۶۰° (یا ۲۰°) است.

$$\text{(b) شکل}: F_B=\frac{\sin ۱۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}(۲W)\Rightarrow F_B=۱/۰۲w$$

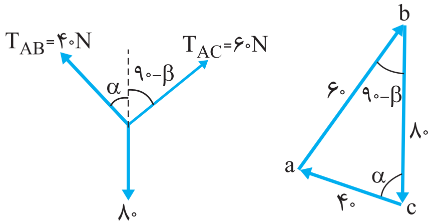


(a) (b)

مثال ۱۰ در شکل نشان داده شده نیروی کششی در $T_{AB}=۴۰N$ و $T_{AC}=۶۰N$ می‌باشد. زوایای α و β را محاسبه نمایید.



– در این مثال به نقطه A سه نیرو وارد می‌شود که اندازه هر سه نیرو معلوم است ولی زوایای بین نیروها معلوم نمی‌باشد. پیشنهاد می‌شود در مسائلی نظیر این مساله که زوایا مجهول هستند از روش ترسیمی استفاده شود. با توجه به تعادل نقطه A و قانون کسینوس‌ها در مثلث داریم:

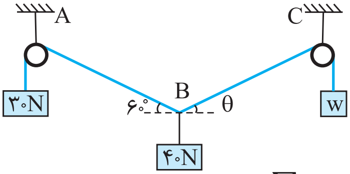


(a) (b)

$$\text{(b) شکل}: ۶۰^۲=۴۰^۲+۸۰^۲-۲\times۴۰\times۸۰\times\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=۰/۶۸۷\Rightarrow\alpha=۴۶/۶^\circ$$

$$\text{قانون سینوس‌های abc مثلث}: \frac{۶۰}{\sin\alpha}=\frac{۴۰}{\sin(۹۰-\beta)}\Rightarrow\frac{۶۰}{\sin ۴۶/۶}=\frac{۴۰}{\cos\beta}\Rightarrow\cos\beta=۰/۴۸۴\Rightarrow\beta=۶۱^\circ$$

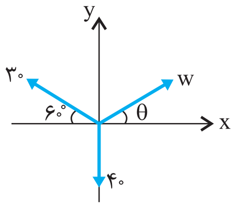
مثال ۱۱ شکل نشان داده شده در حال تعادل می‌باشد. زاویه θ و اندازه نیروی W را بدست آورید.



– تعادل نقطه B را در نظر می‌گیریم.

$$\sum F_x=۰\quad W\cos\theta-۳۰\cos ۶۰^\circ=۰\Rightarrow W\cos\theta=۱۵\qquad(۱)$$

$$\sum F\;=۰\quad ۳۰\sin ۶۰+W\sin\theta-۴۰=۰\Rightarrow W\sin\theta=۱۴\qquad(۲)$$



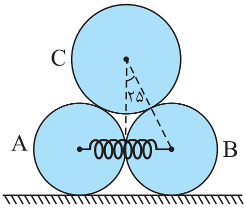
$$\frac{(۲)}{(۱)}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱۴}{۱۵}=۰/۹۳۴\Rightarrow\theta=۴۳^\circ\qquad W=\frac{۱۴}{\sin ۴۳}=۲۰/۵۲N$$

با توجه به مثال‌های فوق نکته زیر می‌تواند در کوتاه کردن زمان حل مسائل مفید باشد.

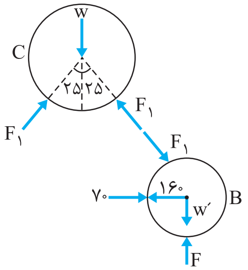
نکته ۵

سه نیروی متقارب (همرس) را در نظر بگیرید که در حال تعادل باشند. اگر اندازه یکی از نیروها و زوایای بین نیروها معلوم باشد برای بدست آوردن اندازه دو نیروی دیگر از نکته (۴) استفاده شود (مثال ۲). در صورتی که اندازه‌ی سه نیرو معلوم باشند، برای تعیین زوایا، روش ترسیمی بکار گرفته شود (مثال ۱۰). در حالتی که اندازه و زاویه‌ی دو نیرو معلوم باشد، برای به دست آوردن اندازه و زاویه نیروی سوم، معادلات تعادل $\sum F_x = ۰$ و $\sum F_y = ۰$ در نظر گرفته شود (مثال ۱۱).

مثال ۱۲ دو استوانه یکسان توسط فنر مطابق شکل به یکدیگر متصل شده‌اند. نیرو در فنر قبل از قرار دادن استوانه C برابر ۱۶۰N می‌باشد. استوانه C را روی دو استوانه قرار می‌دهیم. وزن استوانه‌ی C چقدر باشد به طوری که نیروی فشاری در محل اتصال دو استوانه‌ی A و B برابر ۷۰N گردد؟



– در صورتی که وزن استوانه‌های A و B برابر W' و وزن استوانه C برابر W باشد داریم:



استوانه C: $\sum F_y = ۰ \quad ۲F_۱ \cos ۲۵^\circ - W = ۰ \Rightarrow F_۱ = \dfrac{W}{۲\cos ۲۵^\circ}$

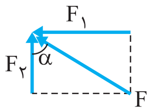
استوانه B: $\sum F_x = ۰ \quad , \quad \dfrac{W}{۲\cos ۲۵^\circ} \sin ۲۵^\circ + ۷۰ - ۱۶۰ = ۰$

$\Rightarrow W = \dfrac{۱۸۰}{\tan ۲۵} = ۳۸۶\,N$

توجه داشته باشید قبل از قرار دادن استوانه‌ی C ، با در نظر گرفتن پیکر آزاد استوانه‌ی A یا B بسادگی نتیجه می‌شود نیروی فشاری بین دو استوانه‌ی A و B برابر نیروی فنر یعنی ۱۶۰ N می‌باشد، پس از قرار دادن استوانه‌ی C نیرو بین دو استوانه‌ی A و B از ۱۶۰ N به ۷۰ N کاهش می‌یابد، ولی نیرو در فنر تغییر نمی‌کند. نیرو در فنر طبق رابطه‌ی $F = K\delta$ هنگامی تغییر می‌کند که طول آن تغییر کند. پس از قرار دادن استوانه‌ی C، هنوز بین استوانه‌ی A و B نیروی فشاری وجود دارد و بهم چسبیده‌اند. بنابراین مراکز آنها جابجا نمی‌شود، در نتیجه طول فنر یا به عبارت دیگر نیرو در فنر تغییر نمی‌کند و به همان اندازه‌ی ۱۶۰N ثابت باقی می‌ماند.

نکته ۶

در صورتی که نیروی F به دو مولفه عمود بر هم $F_۱$ و $F_۲$ تجزیه شود. نیروی $F_۱$ برابر است با نیروی $F_۲$ در تانژانت زاویه بین $F_۲$ و F و بالعکس



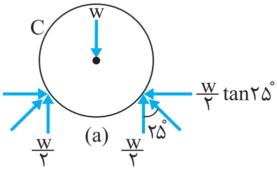
البته این نکته بسیار واضح است ولی بکارگیری آن در مسائلی که دارای تقارن هستند، مفید می‌باشد.

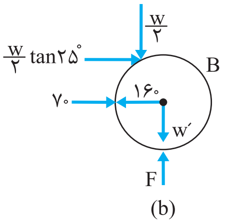
در مثال (۱۲) بعلت تقارن نیروی قائم که به استوانه C وارد می‌شود برابر با $\dfrac{W}{۲}$ است. با استفاده از نکته

(۶) نیروی افقی برابر $\frac{W}{۲}\tan ۲۵^\circ$ می‌باشد.

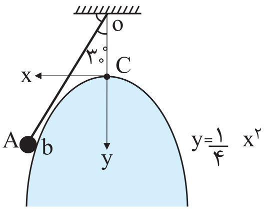
با در نظر گرفتن تعادل نیروهای افقی در استوانه B نتیجه می‌شود:

$$\frac{W}{۲}\tan ۲۵ + ۷۰ = ۱۶۰ \Rightarrow W = ۳۸۶\,N$$

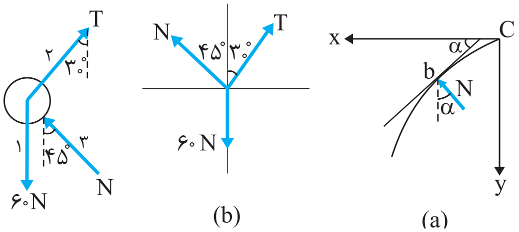




مثال ۱۳ گلوله کوچک A به وزن ۶۰N توسط طناب روی سطح سهمی شکل بدون اصطکاک به معادله $y = \frac{۱}{۴}x^۲$ قرار گرفته است. مختصات نقطه تماس گلوله و سهمی b (۱و۲) می‌باشد. نیروی کششی طناب را بدست آورید.



– همانطور که در مثال‌های قبل ملاحظه شد، در صورتی که به یک جسم سه نیرو وارد شود و از این سه نیرو، یک نیرو اندازه و جهتش مشخص باشد و دو نیروی دیگر جهاتشان مشخص باشد، می‌توان اندازه دو نیروی دیگر را به سادگی با استفاده از نکته (۴) بدست آورد. در این مساله به گلوله A سه نیرو وارد می‌شود. همانطور که در شکل b نشان داده شده است، این نیروها عبارتند از:



۱– نیروی وزن که اندازه و جهتش معلوم است.

۲– نیروی کشش طناب که مقدار آن نامعلوم است ولی جهتش معلوم می‌باشد (زاویه‌اش با قائم ۳۰° است).

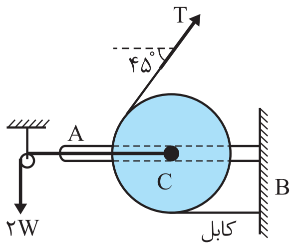
۳– نیروی عکس‌العمل سطح که مقدارش نامعلوم است و در نقطه b به سهمی عمود است (یعنی بر خط مماس در نقطه b عمود است، شکل a). (توجه داشته باشید خط مماس در b و طناب بر هم منطبق نمی‌باشند)

بنابراین می‌توان جهت نیرو را بدست آورد. می‌دانیم تانژانت زاویه خط مماس بر منحنی با محور x، برابر مقدار مشتق در نقطه تماس است (دبیرستان). بنابراین با استفاده از نکته (۴) داریم:

$$\text{(a) شکل} : y' = \tan\alpha = \frac{۱}{۲}x \xrightarrow{x=۲}$$

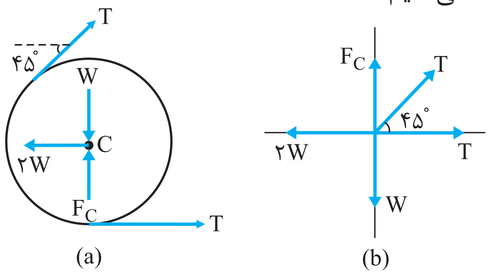
$$\tan\alpha = \frac{۱}{۲}\times ۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

$$\text{(b) شکل} : T = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۷۵^\circ}\times ۶۰ = ۴۳/۹۲\,N$$



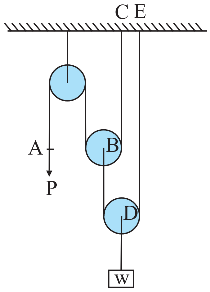
مثال ۱۴ دیسک نازکی به وزن W توسط حلقه کوچک C که به مرکز آن متصل شده است می‌تواند در مسیر کشویی A حرکت کند. مرکز استوانه توسط طناب به نیروی ۲W متصل شده است. در وضعیت نشان داده شده استوانه در حالت تعادل می‌باشد. نیروی کشش کابل (T) و نیروی کشویی به حلقه را بدست آورید.

– پیکر آزاد دیسک با کابل را در نظر می‌گیریم (شکل a)، نیروهای پیکر را روی دو محور عمود بر هم پیاده می‌کنیم (شکل b) داریم:



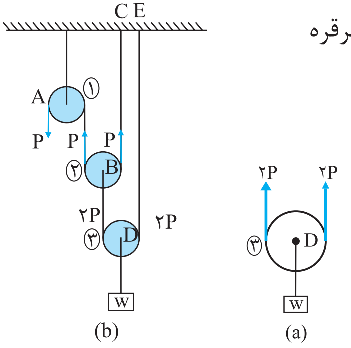
$$\text{(b) شکل}: \sum F_x = ۰ \;,\; T + T\cos ۴۵^\circ - ۲W = ۰ \Rightarrow T = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}W = ۲(۲-\sqrt{۲})W$$

$$\text{(b) شکل}: \sum F_y = ۰ \;,\; F_C - W + ۲(۲-\sqrt{۲})W\cos ۴۵^\circ = ۰ \Rightarrow F_C = (۳-۲\sqrt{۲})W$$



مثال ۱۵ سیستم قرقره نشان داده شده از یک قرقره ثابت و دو قرقره متحرک تشکیل شده است. از اصطکاک بین قرقره‌ها و کابل صرفنظر می‌شود. نیروی P بر حسب نیروی مقاوم W چقدر باشد تا سیستم متعادل باشد؟

– از آنجایی که بین قرقره‌ها و کابل اصطکاک وجود ندارد نیروی کشش کابلی که از A شروع شده و به C ختم می‌شود برابر P است. با در نظر گرفتن تعادل قرقره ۲ نتیجه می‌شود نیرو در کابلی که از B (مرکز قرقره ۲) شروع می‌شود و به E ختم می‌شود برابر ۲P است. با در نظر گرفتن تعادل قرقره ۳ داریم:



$$\text{(a) شکل}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۴P - W = ۰ \Rightarrow P = \frac{W}{۴}$$

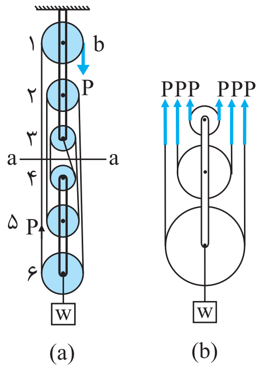
نکته ۷

اگر سیستمی از یک قرقره ثابت و n قرقره متحرک، مطابق شکل (b) تشکیل شده باشد و تحت نیروی مقاوم W و نیروی محرک P در حال تعادل باشد، آنگاه، $P=\frac{W}{۲^n}$.

در مثال ۱۵ یک قرقره ثابت (قرقره ۱) و دو قرقره متحرک (قرقره‌های ۲، ۳)وجود دارد، بنابراین:

$$P=\frac{W}{۲^۲}=\frac{W}{۴}$$

مثال ۱۶ سیستم قرقره نشان داده شده از سه قرقره ثابت (۱,۲,۳) و سه قرقره متحرک (۴,۵,۶) تشکیل شده است. از اصطکاک بین قرقره‌ها و کابل صرفنظر می‌شود. نیروی محرک P را بر حسب نیروی مقاوم w بدست آورید.



– چنانچه در شکل (a) ملاحظه می‌شود یک رشته کابل از نقطه b شروع شده و به مرکز قرقره ۳ ختم می‌شود. نیروی کشش در کابل برابر P می‌باشد. با در نظر گرفتن پیکر آزاد قسمت پایین مقطع a-a داریم:

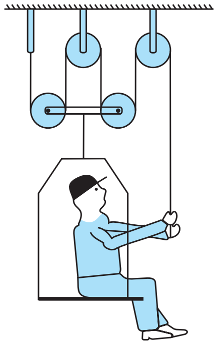
شکل (b) : $\sum F_y=۰ \quad , \quad ۶P-w=۰ \Rightarrow P=\frac{w}{۶}$

نکته ۸

اگر سیستمی از n قرقره ثابت و n قرقره متحرک مطابق شکل (a) تشکیل شده باشد و تحت نیروی مقاوم W و نیروی محرک P در حال تعادل باشد آنگاه، $P=\frac{W}{۲n}$.

در مثال ۱۶ قرقره‌های ثابت و متحرک هر کدام به تعداد ۳ عدد می‌باشد، بنابراین: $P=\frac{W}{۲\times۳}=\frac{W}{۶}$

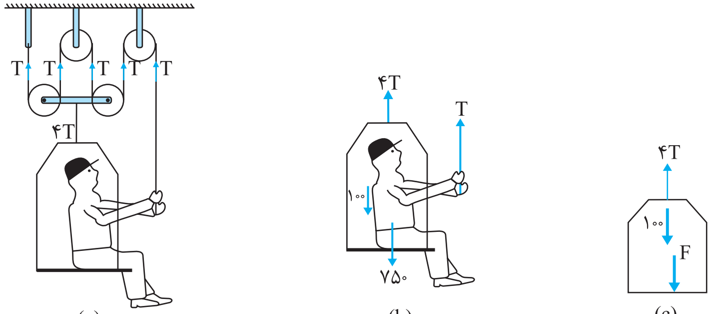
مثال ۱۷ در شکل نشان داده شده وزن شخص ۷۵۰N و وزن صندلی ۱۰۰ نیوتن می‌باشد. برای تعادل، شخص چه نیرویی باید به کابل وارد کند. همچنین نیرویی که از طرف شخص به صندلی وارد می‌شود را محاسبه نمایید. از وزن قرقره‌ها و اصطکاک صرفنظر شود.



– نیرویی که از طرف شخص به کابل وارد می‌شود را T فرض می‌کنیم. با توجه به شکل a پیکر آزاد صندلی و شخص را نظر می‌گیریم. (شکل b)

$$\sum F_y=۰ \Rightarrow ۵T-۷۵۰-۱۰۰=۰ \Rightarrow T=۱۷۰N$$

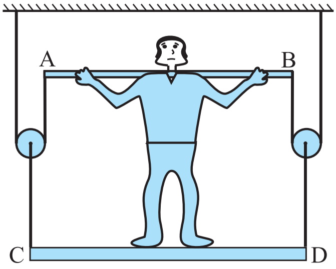
برای به دست آوردن نیروئی که شخص به صندلی وارد می‌کند پیکر آزاد صندلی را در نظر می‌گیریم (شکل c) داریم:



(a) (b) (c)

شکل c : $\sum F_y = ۰ \Rightarrow F + ۱۰۰ - ۴T = ۰ \Rightarrow F = ۴ \times ۱۷۰ - ۱۰۰ \Rightarrow F = ۵۸۰\,N$

نیرویی که شخص به صندلی وارد می‌کند برابر نیرویی است که صندلی به شخص وارد می‌کند (عمل و عکس‌العمل)، بنابراین برای بدست آوردن نیروی F می‌توان بجای پیکر آزاد صندلی، پیکر آزاد شخص را درنظر گرفت و نیروی F را بسادگی بدست آورد (به عهده‌ی دانشجویان)



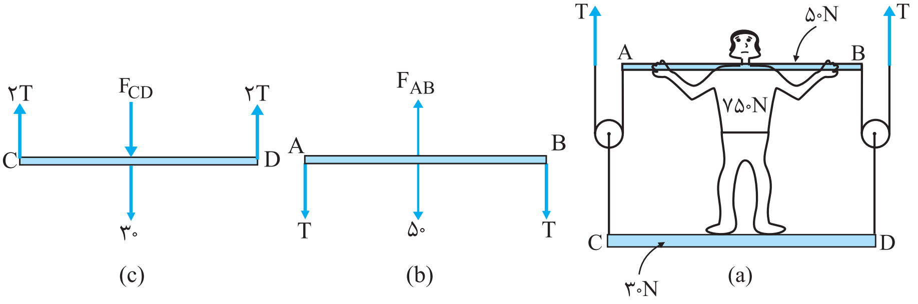
مثال ۱۸ در شکل روبرو، وزن شخص ۷۵۰ N ، وزن میله‌ی AB، ۵۰N و وزن میله‌ی CD، ۳۰N می‌باشد. نیرویی که شخص برای تعادل خود به میله AB اعمال می‌کند را محاسبه نمایید. همچنین نیرویی که از طرف شخص به میله CD وارد می‌شود چقدر می‌باشد؟

– ابتدا پیکر آزاد کل مجموعه را در نظر می‌گیریم (شکل a). در صورتی که برآیند نیرویی که دست‌های شخص به میله AB اعمال می‌کند F_{AB} و برآیند نیرویی که پاهای شخص به میله CD وارد می‌کند F_{CD} فرض شود، داریم:

(a) شکل : $\sum F_y = ۰ \quad , \quad ۲T - ۷۵۰ - ۵۰ - ۳۰ = ۰ \Rightarrow T = ۴۱۵$

(b) شکل : $\sum F_y = ۰ \quad , \quad F_{AB} - ۲T - ۵۰ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۲T + ۵۰ = ۸۸۰\,N$

(شکل c) : $\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۴T - F_{CD} - ۳۰ = ۰ \Rightarrow F_{CD} = ۱۶۳۰\,N$

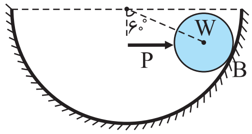


(c) (b) (a)

پیشنهاد می‌شود دانشجویان F_{CD} را با درنظر گرفتن پیکر آزاد شخص محاسبه نمایند.

– سؤال‌های تکمیلی –

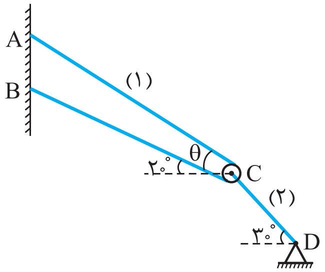
۱- نیروی P افقی می‌باشد. برای تعادل کره نیروی P بر حسب W برابر است با:



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}W$ ۲) $\frac{W}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}W$ ۴) ۲W

۲- در شکل نشان داده شده کابل (۱) از روی قرقره کوچک C عبور کرده و به نقاط A و B متصل شده است و کابل (۲) از مرکز قرقره C به پایه D وصل شده است. کابل‌ها در وضعیت کشش می‌باشند. از اصطکاک بین قرقره کوچک C و کابل (۱) صرفنظر شود. زاویه θ چند درجه است؟



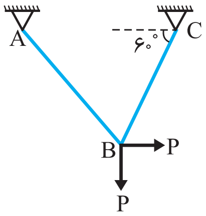
۱) ۲۰°

۲) ۱۵°

۳) ۲۵°

۴) ۳۰°

۳- در صورتی که نیرو در AB دو برابر نیرو در میله BC باشد زاویه بین دو میله برابر است با:



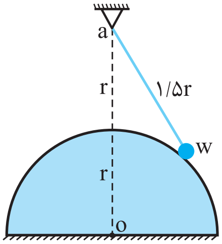
۱) ۱۰۳/۸۸°

۲) ۵۳/۴°

۳) ۴۶/۱۲°

۴) ۷۵/۳۱°

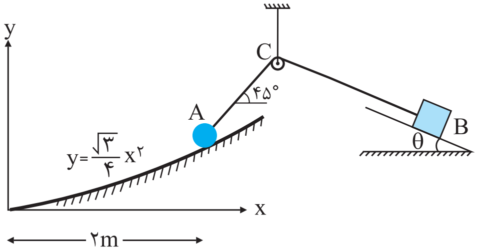
۴- گلوله کوچکی به وزن W به نخی به طول ۱/۵r متصل شده است. انتهای نخ به نقطه‌ی a به فاصله‌ی r از بالای نیم کره‌ای به شعاع r، متصل شده است. نیروی کشش نخ برابر است با:



۱) $\frac{۲}{۳}W$ ۲) $\frac{۳}{۴}W$

۳) $\frac{۱}{۲}W$ ۴) $\frac{۱}{۳}W$

۵- گلوله کوچک A به وزن W توسط طناب که از روی قرقره C عبور کرده است، به بلوک B به وزن ۲W متصل شده است و در وضعیت نشان داده شده در حال تعادل می‌باشد. زاویه سطح شیب‌دار (θ) برابر است با: (از اصطکاک صرف‌نظر شود)



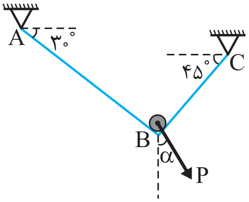
۱) ۳۶/۸°

۲) ۲۴/۲°

۳) ۲۶/۶°

۴) ۲۵/۱°

۶- در شکل نشان داده شده نیروی P به مرکز قرقره کوچکی که می‌تواند آزادانه روی کابل ABC حرکت کند وارد می‌شود. در صورتی که نیروی کشش کابل ۵۰۰ N باشد، زاویه α و نیروی P برابر است با:



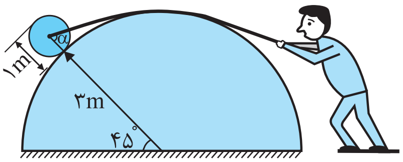
۱) ۵۱۷/۴۲N , ۲۰/۱۲°

۲) ۲۰۵/۹N , ۳۲/۵°

۳) ۷۱۲/۸۲N , ۱۳/۴°

۴) ۶۰۸/۷۶N , ۷/۵°

۷- گلوله کوچکی به قطر یک متر و به وزن ۱۰۰ N توسط طنابی که به آن متصل است مطابق شکل روی کره بدون اصطکاک در حال تعادل می‌باشد. نیرویی که شخص به طناب وارد می‌کند برابر است با:



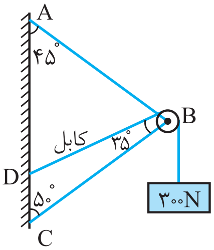
۱) ۸۲/۴۹ N

۲) ۷۵/۴۲ N

۳) ۱۱۸/۵ N

۴) ۱۰۱/۲ N

۸- دو میله AB و BC به مرکز قرقره کوچکی به صورت مفصلی متصل شده‌اند. کابلی که یک انتهای آن در نقطه D به دیوار متصل است از روی قرقره عبور کرده و به وزنه‌ی ۳۰۰ نیوتنی متصل شده است از اصطکاک بین کابل و قرقره صرفنظر می‌شود. نیرو در میله AB برابر است با:



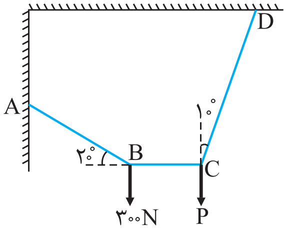
۱) ۴۰۳/۴۲ N

۲) ۸۹/۷ N

۳) ۵۷/۹۶ N

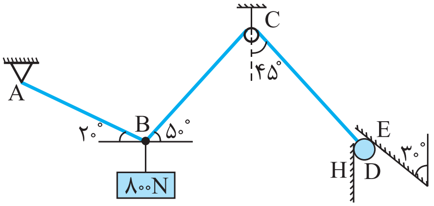
۴) ۸۵/۳۸ N

۹- در شکل نشان داده شده کابل BC افقی می‌باشد، نیروی P برابر است با:



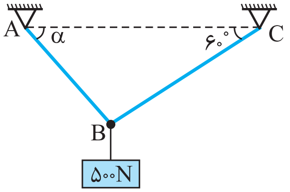
۱) ۳۸۳۰/۴ N
۲) ۹۸۵/۸ N
۳) ۴۶۷۴/۵ N
۴) ۲۰۱۴/۶ N

۱۰- در شکل نشان داده شده از وزن گلوله D و اصطکاک صرفنظر شده است. نیروی عکس‌العمل در E برابر است با:



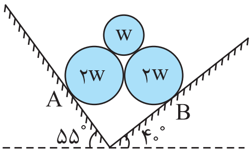
۱) ۱۱۳۱/۳۷ N
۲) ۱۸۲۵/۱۱ N
۳) ۴۱۳/۸۲ N
۴) ۸۱۵/۹۱ N

۱۱- در شکل روبرو وزنه ۵۰۰ نیوتنی توسط دو کابل AB و BC آویزان شده است. مقدار زاویه α برای آنکه کشش کابل AB حداقل شود برابر است با:



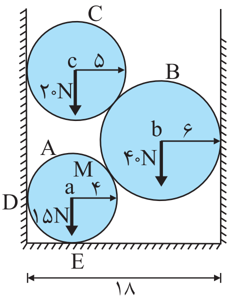
۱) °۶۰
۲) °۳۰
۳) °۴۵
۴) °۲۲/۵

۱۲- در شکل نشان داده شده از اصطکاک صرفنظر شده است. عکس‌العمل سطوح شیب‌دار برابر است با:



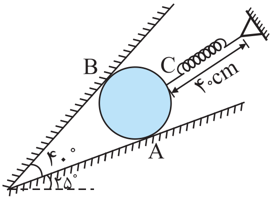
۱) $R_A = ۵/۳۲W \ , \ R_B = ۴/۱۱W$
۲) $R_A = ۳/۲۲W \ , \ R_B = ۴/۱۱W$
۳) $R_A = ۳/۹۲W \ , \ R_B = ۲/۱۸W$
۴) $R_A = ۵/۳۲W \ , \ R_B = ۳/۱۸W$

۱۳- در شکل روبرو نیرویی که استوانه A به دیوار قائم وارد می‌کند چقدر است؟ (از اصطکاک صرف‌نظر شود)



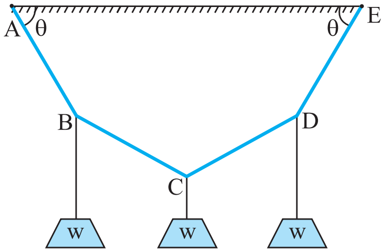
۱) ۴۵ N
۲) ۸۰ N
۳) ۲۰ N
۴) ۷۵ N

۱۴- در شکل روبرو وزن گلوله ۲۰۰ N و عکس‌العمل سطح شیب‌دار در B برابر ۸۰ N می‌باشد. در صورتی که سختی فنر $K = ۸\frac{N}{cm}$ باشد، طول آزاد فنر به کدام یک از گزینه‌های زیر نزدیکتر است؟



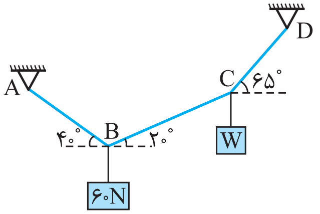
۱) ۳۴ cm
۲) ۳۷ cm
۳) ۲۹ cm
۴) ۳۶ cm

۱۵- در شکل نشان داده شده $w = ۱۰۰N$ و زاویه $\theta = ۶۰°$ می‌باشد، نیروی کشش کابل DE بر حسب نیوتن برابر است با:



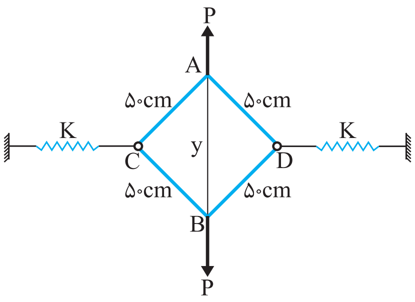
۱) ۳۰۰
۲) ۱۷۳/۲
۳) ۱۴۶/۸
۴) ۳۸۲

۱۶- طناب‌ها دو وزنه ۶۰ نیوتنی و w را در حال تعادل نگاه داشته‌اند. مقدار W بر حسب نیوتن برابر است با:



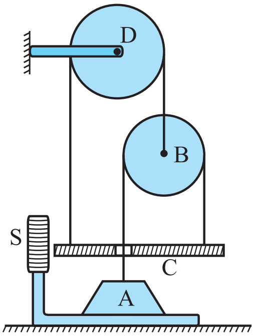
۱) ۳۵/۵
۲) ۴۸/۴
۳) ۸۸/۸
۴) ۹۴/۴

۱۷- در وضعیتی که y (فاصله B،A) برابر صفر است، نیروی کشش در فنرها ۹۰ N می‌باشد. هنگامی که سیم‌های CAD و CBD که طول اولیه آنها ۱۰۰cm است مطابق شکل تحت نیروی P قرار می‌گیرند، مقدار y (فاصله‌ی A و B) برابر ۵۰cm می‌شود. نیروی P به کدام یک از اعداد زیر نزدیک‌تر است؟ (از افزایش طول سیم‌ها بر اثر نیروی P صرفنظر شود). $(K = ۶N / cm)$



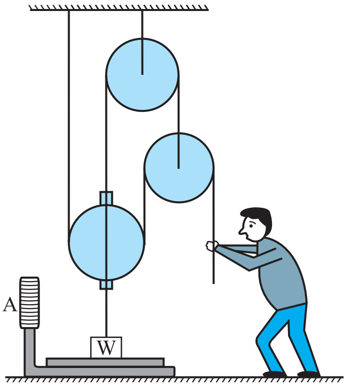
۱) ۱۲۰ N
۲) ۸۰ N
۳) ۷۵ N
۴) ۱۵۰ N

۱۸- وزن قطعه C ،۳۰۰N و وزن بلوک A، ۲۲۰N می‌باشد. کابل روی قرقره B از سوراخی که در قطعه C ایجاد شده است عبور کرده و به بلوک A متصل شده است در وضعیت نشان داده شده عقربه ترازوی S چه عددی را نشان می‌دهد؟



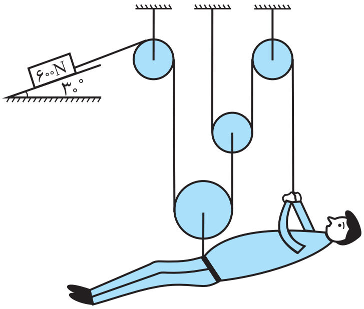
۱) ۱۸۰ N
۲) ۲۰ N
۳) ۱۲۰ N
۴) ۲۲۰ N

۱۹- در شکل نشان داده شده وزن شخص ۸۰۰ نیوتن می‌باشد. نیرویی که از طرف شخص به زمین وارد می‌شود ۱۰۰ نیوتن است. در صورتی که عقربه ترازوی A، ۱۲۰۰ نیوتن را نشان دهد اندازه‌ی وزنه‌ی W برابر است با:



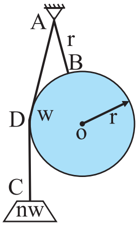
۱) ۲۵۰۰ N
۲) ۳۰۰۰ N
۳) ۱۸۰۰ N
۴) ۴۰۰۰ N

۲۰- در وضعیت نشان داده شده شخص در حالت تعادل قرار گرفته است. از وزن قرقره‌ها و کابل صرفنظر می‌شود. وزن شخص برابر است:



۱) ۷۵۰ N
۲) ۸۰۰ N
۳) ۴۰۰ N
۴) ۱۰۰۰ N

۲۱- در شکل نشان داده شده طول طناب AB برابر شعاع کره است وزن کره w و وزن بلوک متصل به انتهای طناب AC برابر nw می‌باشد. در وضعیت نشان داده شده زاویه طناب AB با خط قائم برابر است با:



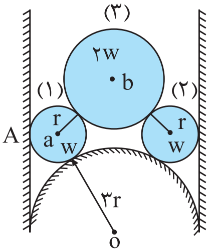
۱) $\sin^{-1}(\frac{n}{n+1})$

۲) $\sin^{-1}\frac{n}{2(n+1)}$

۳) $\cos^{-1}(\frac{2n}{1+2n})$

۴) $\cos^{-1}(\frac{2n}{2+3n})$

۲۲- سه استوانه هم طول و هم جنس مطابق شکل بر روی سطح استوانه‌ای شکل به شعاع ۳r قرار داده شده‌اند. با صرفنظر کردن از اصطکاک عکس‌العمل در A برابر است با:



۱) ۳/۱۴W

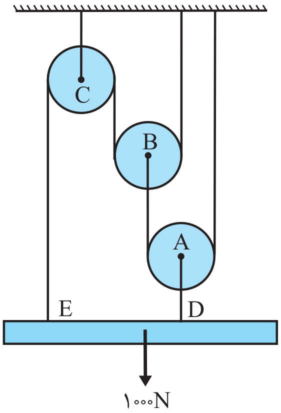
۲) ۲/۶۴W

۳) ۱/۸۹W

۴) ۱/۴۸W

- سؤال‌های طبقه‌بندی شده آزمون سراسری مهندسی مکانیک -

۲۳- وزنه‌ی ۱۰۰۰ نیوتنی توسط یک سری قرقره و طناب مطابق شکل آویزان شده است. در صورتی که از اصطکاک محور قرقره‌ها بتوان صرفنظر نمود، کشش طناب AD برابر است با: (۷۰)



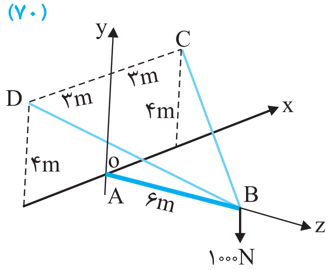
۱) ۷۵۰ N

۲) ۸۰۰ N

۳) ۵۰۰ N

۴) هیچکدام

۲۴- میله‌ای با وزن ناچیز AB از نقطه A به دیوار لولا شده و از انتهای دیگر توسط دو کابل BC و BD بصورت افقی نگهداشته می‌شود با اعمال نیروی ۱۰۰۰ نیوتنی در نقطه B کشش هر یک از کابل‌های BC و BD برابر خواهد بود با: (۷۰)



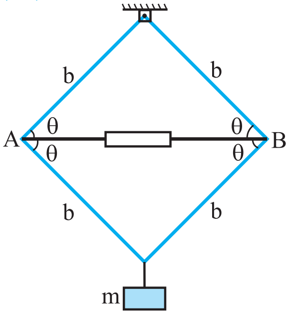
۱) ۷۸۱ نیوتن

۲) ۹۷۶/۳ نیوتن

۳) ۸۲۴ نیوتن

۴) ۵۳۲ نیوتن

۲۵- چه نیروی فشاری اعمال شده به نقاط A و B توسط سیلندر هیدرولیکی برای به تعلیق در آوردن وزنه m لازم است. (۷۰)



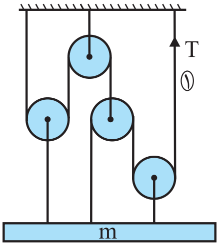
۱) mg

۲) $\frac{۱}{۲}mg\cot g\theta$

۳) $\frac{۲}{۳}mg\cot g\theta$

۴) $mg\cot g\theta$

۲۶- در مجموعه قرقره‌ای مطابق شکل که جرم m را تحمل می‌کند مقدار کشش T در کابل شماره ۱ برابر است با (از جرم قرقره‌ها، کابل‌ها و اصطکاک صرفنظر شود): (۷۲)



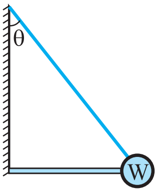
۱) $T=\frac{mg}{۴}$

۲) $T=\frac{mg}{۷}$

۳) $T=\frac{mg}{۳}$

۴) هیچکدام

۲۷- یک گوی فلزی به وزن W بوسیله یک نخ به دیوار متصل شده است. گوی فلزی توسط یک میله از دیوار جدا شده است. کدامیک از عبارات زیر صحیح می‌باشد؟ P نیروی میله و T کشش طناب فرض می‌شود. (۷۲)



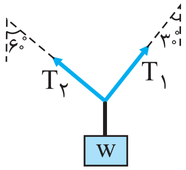
۱) $T=P+W$

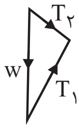
۲) $P=W\tan\theta$

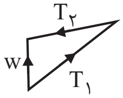
۳) $P\sin\theta=T$

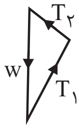
۴) $\frac{T}{P}=\cos\theta$

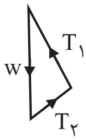
۲۸- کدامیک از مثلث‌های زیر نمایانگر مثلث نیروهای سیستم نشان داده شده است. (۷۲)



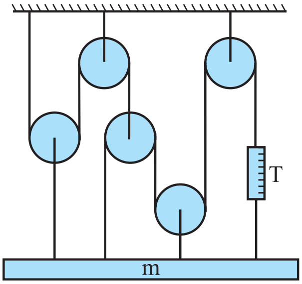
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۲۹- نیروسنج مقدار کشش در کابل سمت راستی را برابر T نشان می‌دهد. با صرفنظر کردن از وزن پولی‌ها مطلوبست محاسبه جرم جسم بر حسب نیروی T. (۷۳)



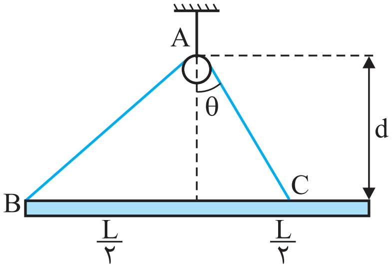
۱) $m = \frac{8T}{g}$

۲) $m = \frac{5T}{g}$

۳) $m = 8T$

۴) هیچکدام

۳۰- کابل‌های AB و AC برای نگهداشتن موقعیت تعادل تیر افقی به جرم 330kg استفاده شده‌اند. اگر $L = 8m$ ، $d = 6m$ و $\theta = 25°$ باشد، کشش در کابل AB کدام است؟ (۷۶)



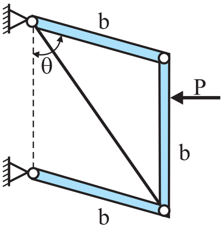
۱) 1/2 kN

۲) 1/6 kN

۳) 2/1 kN

۴) 3/1 kN

۳۱- در شکل روبرو یک سیم قطری اهرم‌بندی متوازی‌الاضلاعی نشان داده شده که اهرم بندی را تحت نیروی افقی P در حال تعادل نگاه می‌دارد. T، کشش ایجاد شده در این سیم مساوی با کدام است؟ (جرم میله‌ها قابل اغماض است). (۷۷)



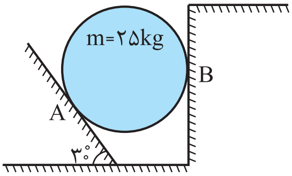
۱) $P\cos\theta$

۲) $P\cos\frac{\theta}{2}$

۳) $P\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$

۴) $P\cos\theta / \sin\frac{\theta}{2}$

۳۲- در شکل مقابل عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های A و B را بدست آورید. ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و سطوح A و B بدون اصطکاک می‌باشند). (۷۸)



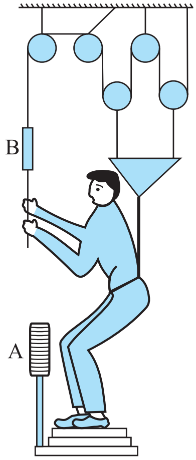
۱) $F_B = \frac{۲۵۰}{\sqrt{۳}}N$, $F_A = \frac{۱۲۵}{\sqrt{۳}}N$

۲) $F_B = \frac{۲۵۰}{\sqrt{۳}}N$, $F_A = \frac{۵۰۰}{\sqrt{۳}}N$

۳) $F_B = \frac{۵۰۰}{\sqrt{۳}}N$, $F_A = \frac{۲۵۰}{\sqrt{۳}}N$

۴) $F_B = \frac{۱۲۵}{\sqrt{۳}}N$, $F_A = \frac{۲۵۰}{\sqrt{۳}}N$

۳۳- در شکل روبرو نیروسنج B مقدار N ۱۰۰ و ترازوی A عدد N ۴۰۰ را نشان می‌دهد وزن شخص بر حسب کیلوگرم کدام گزینه است؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$) (۸۰)



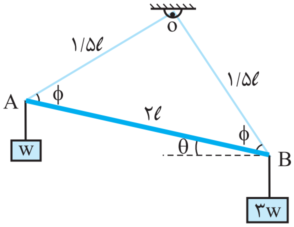
۱) ۵۰

۲) ۶۰

۳) ۸۰

۴) ۹۰

۳۴- میله سبک AB توسط سیم‌های OA و OB به تکیه‌گاه O وصل شده است. طول میله ۲ℓ و طول هر یک از سیم‌ها $۱/۵\ell$ می‌باشد. وزنه‌های W و ۳W مطابق شکل از A و B آویخته شده‌اند. زاویه تمایل میله نسبت به افق (θ) در حالت تعادل تقریبا چند درجه است؟ (۸۲)



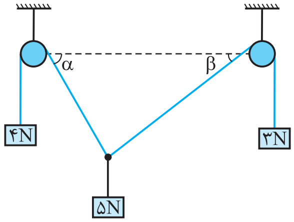
۱) $\theta = ۲۴^\circ$

۲) $\theta = ۴۶^\circ$

۳) $\theta = ۱۱^\circ$

۴) $\theta = ۱۷^\circ$

۳۵- سه وزنه به کمک سه ریسمان سبک و دو قرقره کوچک به یکدیگر متصل شده‌اند و در وضعیت تعادل قرار گرفته‌اند. زوایای α و β برابرند با: (۸۳)

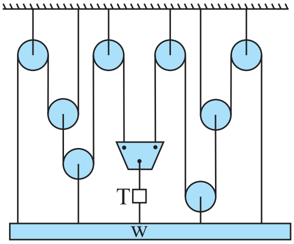


۱) $\beta = ۳۶/۹^\circ$, $\alpha = ۵۳/۱^\circ$

۲) $\beta = ۵۳/۱^\circ$, $\alpha = ۳۶/۹^\circ$

۳) $\beta = ۵۱/۴^\circ$, $\alpha = ۳۸/۶^\circ$

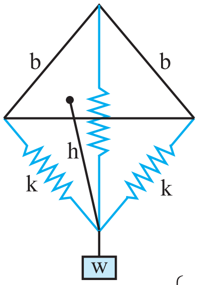
۴) $\beta = ۳۸/۶^\circ$, $\alpha = ۵۱/۴^\circ$



۳۶- مقدار نیروی کششی T بر حسب وزن وزنه (w) برابر است با: (۸۴)

۱) $T=\frac{W}{۸}$ ۲) $T=\frac{W}{۵}$

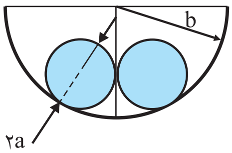
۳) $T=\frac{۲}{۷}W$ ۴) $T=\frac{۷}{۲}W$



۳۷- سه فنر یکسان و به سختی K و طول آزاد a به ذره‌ای به وزن W وصل شده‌اند. انتهای دیگر فنرها به یک سقف افقی و رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع b وصل شده است. تعادل ذره در فاصله h پائین سقف رخ می‌دهد. نیرو در هر فنر چقدر است؟ (۸۵)

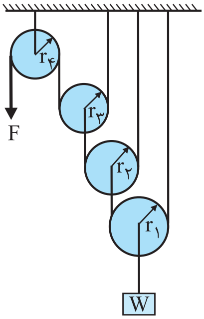
۱) $F=K\left\{\left[h^۲+\frac{b^۲}{۴}\right]^{\frac{۱}{۲}}-a\right\}$ ۲) $F=k\left\{\left[b^۲+\frac{h^۲}{۳}\right]^{\frac{۱}{۲}}-a\right\}$

۳) $F=k\left\{\left[h^۲+\frac{b^۲}{۳}\right]^{\frac{۱}{۲}}-a\right\}$ ۴) $F=k\left\{\left[b^۲+\frac{h^۲}{۴}\right]^{\frac{۱}{۲}}-a\right\}$



۳۸- دو کره صاف به شعاع a و وزن W داخل کاسه کروی بدون اصطکاک ثابتی به شعاع b قرار می‌گیرند. با فرض $b=۳a$ ، نسبت نیروی عکس‌العمل بین دو کره، به عکس‌العمل بین کره و کاسه عبارت است از: (۸۶)

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

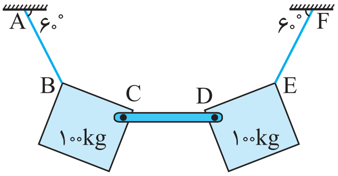


۳۹- در شکل مقابل مقدار نیروی F را بر حسب وزن وزنه (W) بدست آورید. (۸۶)

۱) $F=\frac{W}{۴}$ ۲) $F=\frac{W}{۸}$

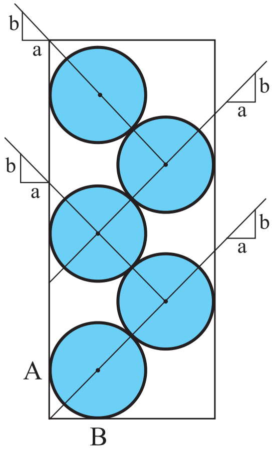
۳) $F=\frac{W}{۱۲}$ ۴) $F=\frac{W}{۱۶}$

۴۰- با توجه به شکل مقابل نیروی منتقله توسط میله بی وزن CD بر حسب kg چقدر است؟ (۸۸)



۱) ۱۰۰
۲) $\frac{(۱۰۰\sqrt{۳})}{۳}$
۳) $۱۰۰\sqrt{۳}$
۴) صفر

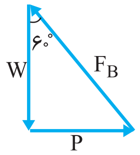
۴۱- سکه‌های زیر، در ظرف صاف پلاستیکی قرار دارند. اگر وزن هر سکه برابر W باشد، نسبت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی سکه پایینی یعنی $\frac{N_A}{N_B}$، برابر کدام است؟ (از اصطکاک سطوح صرف‌نظر شود)



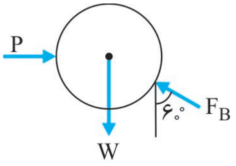
۱) $\frac{۵}{۴}\frac{b}{a}$
۲) $\frac{۴}{۵}\frac{b}{a}$
۳) $\frac{۵}{۴}\frac{a}{b}$
۴) $\frac{۴}{۵}\frac{a}{b}$

– پاسخ سؤال‌ها –

۱- گزینه‌ی (۳). نیروهای W، P و عکس‌العمل کره و گلوله (F_B) به گلوله وارد می‌شود. از آنجایی که نیروی P و W بر هم عمودند از روش ترسیمی برای بدست آوردن P استفاده می‌کنیم.

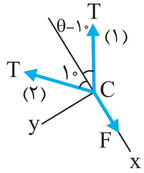


$$\tan ۶۰° = \frac{P}{W} \Rightarrow P = \sqrt{۳}\,W$$



با استفاده از نکته (۴) نیز می‌توان P را به سادگی بدست آورد.

۲- گزینه‌ی (۱). تعادل قرقره C را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نکته (۴) کشش T را در دو طرف قرقره بدست می‌آوریم (زاویه بین دو نیروی T برابر θ می‌باشد)



کابل ۱ : $T = \dfrac{\sin ۱۰}{\sin\theta} F \quad (۱)$

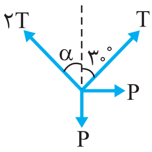
کابل ۲ : $T = \dfrac{\sin(\theta - ۱۰)}{\sin\theta} F \quad (۲)$

$$(۱) = (۲) \Rightarrow \sin(\theta - ۱۰) = \sin ۱۰ \Rightarrow \theta = ۲۰°$$

می‌توان CD را محور x و عمود بر آنرا محور y در نظر گرفت. سپس با نوشتن $\sum F_y = ۰$ زاویه θ به سادگی بدست می‌آید.

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow T\sin ۱۰° - T\sin(\theta - ۱۰°) = ۰ \Rightarrow \sin(\theta - ۱۰°) = \sin ۱۰° \Rightarrow \theta = ۲۰°$$

۳- گزینه‌ی (۳). در صورتی که نیرو در میله BC برابر T باشد، داریم:



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow ۲T\sin\alpha - T\sin ۳۰° = P \quad (۱)$$

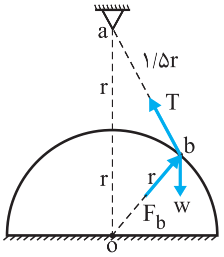
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲T\cos\alpha + T\cos ۳۰° = P \quad (۲)$$

از تساوی طرف چپ روابط (۱) و (۲) $\Rightarrow \sin\alpha - \cos\alpha = ۰/۶۸۳$

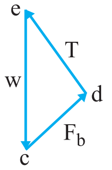
$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{۲}\sin(\alpha - \frac{\pi}{۴}) = ۰/۶۸۳ \Rightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{۴}) = ۰/۴۸۳ \Rightarrow \alpha = ۷۳/۸۸$$

زاویه دومیله $= \alpha + ۳۰ = ۷۳/۸۸ + ۳۰ = ۱۰۳/۸۸$

۴- گزینه‌ی (۲). نیروهایی که به گلوله وارد می‌شود عبارتند: وزن گلوله (W)، نیروی عکس‌العمل سطح که به نیم کره عمود است و بنابراین در امتداد شعاع وارد می‌گردد (F_b) و کشش نخ (T).



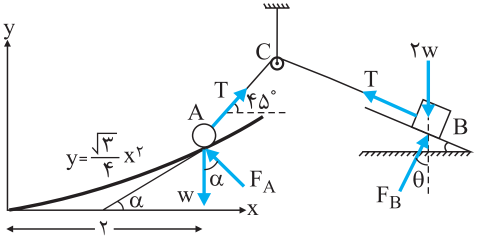
اضلاع مثلث تعادل نیروها (مثلث ecd) و مثلث aob موازی هستند، بنابراین با هم متشابه‌اند. (زوایای دو مثلث با هم برابرند) با استفاده از رابطه تشابه دو مثلث داریم:



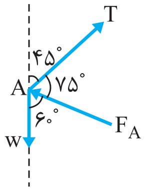
مثلث تعادل نقطه b

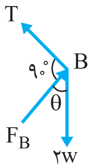
$$\text{تشابه دو مثلث aob و ecd}: \frac{T}{1/5r}=\frac{W}{2r}\Rightarrow T=\frac{1/5}{2}W=\frac{3}{4}W$$

۵- گزینه‌ی (۳). کشش طناب (T) را در محل اتصال به بلوک و گلوله بدست آورده با هم مساوی قرار می‌دهیم. بدین منظور ابتدا راستای نیروی عکس‌العمل سطح بر گلوله‌ی A(F_A) را بدست می‌آوریم. از آنجائی که از اصطکاک صرف‌نظر شده است نیروی F_A بر منحنی یعنی به خط مماس بر منحنی عمود است (به مثال ۸ مراجعه شود) داریم:



$$y'=\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}x\xrightarrow{x=2}\tan\alpha=\sqrt{3}\ ,\ \alpha=60^\circ$$





$$T=\underbrace{\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}W}_{\text{T از تعادل A، نکته ۴}}=\underbrace{\frac{\sin\theta}{\sin 90^\circ}(2W)}_{\text{T از تعادل B، نکته ۴}}\Rightarrow \sin\theta=0/448\ ,\ \theta=26/6^\circ$$

۶- گزینه‌ی (۴). در این تست یک نیرو (نیروی P) و زاویه آن مجهول است. بنابر نکته (۵) از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.

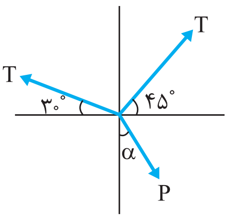
شکل a:

$$\sum F_x=0\ ,\quad P\sin\alpha+500\cos 45-500\cos 30=0\Rightarrow P\sin\alpha=79/46\quad (1)$$

$$\sum F_y=0\ ,\quad P\cos\alpha-500\sin 45-500\sin 30=0\Rightarrow P\cos\alpha=603/55\quad (2)$$

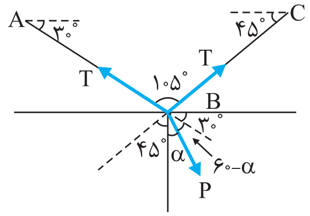
$$\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \tan\alpha = ۰/۱۳ \Rightarrow \alpha = ۷/۵^\circ \quad , \quad P\sin ۷/۵^\circ = ۷۹/۴۶ \Rightarrow P = ۶۰۸/۷۶\,N$$

می‌توان با استفاده از نکته (۴) نیرو در BA و BC را بدست آورده و مساوی هم قرار می‌دهیم. زاویه BA با نیروی P، $۶۰-\alpha$ و زاویه BC با P، $\alpha+۴۵$ می‌باشد. در صورتی که نیروی کشش کابل T باشد، داریم:



(a)

$$\text{شکل (b)}: T = \frac{\sin(\alpha+۴۵)}{\sin(۱۰۵)}P = \frac{\sin(۶۰-\alpha)}{\sin ۱۰۵}P$$

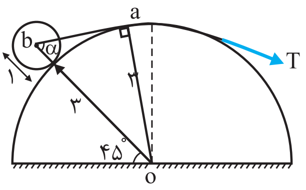


(b)

$$\Rightarrow \sin(\alpha+۴۵) = \sin(۶۰-\alpha) \Rightarrow \alpha+۴۵ = ۶۰-\alpha \Rightarrow \alpha = ۷/۵^\circ$$

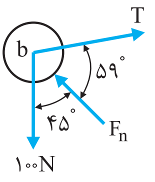
$$۵۰۰ = \frac{\sin ۵۲/۵}{\sin ۱۰۵}P \Rightarrow P = ۶۰۸/۷۶\,N$$

۷- گزینه‌ی (۱). ابتدا از مثلث oab زاویه $a\hat{b}o = \alpha$ را بدست می‌آوریم. (شکل c) پیکر آزاد گلوله را در نظر می‌گیریم. (شکل d)



(c)

در صورتی که نیرویی که شخص به طناب وارد می‌کند T باشد، بعلت نبودن اصطکاک بین طناب و کره نیروی طناب ثابت و برابر T می‌باشد. نیروهای T و F_n مجهول هستند و زاویه بین آنها ۵۹ درجه است با استفاده از نکته (۴) داریم:



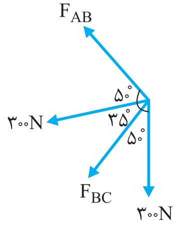
(d)

$$\text{oab مثلث قائم الزاویه ،c شکل}: \sin\alpha = \frac{oa}{ob} = \frac{۳}{۳/۵} \Rightarrow \alpha = ۵۹^\circ$$

$$\text{شکل d}: T = \frac{\sin ۴۵}{\sin ۵۹} \times ۱۰۰ = ۸۲/۴۹\,N$$

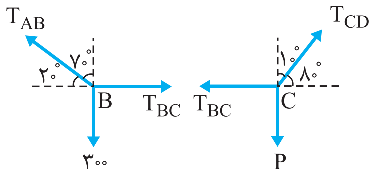
۸- گزینه‌ی (۳). پیکر آزاد قرقره را در نظر می‌گیریم. زاویه بین نیروهای مجهول F_{AB} و F_{BC}، ۸۵ درجه است. نیروی قائم ۳۰۰ نیوتنی در میله AB نیروی کششی و نیروی مایل ۳۰۰ نیوتنی در میله AB نیروی فشاری ایجاد می‌کند (به نکته ۴ مراجعه شود). نیروی F_{AB} را بر اثر نیروی قائم و مایل ۳۰۰ نیوتنی به دست می‌آوریم.

با استفاده از نکته (۴) داریم:



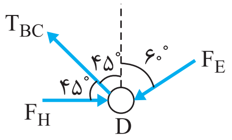
$$F_{AB} = \underbrace{\frac{\sin ۵۰}{\sin ۸۵} \times ۳۰۰}_{\text{بر اثر نیروی قائم ۳۰۰ N}} - \underbrace{\frac{\sin ۳۵}{\sin ۸۵} \times ۳۰۰}_{\text{بر اثر نیروی مایل ۳۰۰ N}} = ۵۷/۹۶\,N$$

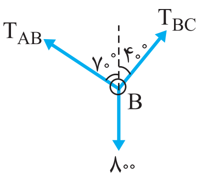
۹- گزینه‌ی (۳). با در نظر گرفتن تعادل نقاط B و C کشش T_{BC} را بطور مجزا بدست آورده با هم مساوی قرار می‌دهیم با استفاده از نکته (۴) داریم:



$$T_{BC}=\underbrace{\frac{\sin ۷۰}{\sin ۲۰}\times ۳۰۰}_{\substack{T_{BC}\ \text{از تعادل}\ B\\ \text{نکته (۴)}}}=\underbrace{\frac{\sin ۱۰}{\sin ۸۰}\times P}_{\substack{T_{BC}\ \text{از تعادل}\ C\\ \text{نکته (۴)}}}\Rightarrow P=۴۶۷۴/۵۱\,N$$

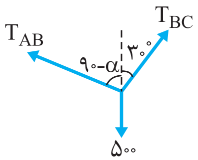
۱۰- گزینه‌ی (۱). با در نظر گرفتن تعادل نقطه D و نکته (۴) نیروی در نقطه E، (F_E) را به دست می‌آوریم. در استفاده از نکته (۴) T_{BC} را معلوم و F_E و F_H را مجهول در نظر می‌گیریم. زاویه بین دو نیروی مجهول F_E و F_H ۱۵۰° یا ۳۰° است (به انتهای مثال ۳ مراجعه شود). با استفاده از نکته (۴) داریم:





$$F_E=\underbrace{\frac{\sin ۴۵}{\sin ۳۰}T_{BC}}_{\substack{F_E\ \text{از تعادل}\ D\\ \text{نکته (۴)}}}=\frac{\sin ۴۵}{\sin ۳۰}\times\underbrace{\frac{\sin ۷۰}{\sin ۱۱۰}\times ۸۰۰}_{\substack{T_{BC}\ \text{از تعادل}\ B\\ \text{نکته (۴)}}}=۱۱۳۱/۳۷\,N$$

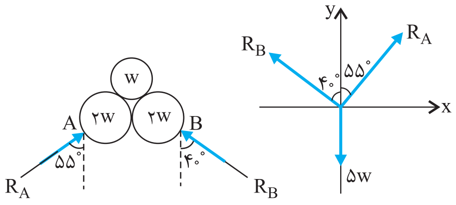
۱۱- گزینه‌ی (۲). با استفاده از نکته (۴) کشش در کابل AB را بدست می‌آوریم.



$$T_{AB}=\frac{\sin ۳۰}{\sin(۹۰-\alpha+۳۰)}\times ۵۰۰=\frac{۲۵۰}{\sin(۱۲۰-\alpha)}$$

کسر $\frac{۲۵۰}{\sin(۱۲۰-\alpha)}$ هنگامی حداقل می‌شود که مخرج آن حداکثر شود. مقدار حداکثر $\sin(۱۲۰-\alpha)$ برابر ۱ است یا $۱۲۰-\alpha=۹۰$ در نتیجه $\alpha=۳۰°$

۱۲- گزینه‌ی (۲). سه گلوله را به صورت یک پیکر در نظر می‌گیریم و پیکر آزاد آن را رسم می‌کنیم (شکل (a)). نیروهایی که به پیکر وارد می‌شوند را روی دو محور عمود بر هم x-y پیاده می‌کنیم (شکل (b)). با استفاده از نکته (۴) داریم:



(a) (b)

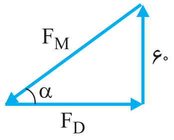
$$R_B = \frac{\sin ۵۵}{\sin ۹۵}(۵W) = ۴/۱۱W$$

$$R_A = \frac{\sin ۴۰}{\sin ۹۵}(۵W) = ۳/۲۲W$$

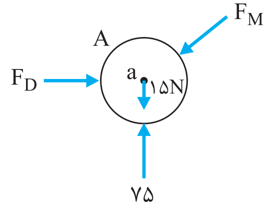
۱۳- گزینه‌ی (۲). ابتدا سه استوانه را به صورت یک پیکر در نظر می‌گیریم.

(b) شکل ،abc مثلث : $\cos\alpha = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۴}$

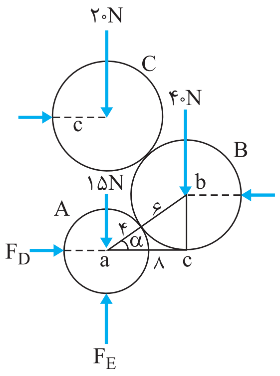
(b) شکل : $\sum F_y = ۰\ ,\ F_E - ۲۰ - ۴۰ - ۱۵ = ۰ \Rightarrow F_E = ۷۵\,N$



(c)
مثلث تعادل استوانه A



(a)



(b)

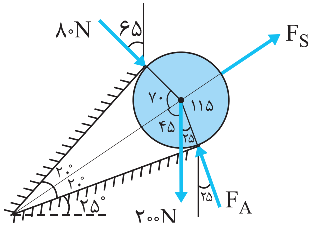
نیروی قائم که به استوانه A وارد می‌شود برابر است با، ۷۵-۱۵=۶۰ N، (شکل a)

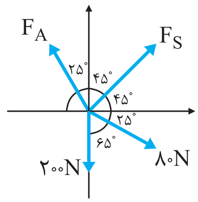
(c) شکل : $\tan\alpha = \frac{۶۰}{F_D} \Rightarrow F_D = ۶۰ \times \frac{۴}{۳} = ۸۰\,N$

۱۴- گزینه‌ی (۴). پیکر آزاد گلوله را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نکته (۴) داریم:

$$F_s = \frac{\sin ۲۵}{\sin ۷۰} \times ۲۰۰ - \frac{\sin ۱۴۰}{\sin ۷۰} \times ۸۰ \Rightarrow F_S = ۳۵/۲۲\,N$$

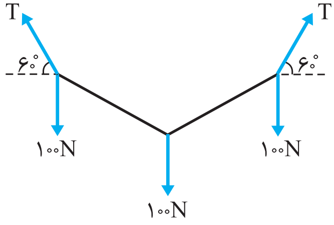
$$x_s = \frac{F_s}{K} = \frac{۳۵/۲۲}{۸} = ۴/۴۰cm \quad , \quad L_s = ۴۰ - ۴/۴۰ = ۳۵/۶cm$$





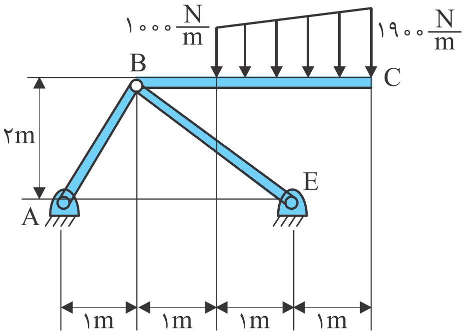
۱۵- گزینه‌ی (۲). بعلت تقارن کشش کابل DE و AB برابرند. در صورتی که این نیرو را T فرض کنیم، با در نظر گرفتن تعادل کل سیستم داریم:

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = ۰\ ,\ ۲T\sin ۶۰^\circ - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow T = ۱۷۳/۲N$$



- سؤال‌های ارشد مکانیک سال ۱۴۰۱ -

۱. نیروی وارد بر عضو ABC در مفصل B چند کیلونیوتن است؟ (از وزن عضوها صرف‌نظر شود.)



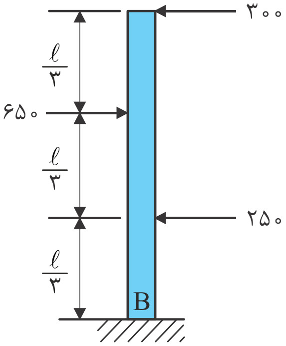
۱) ۲√۲

۲) ۴√۲

۳) √۲

۴) ۳√۲

۲. در شکل زیر خط عمل برآیند سه نیروی نشان داده شده در چه فاصله‌ای از تکیه‌گاه (نقطهٔ B) قرار دارد؟



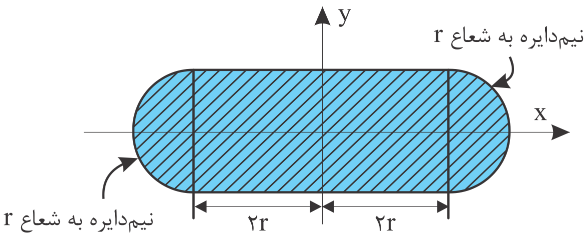
۱) $\frac{\ell}{۲}$

۲) $\frac{\ell}{۶}$

۳) $۲\frac{\ell}{۳}$

۴) $\frac{\ell}{۳}$

۳. در شکل زیر، ممان اینرسی سطح هاشور زده شده حول محور x چند برابر ممان اینرسی آن حول محور y است؟



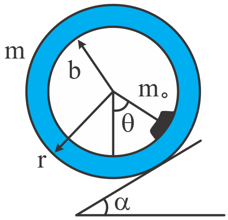
۱) $\frac{۳۲+۳\pi}{۱۹۲+۵۱\pi}$

۲) $\frac{۸۱}{۲۴۱}$

۳) $\frac{۳۲+۳\pi}{۱۲۸+۵۱\pi}$

۴) $\frac{۴۱}{۲۸۱}$

۴. رینگی با جرم یکنواخت m و شعاع خارجی r، جرم کوچک $m_\circ$ را در شعاع داخلی b در سطح شیب‌دار با زاویه α مطابق شکل زیر در حالت تعادل حفظ کرده است. چه رابطه‌ای بین زوایای θ و α برقرار است؟



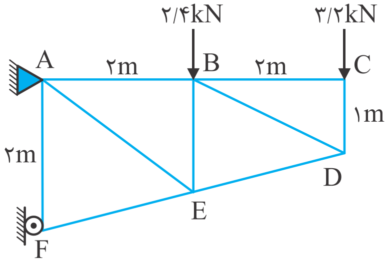
۱) $\sin\theta = \frac{m}{m_\circ}\frac{r}{b}\sin\alpha$

۲) $\sin\theta = \frac{(m+m_\circ)r}{m_\circ b}\sin\alpha$

۳) $\cos\theta = \frac{m}{m_\circ}\frac{r}{b}\cos\alpha$

۴) $\cos\theta = \frac{(m+m_\circ)r}{m_\circ b}\cos\alpha$

۵. نیروی عضو AE را در خرپای زیر کدام است؟



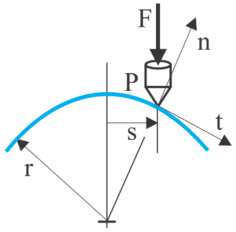
۱) ۵/۶۷ kN ، کششی

۲) ۴/۶۵ kN ، فشاری

۳) ۵/۶۷ kN ، فشاری

۴) ۴/۶۵ kN ، کششی

۶. جسم P نیروی F را به سطح دایره‌ای در شکل زیر وارد می‌کند. مؤلفه‌های عمودی و مماسی نیروی F وقتی جسم P در فاصلهٔ s از محور عمود قرار دارد، کدام است؟



۱) $\frac{F\sqrt{r^2-s^2}}{r}$, $\frac{-Fs}{r}$

۲) $\frac{-F\sqrt{r^2-s^2}}{r}$, $\frac{-Fs}{r}$

۳) $\frac{F\sqrt{r^2-s^2}}{r}$, $\frac{Fs}{r}$

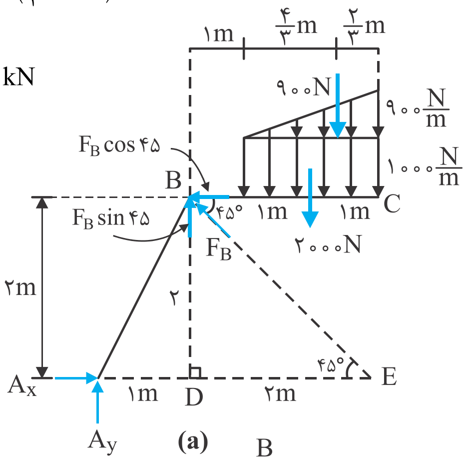
۴) $\frac{-F\sqrt{r^2-s^2}}{r}$, $\frac{Fs}{r}$

- پاسخ سؤال‌های ارشد مکانیک سال ۱۴۰۱ -

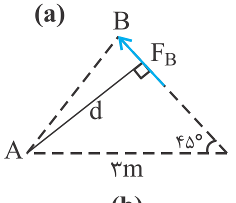
۱- گزینه (۴). اتصال دو سرِ میله BE مفصلی است. بنابراین BE عضو دو نیروئی می‌باشد و نیروی آن در راستای BE می‌باشد (به فصل سوم تعادل عضو دو نیروئی رجوع شود). با توجه به ابعاد داده شده زاویه میله BE با افق ۴۵° می‌باشد (مثلث BDE متساوی‌الساقین است.) پیکر آزاد میله ABC را در نظر می‌گیریم. بار گسترده را به یک مثلث و یک مستطیل تبدیل می‌کنیم

$$\sum M_A = ۰ \;,\; \underbrace{F_B \cos ۴۵ \times ۲}_{\text{مؤلفه افقی } F_B} + \underbrace{F_B \times \sin ۴۵ \times ۱}_{\text{مؤلفه قائم } F_B} - ۹۰۰\left(\frac{۴}{۳}+۱+۱\right) = ۰ \qquad (۱)$$

$$-۲۰۰۰(۱+۱+۱) = ۰ \;\Rightarrow\; F_B = ۳۰۰۰\sqrt{۲}\text{ N} = ۳\sqrt{۲}\text{ kN}$$



(a)

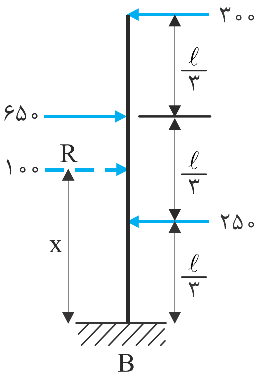


(b)

بجای تجزیه F_B به دو مؤلفه در جهت افقی و قائم و بدست آوردن گشتاور آن حول A، می‌توان نیرو F_B در فاصله عمودی A از نیروی F_B (فاصله d) ضرب کرد (شکل b). $d = ۳\sin ۴۵^\circ$ و گشتاور F_B حول A برابر می‌شود با $F_B d = ۳F_B \sin ۴۵$ که برابر مجموع دو جمله اول و دوم در رابطه (۱) می‌باشد.

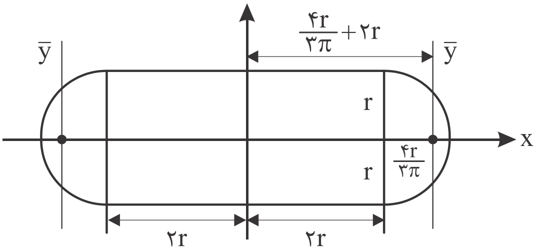
۲- گزینه (۱). برآیند سه نیرو برابر، $R = ۶۵۰-۳۰۰-۲۵۰ = ۱۰۰$ می‌باشد. گشتاور سه نیرو حول نقطه B برابر است با گشتاور برآیند آنها (R) حول B. در صورتی که فاصله R از B برابر x باشد داریم:

$$\sum M_B \;,\; ۶۵۰ \times \frac{۲\ell}{۳} - ۳۰۰ \times \ell - ۲۵۰ \times \frac{\ell}{۳} = ۱۰۰x \Rightarrow x = \frac{\ell}{۲}$$



۳- گزینه (۱). برای بدست آوردن I_x دو نیمدایره که هم محور هستند به صورت یک دایره کامل در نظر می‌گیریم.

$$I_x = \frac{1}{12}(2r)^3 \times 4r + \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{32+3\pi}{12}$$

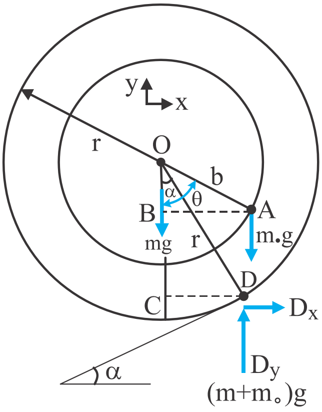


با توجه به تست ۵ فصل ۹ ممان اینرسی نیمدایره حول محوری که از مرکز سطح آن می‌گذرد (محور $\bar{y}$) برابر $I_{\bar{y}} = \frac{1}{8}\pi r^4 - \frac{8}{9\pi}r^4$ با استفاده از رابطه (۴-۹) داریم:

$$I_y = \frac{1}{12}(4r)^3 \times 2r + 2\left[\frac{1}{8}\pi r^4 - \frac{8}{9\pi}r^4 + \frac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{4r}{3\pi}+2r\right)^2\right] \Rightarrow I_y = \frac{192+51\pi}{12}$$

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{\frac{32+3\pi}{12}}{\frac{192+51\pi}{12}} \Rightarrow \frac{I_x}{I_y} = \frac{32+3\pi}{192+51\pi}$$

۴- گزینه (۲). در شکل نشان داده شده، زوایای $\widehat{AOB} = \theta$ و $\widehat{DOB} = \alpha$ می‌باشد. با در نظر پیکر آزاد حلقه و نوشتن معادلات تعادل در جهت x و y داریم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = 0 \ , \ \sum F_y = 0$$

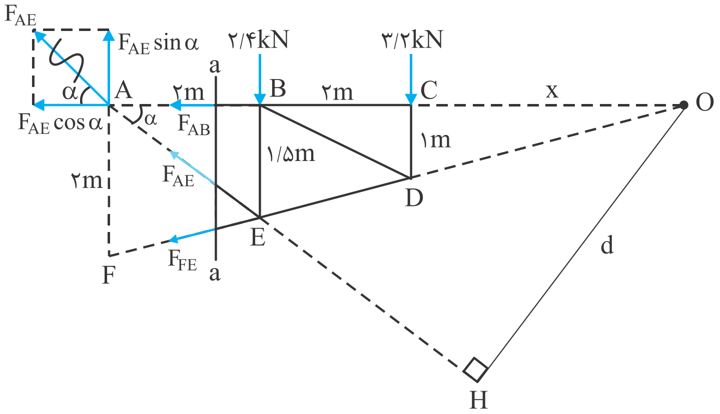
$$\Rightarrow D_y - mg - m_\circ g = 0 \Rightarrow D_y = (m+m_\circ)g$$

$$\sum M_O = 0 \ , \ m_\circ g\, AB - (m+m_\circ)g \times CD = 0$$

$$\Rightarrow m_\circ g \times b\sin\theta - (m+m_\circ)g \times r\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{(m_\circ + m)r}{m_\circ b}\sin\alpha$$

۵- گزینه (۱). در ذوزنقه ACDF ، B وسط AC است بنابراین $BE = \frac{CD+AF}{۲} = \frac{۱+۲}{۲} = ۱/۵\,m$ (هندسه) همچنین با توجه به تشابه مثلث OCD و OAF داریم،



$$\frac{x}{x+۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۴$$

$$ABE \text{ مثلث قائم‌الزاویه} : \tan\alpha = \frac{BE}{AB} = \frac{۱/۵}{۲} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱/۵}{\sqrt{(۱/۵)^۲+(۲)^۲}} = \frac{۱/۵}{۲/۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

برش $a-a$ را در نظر می‌گیریم، سپس گشتاور نیروهائی که به قسمت برش خوردهٔ خرپا وارد شده‌اند را حول نقطه O محل برخورد دو نیروی F_{BA} و F_{FE} بدست می‌آوریم. برای بدست آوردن F_{AE}، این نیرو را در راستای خود به نقطه A منتقل می‌کنیم و در آنجا به دو نیروی $F_{AE}\cos\alpha$ و $F_{AE}\sin\alpha$ تجزیه می‌نماییم. (به فصل ۳ نکته ۹ و توضیح و مثال بعد از آن رجوع شود)

$$\sum M_O = ۰ \ , \ F_{AE} \times \underbrace{\frac{۳}{۵}}_{\sin\alpha} \times \underbrace{۸}_{AO} - ۲/۴\times ۶ - ۳/۲ \times ۴ = ۰ \Rightarrow F_{AE} = ۵/۶۷\,kN \quad (۱)$$

توجه داشته باشید برای بدست آوردن گشتاور F_{AE} حول O می‌توان نیروی F_{AE} را در فاصله O از F_{AE}، (d)، ضرب نمود.

$$AHO \text{ مثلث قائم‌الزاویه} : d = AO\sin\alpha = ۸\times\frac{۳}{۵} = \frac{۲۴}{۵} \text{ و } M_O = F_{AE}d = \frac{۲۴}{۵}F_{AE}$$

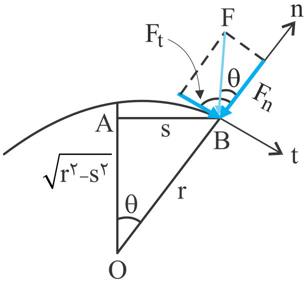
که برابر جمله اول رابطه (۱) می‌باشد.

۶- گزینه (۱).

$$\text{OAB مثلث قائم‌الزاویه} = \sin\theta = \frac{s}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{r^۲ - s^۲}}{r}$$

$$F_t = F\cos\theta = F\times\frac{\sqrt{r^۲ - s^۲}}{r} \Rightarrow F_t = -\frac{F\sqrt{r^۲ - s^۲}}{r}$$

$$F_n = F\sin\theta = F\times\frac{s}{r} \Rightarrow F_n = \frac{Fs}{r}$$



جهت تصویر نیرو F روی محور n ، (F_n) ، مخالف جهت محور n می‌باشد که با علامت منفی و جهت تصویر F روی محور t هم جهت با محور t مـی‌باشـد و بـا علامـت مثبـت نشـان داده شده‌اند.