

به نام خدا

مقدمه مؤلف

الکترومغناطیس از جمله درس‌های پایه‌ای در مهندسی برق می‌باشد، که با تلفیق مفاهیم فیزیکی و ابزارهای ریاضی، بستر مهمی در پیشرفت علوم جدید مهندسی مخابرات ایجاد کرده است. ساختارهای الکترومغناطیسی همانند محیط‌های پرپودیک، گرافن‌ها، متامتریال‌ها، پلازمونیک‌ها، فوتونیک کریستال‌ها، محیط‌های پیچیده، پنهان‌سازی اشیاء، مخابرات نوری و غیره از جمله مثال‌هایی هستند که از مفاهیم اولیه درس الکترومغناطیس حاصل شده‌اند و به عنوان مباحث الکترومغناطیسی پیشرفته در جامعه پیشرفته امروزی یاد می‌شوند. همه‌ی این ابداع‌ها و حوزه‌های جدید بواسطه‌ی آموزش صحیح و مفهومی است. با انگیزه‌ی آموزش مفهومی و تقویت سواد دانشجویان در مورد درس الکترومغناطیس و با فراهم کردن ابزارهای لازم برای این کار، تهیه و انتشار اولین ویدئو کتاب آموزشی در رشته مهندسی برق را انجام دادیم. مهمترین تفاوت کتاب حاضر با سایر منابع موجود، استفاده از آموزش تصویری و فیلم می‌باشد. در این کتاب در کنار هر مفهوم فیزیکی که به طور کامل تجزیه و تحلیل می‌شود یک انیمیشن یا فیلم کوتاه آموزشی وجود دارد که شما را بیشتر با موضوع و یا حل مسئله آشنا می‌کند. مفاهیم و نکات طوری آموزش داده شده که یک دانشجوی کارشناسی تازه کار در دنیای الکترومغناطیس نیز بتواند با لذت و بدون پیچیدگی خاصی مفاهیم را یاد گرفته و برای آزمون درسی آماده شود.

از جمله ویژگی‌های بارز ویدئو کتاب حاضر، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- درسنامه کامل و جذاب، به زبان ساده و مفهومی همراه با ارایه نکات خاص و روش‌های ابتکاری در حل تست‌ها
- ۲- استفاده از انیمیشن و فیلم‌های کوتاه در آموزش مفاهیم و حل تست‌های کنکور
- ۳- استفاده از کدگذاری در به خاطر سپردن آسان روابط مهم برای اولین بار در تدریس الکترومغناطیس، مثل تبدیل بردارهای یک دستگاه‌های مختلف بهم، تبدیل المان‌های دیفرانسیل سطحی بهم در آنالیز برداری، ارایه فرم‌های جدیدی از میدان الکتریکی ساختارهای با توزیع‌های پیوسته، میدان مغناطیسی توزیع جریان‌های مختلف و محاسبه اندوکتانس متقابل با روابط ابتکاری و غیره.
- ۴- استفاده از اشکال متنوع در بیان مفاهیم به منظوری یادگیری بهتر
- ۵- حل تشریحی و تستی سوال‌های کنکورهای کارشناسی ارشد، دکتری و تالیفی در هر فصل
- ۶- امکان حل تمرین و تست در بخش آخر هر فصل تحت عنوان آزمون فصل که شما را با مسائل جدیدتر روبرو می‌کند و مرجع مناسبی برای کسب درصدهای خیلی بالا است.
- ۷- ارائه‌ی روش‌های حذف گزینه (بررسی دیمانسیون و قضایای ریاضی مرتبط) و روش‌های حدی در حل تست‌های متنوع به منظور حل سریع سوالات در کنکور.

در کنار مهمترین بعد این کتاب که جنبه مولتی مدیا بودن آن است، در آموزش مفاهیم نیز برای اولین بار از روش‌های ابداعی و انحصاری زیادی استفاده شده که نمونه‌هایی از این مفاهیم در زیر قابل مشاهده است:

- روش ابتکاری در تبدیل بردارهای یک‌ه دستگانه‌های مختصات به هم (با روش حدی)
- روش ابتکاری در تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی دستگانه‌های مختصات مختلف
- معادله قطبی کره در حالت‌های مختلف
- روش ابتکاری در حل مسایل میدان با روش انتگرال اسکالر
- روش ابتکاری در معرفی فرم‌های مختلف میدان حلقه و دیسک بردار
- طبقه‌بندی نحوه استفاده از روش تعمیم در محاسبه میدان الکتریکی توزیع‌های پیوسته
- روش ابتکاری در طبقه‌بندی میدان قطاع‌های مختلف کره‌ی با بار سطحی یکنواخت
- تاملی درباره‌ی تقارن هندسی توزیع بارهای مختلف
- روش ابتکاری در تمایز پتانسیل و میدان
- روش ابتکاری انتگرال اسکالر در محاسبه پتانسیل توزیع‌های مختلف
- استفاده از روش تعمیم در محاسبه پتانسیل ساختارهای با توزیع پیوسته
- تفهیم کامل انرژی الکتریکی و اثبات روابط به صورت مرحله به مرحله
- تفهیم ساده در روابط چگالی انرژی بر حسب میدان و توزیع بارها
- حل مسایل محاسبه انرژی با چندین روش
- حذف گزینه مسائل انرژی الکتریکی از طریق بررسی دیمانسیون پارامترهای مختلف
- حفاظت از میدان الکتریکی با شیلدینگ فلزی
- طبقه‌بندی فرم قانون گوس در عایق‌ها
- شرایط مرزی در محیط‌های چند لایه و ارایه روابط بسته
- ارایه روابط میدان داخل استوانه و کره عایق در حضور میدان تابشی خارجی
- روش ابتکاری در محاسبه بارالفا شده سطحی روی کره هادی در معرض میدان خارجی
- ارایه فرمول ساختاری برای محاسبه خازن انواع ساختارها
- روش تصویر در حل مسایل الکترواستاتیک با تدریس گرافیکی و مفهومی
- طبقه‌بندی فرم‌های مختلف تصویر بار نقطه‌ای و توزیع‌های پیوسته در مجاورت کره‌ی هادی
- قضیه‌ی هم پاسخی گرین و استفاده از آن در محاسبه بارهای القایی در ساختارهای خازنی پیچیده
- طبقه‌بندی ارتباط بین مفاهیم الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک و بیان دوگانی بین پارامترهای مختلف
- توزیع جریان‌های مختلف و نحوه تشخیص آنها با تدریس گرافیکی
- نحوه تشخیص بردار یک‌ه مسیر جریان خطی با شکل‌های مختلف
- روش ابتکاری در معرفی فرم‌های مختلف میدان حلقه حامل جریان (دوقطبی مغناطیسی)
- تبدیلات مختلف سیستم‌های متحرک بردار به جریان‌های معادل

- استخراج روابط پتانسیل برداری از خاصیت دوگانی و روابط الکترواستاتیک
- روند محاسبه میدان مغناطیسی از روی بارهای مغناطیسی
- معرفی شرط مرزی در حضور PMC یا هادی مغناطیسی
- مقایسه شرایط مرزی الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک
- بیان دوگانی بین روابط نیرو - انرژی در الکترواستاتیک و مگنتواستاتیک
- روش ابتکاری در محاسبه اندوکتانس داخلی ساختارهای چندلایه
- محاسبه اندوکتانس داخلی و متقابل از روی انرژی مغناطیسی
- تفکیک منابع تولیدکننده میدان‌های ساکن و متغیر با زمان
- قانون لنز و تدریس گرافیکی آن
- حل تست‌های متنوع با روش‌های حذف گزینه و استفاده از روش ابتکاری تبدیل حدی ساختار
- ...

فهرست بالا مواردی است که نحوه آموزش آنها منحصر بفرد است و بازخورد خوبی در آسان کردن یادگیری مفاهیم الکترومغناطیس و حل تست‌های دشوار و در نتیجه افزایش درصدهای کسب شده توسط دانشجویها دارد.

امید است که این تلاش اندک، قطره‌ای به اقیانوس علم فیزیک و الکترومغناطیس در آموزش بیافزاید و شاهد بهبود یادگیری و پیشرفت دانشجویان و کسب درصدهای بالا در کنکور سراسری باشیم. از جناب آقای دکتر هژیر مدیر انتشارات پوران پژوهش که ایده‌ی استفاده از انیمیشن و فیلم در کتاب آموزشی اولین بار توسط ایشان پیشنهاد شد صمیمانه قدردانی می‌کنم. این کتاب را با افتخار به ساحت مقدس حضرت ولی عصر (عج) تقدیم می‌کنم.

ایمیل مولف: farhad.abbasnezhad@gmail.com

کانال تلگرام پشتیبانی علمی: @pouranem

بهار ۱۳۹۸

بودجه‌بندی سوال‌های کنکور کارشناسی ارشد و دکتری مهندسی برق

دکتری ۹۷	دکتری ۹۶	دکتری ۹۴	دکتری ۹۳	دکتری ۹۲	دکتری ۹۱	کنکور سرفصل
۰	۰	۰	۰	۰	۱	آنالیز برداری
۰	۱	۱	۱	۱	۳	میدان الکتریکی
۱	۱	۰	۱	۲	۰	پتانسیل الکتریکی
۱	۰	۱	۱	۳	۱	نیرو و انرژی الکتریکی
۴	۱	۲	۴	۱	۳	میدان در حضور اجسام، شرایط مرزی، خازن و مقاومت
۰	۱	۰	۰	۰	۱	قضیه تصویر
۰	۰	۲	۰	۱	۱	لاپلاس و پواسون
۰	۴	۱	۴	۳	۲	مغناطیس ساکن
۱	۱	۵	۳	۱	۳	میدان مغناطیسی در حضور اجسام
۳	۱	۳	۱	۴	۰	نیرو، انرژی و القای مغناطیسی

ارشد ۹۷	ارشد ۹۶	ارشد ۹۵	ارشد ۹۴	ارشد ۹۳	ارشد ۹۲	ارشد ۹۱	ارشد ۹۰	ارشد ۸۹	ارشد ۸۸	ارشد ۸۷	ارشد ۸۶	ارشد ۸۵	کنکور سرفصل
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	آنالیز برداری
۱	۰	۲	۱	۲	۲	۱	۴	۱	۱	۱	۱	۲	میدان الکتریکی
۰	۰	۰	۰	۲	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۱	پتانسیل الکتریکی
۲	۱	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۱	۲	۲	۲	۱	نیرو و انرژی الکتریکی
۳	۴	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۴	۲	۳	۲	۳	میدان در حضور اجسام، شرایط مرزی، خازن و مقاومت
۱	۰	۱	۱	۰	۱	۲	۰	۰	۱	۰	۰	۱	قضیه تصویر
۰	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	لاپلاس و پواسون
۲	۰	۱	۰	۳	۳	۲	۳	۲	۲	۴	۳	۳	مغناطیس ساکن
۱	۲	۲	۲	۱	۰	۲	۱	۲	۲	۱	۳	۲	میدان مغناطیسی در حضور اجسام
۲	۴	۳	۴	۲	۲	۱	۲	۳	۲	۲	۲	۱	نیرو، انرژی و القای مغناطیسی

فهرست مطالب

فصل اول. آنالیز برداری	۱
فصل دوم. میدان الکتریکی ساکن (الکترواستاتیک)	۵۹
فصل سوم. پتانسیل الکتریکی، انرژی، نیرو و	۱۵۵
فصل چهارم. هادی‌ها و جریان الکتریکی	۲۲۵
فصل پنجم. عایق‌ها و خازن‌ها	۲۸۷
فصل ششم. مسائل مقدار مرزی الکترواستاتیک	۳۸۹
فصل هفتم. میدان مغناطیسی ساکن در خلاء و	۴۸۳
فصل هشتم. میدان مغناطیسی ساکن در اجسام و	۵۷۵
فصل نهم. انرژی و القای مغناطیسی، میدان‌های متغیر با زمان	۶۴۵
آزمونهای سراسری ۹۷-۹۶ و دکتری ۹۷	۷۶۷

فصل ۱

آنالیز برداری

آنالیز برداری (پایه و اساس میدان‌های الکترومغناطیس)

- ۱ - ۱ مقدمه
- ۱ - ۲ اسکالر و بردار
- ۱ - ۳ قواعد ساده برداری
- ۱ - ۴ دستگاه‌های مختصات
- ۱ - ۵ تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی
- ۱ - ۶ معادله‌ی قطبی کره در حالت‌های مختلف
- ۱ - ۷ انتگرال‌های شامل توابع برداری
- ۱ - ۸ مشتق میدان‌های اسکالر و برداری
- ۱ - ۹ قضایای مهم در الکترومغناطیس
- ۱ - ۱۰ پیوست
- ۱ - ۱۱ تست‌های تکمیلی و پاسخ نامه

۱ - ۱ مقدمه

مباحث پدیده‌های الکترومغناطیسی مطرح شده در الکترومغناطیس را می‌توان در معادلات ماکسول خلاصه کرد:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

که در آن

$$\nabla = \text{عملگر مشتق‌گیری برداری}$$

$$\vec{D} = \text{چگالی شار الکتریکی}$$

$$\vec{B} = \text{چگالی شار مغناطیسی}$$

$$\vec{E} = \text{شدت میدان الکتریکی}$$

$$\vec{H} = \text{شدت میدان مغناطیسی}$$

$$\rho_v = \text{چگالی بار حجمی}$$

$$\vec{J} = \text{چگالی جریان}$$

ماکسول این معادلات را براساس دانسته‌های نظری و تجربی قبلی بیان کرد. نگاهی سریع به این معادلات نشان می‌دهند که با کمیات برداری سروکار داریم. پس منطقی است که در فصل اول کتاب به بررسی ابزارهای ریاضی لازم برای این درس بپردازیم.

۱-۲ اسکالر و بردار

هر کمیتی می‌تواند اسکالر یا برداری باشد.

کمیتی اسکالر است که فقط دارای اندازه بوده و جهت نداشته باشد. مثل: حجم، بار، پتانسیل

الکتریکی



کمیتی بردار است که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز باشد مثل: میدان، گشتاور، نیرو ...

البته یک دسته‌ی دیگر از کمیت‌های فیزیکی تانسور نامیده می‌شوند که کمیت‌های اسکالر و

برداری حالت‌های خاصی از آنها هستند.

نظریه‌ی الکترومغناطیس در واقع مطالعه‌ی چند میدان خاص است. میدان تابعی است که به هر نقطه‌ای از دامنه‌اش کمیتی نسبت می‌دهد. اگر این کمیت اسکالر (یا بردار) باشد. میدان را میدان اسکالر (یا برداری) می‌نامیم.

توزیع دما در اتاق، پتانسیل الکتریکی در یک ناحیه نمونه‌هایی از میدان‌های اسکالر هستند. نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی، سرعت قطرات باران در جو نمونه‌هایی از میدان‌های برداری هستند.

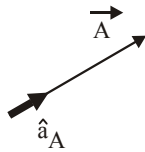
۱-۳ قواعد ساده برداری

۱-۳-۱ برداریکه یا واحد

بردار \vec{A} هم اندازه و هم جهت دارد. اندازه‌ی \vec{A} یک کمیت اسکالر است که با A یا $|\vec{A}|$ نشان داده می‌شود.

برداریکه \hat{a}_A در امتداد \vec{A} ، طبق تعریف برداری با اندازه‌ی واحد است که هم جهت با \vec{A} باشد

یعنی:



$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad |\hat{a}_A| = 1$$

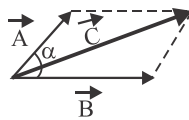
چون اندازه‌ی \hat{a}_A واحد است پس می‌توان \vec{A} را به صورت $\vec{A} = A\hat{a}_A$ نوشت، که \vec{A} را برحسب اندازه A و جهت \hat{a}_A به طور کامل مشخص می‌کند.

۱-۳-۲ جمع و تفریق بردارها

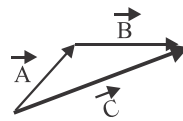
جمع و تفریق برداری به روش ترسیم، یا با استفاده از روش قطر متوازی الاضلاع یا قاعده‌ی دنبال هم‌گذاری انجام می‌شود.

✓ جمع دو بردار \vec{A} و \vec{B} :

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



روش قطر متوازی الاضلاع



روش دنبال هم‌گذاری

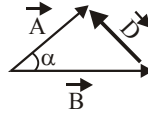
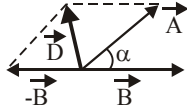
در روش دنبال هم‌گذاری بردار \vec{C} از اتصال ابتدای بردار \vec{A} به انتهای بردار \vec{B} حاصل می‌شود.

اندازه‌ی بردار \vec{C} براساس زاویه‌ی بین دو بردار \vec{A} و \vec{B} برابر است با:

$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

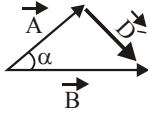
✓ تفریق دو بردار \vec{A} و \vec{B} :



روش قطر متوازی الاضلاع

روش دنبال هم‌گذاری

در تفریق به روش دنبال هم‌گذاری بردار \vec{D} از اتصال انتهای بردار دوم به انتهای بردار اول حاصل می‌شود. بنابراین بردار $\vec{B} - \vec{A}$ متفاوت از $\vec{A} - \vec{B}$ خواهد بود:



$$\vec{D}' = \vec{B} - \vec{A}$$

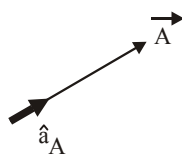
اندازه‌ی تفریق دو بردار \vec{A} و \vec{B} براساس زاویه‌ی بین آنها برابر است با:

$$|\vec{D}| = |\vec{D}'| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

۳-۳-۱ ضرب‌های برداری

ساده‌ترین ضرب در آنالیز برداری ضرب یک عدد (کمیت اسکالر) در بردار است که حاصل بردار می‌شود مثل:

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \begin{cases} \vec{E}, \vec{F} \text{ هم‌جهت} : q > 0 \\ \vec{E}, \vec{F} \text{ مخالف هم} : q < 0 \end{cases}$$



ضرب دو بردار \vec{A} و \vec{B} می‌تواند نتیجه‌ی اسکالر یا برداری داشته باشد و این به چگونگی عمل ضرب بستگی دارد. بنابراین دو نوع ضرب برداری وجود دارد:

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

(۱) ضرب داخلی یا نقطه‌ای:

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

(۲) ضرب خارجی یا برداری:

ضرب سه بردار \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} می‌تواند به یکی از دو شکل زیر باشد:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

(۳) ضرب سه گانه‌ی اسکالر

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

(۴) ضرب سه گانه‌ی برداری

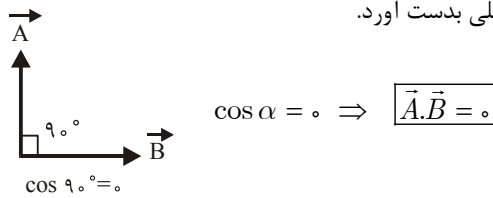
(۱) ضرب داخلی دو بردار $(\vec{A} \cdot \vec{B})$

طبق تعریف حاصلضرب اندازه‌های دو بردار \vec{A} و \vec{B} و کسینوس زاویه‌ی بین آنهاست. همچنین می‌توان گفت که حاصل این ضرب برابر است با اندازه‌ی یک بردار در تصویر بردار دوم روی همان بردار.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi$$

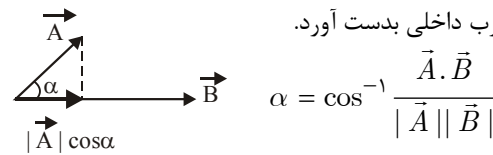
نکته

شرط تعامد دو بردار \vec{A} و \vec{B} را می‌توان از ضرب داخلی بدست آورد.



نکته

زاویه‌ی بین دو بردار \vec{A} و \vec{B} را می‌توان از تعریف ضرب داخلی بدست آورد.



قواعد زیر در مورد ضرب نقطه‌ای قابل اعمال است:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{الف) قاعده‌ی جابجایی}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad \text{ب) قاعده‌ی توزیع‌پذیری}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A^2 \quad \text{ج) ضرب داخلی یک بردار در خودش}$$

حاصلضرب داخلی دو بردار که در یک مختصات دلخواه قرار دارند برابر است با ضرب مولفه به مولفه‌ی آنها

$$\vec{A} = A_u \hat{u} + A_v \hat{v} + A_w \hat{w} \quad \vec{B} = B_u \hat{u} + B_v \hat{v} + B_w \hat{w} \rightarrow \begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = A_u B_u + A_v B_v + A_w B_w \\ \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A_u^2 + A_v^2 + A_w^2 \end{cases}$$

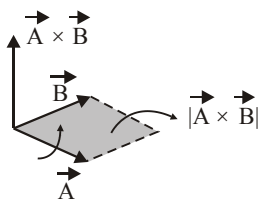
ضرب دو بردار واحد درهم را می‌توان از تعریف ضرب داخلی به صورت زیر نوشت:

$$\hat{a}_A \cdot \hat{a}_B = |\hat{a}_A| |\hat{a}_B| \cos \alpha_{AB} = \cos \alpha_{AB}$$

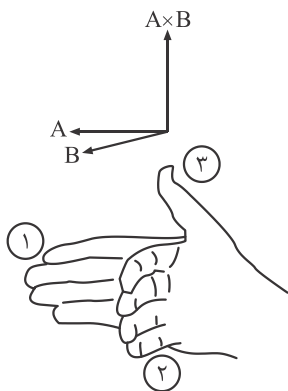
$$\hat{a}_A \cdot \hat{a}_A = |\hat{a}_A|^2 = 1$$

(۲) ضرب خارجی دو بردار ($\vec{A} \times \vec{B}$)

بردار است عمود بر صفحه‌ی شامل بردارهای \vec{A} و \vec{B} که اندازه آن برابر حاصلضرب اندازه‌های \vec{A} و \vec{B} و سینوس زاویه بین آنهاست و جهت آن از قاعده دست راست پیروی می‌کند. اندازه‌ی $\vec{A} \times \vec{B}$ را می‌توان گفت که با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط \vec{A} و \vec{B} نیز برابر است.



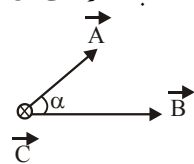
$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha_{AB}$$



شکل مقابل که به قاعده‌ی دست راست معروف است نحوه‌ی مشخص کردن جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ را نشان می‌دهد. مطابق شکل چهار انگشت دست راست در جهت بردار اولی که \vec{A} است قرار می‌گیرد طوری که کف دست راست به سمت بردار دوم یعنی \vec{B} باشد یا به عبارتی جهت چرخش چهار انگشت در وضعیت (۱) به سمت بردار \vec{B} باشد یعنی وضعیت (۲) در این صورت جهت انگشت شست جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ خواهد بود.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \text{حالت اول:}$$

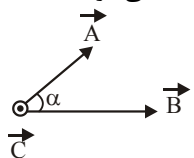
جهت بردار \vec{C} با استفاده از قانون دست راست به سمت داخل صفحه است که با علامت \otimes نشان داده می‌شود.



$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha_{AB}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \text{حالت دوم:}$$

در این حالت جهت \vec{C} به سمت خارج صفحه است که با علامت \odot نشان داده می‌شود.



$$|\vec{C}| = |\vec{B}| |\vec{A}| \sin \alpha_{AB}$$

ضرب خارجی دارای ویژگی‌های زیر است:

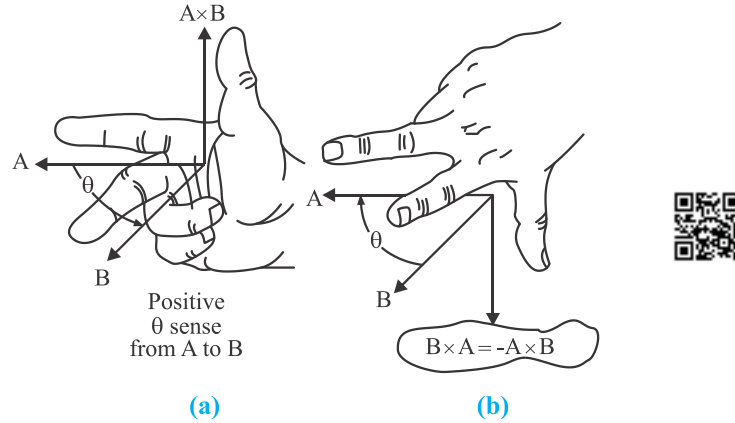
$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

الف) خاصیت جابجایی ندارد:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

بلکه پاد جابجایی است، یعنی





$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

(ب) شرکت پذیر نیست:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

(ج) روی جمع بخش پذیر است:

$$\vec{A} \times \vec{A} = \mathbf{0}$$

(د) ضرب خارجی یک بردار در خودش صفر است

نکته

ضرب خارجی دو بردار \vec{A} و \vec{B} واقع در یک دستگاه مختصات دلخواه به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{A} = A_u \hat{a}_u + A_v \hat{a}_v + A_w \hat{a}_w$$

$$\vec{B} = B_u \hat{a}_u + B_v \hat{a}_v + B_w \hat{a}_w$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_u & \hat{a}_v & \hat{a}_w \\ A_u & A_v & A_w \\ B_u & B_v & B_w \end{vmatrix} = \hat{a}_u (A_v B_w - A_w B_v) - \hat{a}_v (A_u B_w - A_w B_u) + \hat{a}_w (A_u B_v - A_v B_u)$$

۳) ضرب سه گانه‌ی اسکالر

ضرب سه گانه‌ی اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

این حاصلضرب را می‌توان با محاسبه‌ی ماتریس ۳ در ۳ تشکیل شده از \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} که در

یک دستگاه مختصات هستند به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_u & A_v & A_w \\ B_u & B_v & B_w \\ C_u & C_v & C_w \end{vmatrix} = \text{اسکالر}$$

۴) ضرب سه گانه برداری

برای بردارهای \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} می توان ضرب سه گانه برداری زیر را تعریف کرد:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

این ضرب با قاعده‌ی $bac - cab$ (بخوانید بک - کب) محاسبه می شود.

۱-۴-۴ دستگاه‌های مختصات

دستگاه مختصات متعامد دستگاه مختصاتی است که در آن خطوط مختصه دو به دو بر هم عمود باشند. دستگاه‌های مختصات کارتزین، استوانه‌ای، کروی، استوانه‌ای بیضوی، استوانه‌ای سهموی، مخروطی نمونه‌هایی از مختصات متعامد هستند که در این بین سه دستگاه مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی مهم‌ترین آنها هستند و اکثر مسائل الکترومغناطیس در این دستگاه‌ها قابل حل هستند.

۱-۴-۱ دستگاه مختصات کارتزین (قائم، مستطیلی و دکارتی)

یک نقطه در فضا را می توان با مختصه‌های (x, y, z) در دستگاه کارتزین نمایش داد. گستره‌ی

متغیرهای x ، y و z به صورت زیر است:

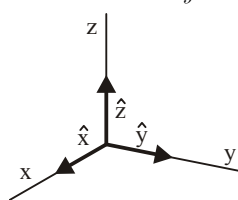
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

برداری \vec{A} در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر بیان می شود

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z \quad \text{یا} \quad (A_x, A_y, A_z)$$

اندازه‌ی بردار \vec{A} عبارت است از

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



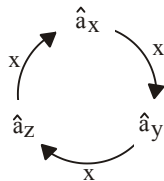
بردارهای واحد: عبارتند از \hat{a}_x ، \hat{a}_y و \hat{a}_z که همه از بعد متر و نماینده طول هستند.

به دلیل متعامد بودن صفحات، ضرب داخلی بردارهای یکه صفر خواهد بود:

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = 0, \quad \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0, \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$$

به دلیل راستگرد بودن سیستم ضرب خارجی بردارهای یکه با استفاده از جایگشت چرخشی

(ساعتگرد) حاصل می شود:



$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z$$

$$\hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x$$

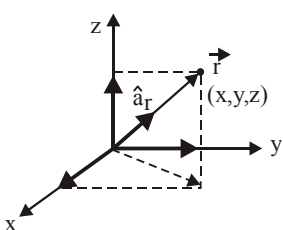
$$\hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

ضرب داخلی و خارجی بردارهای واحد:

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = 1, \quad \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = 1, \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = 0, \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_y = 0, \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

بردار مکان: برداری است که از اتصال مبدأ مختصات به نقطه مورد نظر بدست می‌آید و با r نشان می‌دهیم.



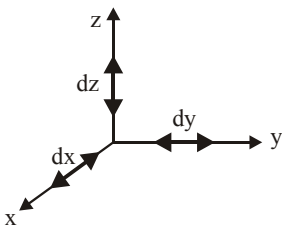
$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

عناصر دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی

المان طولی یا دیفرانسیل طولی، برداری از نقطه‌ی (x, y, z) به نقطه‌ی $(x + dx, y + dy, z + dz)$ است.

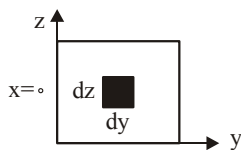


$$\vec{dl} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

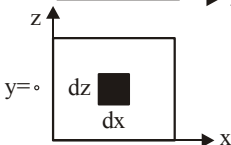
$$|\vec{dl}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

المان سطحی یا دیفرانسیل سطحی: \vec{ds}

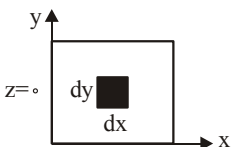
نحوه‌ی تعریف \vec{ds} مهم است. در حالت کلی المان سطحی را می‌توان به صورت $\vec{ds} = ds \hat{a}_n$ تعریف کرد که در آن ds مساحت عنصر سطح و \hat{a}_n برداری یک‌ه‌ی عمود بر سطح ds (و به سمت بیرون سطح) است. برای صفحات مختلف در دستگاه کارتزین مطابق شکل‌های زیر \vec{ds} را می‌توان نوشت:



$$\vec{ds}_x = dy dz \hat{a}_x$$

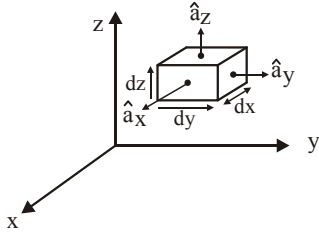


$$\vec{ds}_y = dx dz \hat{a}_y$$



$$\vec{ds}_z = dx dy \hat{a}_z$$

المان حجم:



برخلاف المان‌های طولی و سطحی این المان جهت ندارد.
 $dv = dx dy dz$

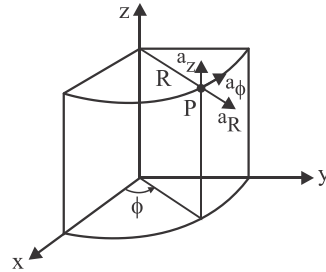
۱-۴-۲ دستگاه مختصات استوانه‌ای

دستگاه مختصات استوانه‌ای در مسائلی که تقارن استوانه‌ای دارند بسیار مناسب است. یک نقطه در فضا را می‌توان با مختصات مکانی $P(R, \varphi, z)$ در دستگاه استوانه‌ای نشان داد.

شعاع استوانه‌ای که از نقطه‌ی P می‌گذرد: R

زاویه بازشدگی از محور x^+ : φ

فاصله از صفحه xy : z



گستره‌ی متغیرها به صورت زیر است:

$$0 \leq R \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

بردار \vec{A} در دستگاه مختصات استوانه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\varphi \hat{a}_\varphi + A_z \hat{a}_z \quad \text{یا} \quad (A_R, A_\varphi, A_z)$$

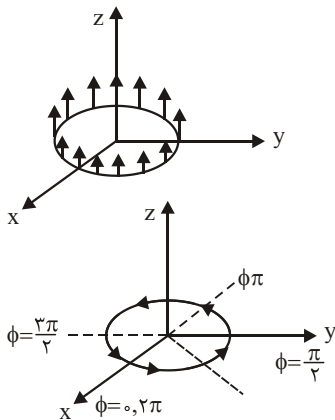
اندازه‌ی \vec{A} عبارت است از:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_R^2 + A_\varphi^2 + A_z^2}$$

بردارهای واحد: عبارتند از \hat{a}_R , \hat{a}_φ و \hat{a}_z

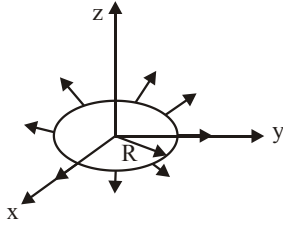
توجه: مولفه‌ی شعاعی را در مختصات استوانه‌ای با R و در مختصات کروی با r نشان خواهیم داد.

بردار \hat{a}_z بر سطح z ثابت است.



بردار \hat{a}_φ بر سطح φ ثابت است

$$0 < \varphi < 2\pi$$



\hat{a}_R بردار یکه عمود بر سطح R ثابت است.

نکته

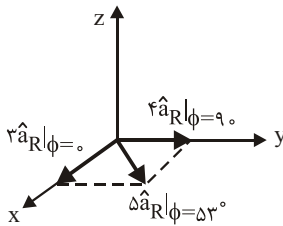
جمع بردارها در مختصات استوانه‌ای:

$2\hat{a}_R + 3\hat{a}_R = ?$

نمی‌توان جواب داد چون باید نقطه شروع بردارها برای ما مشخص بشه در مختصات کروی نیز این نکته صادق است.

\hat{a}_ϕ و \hat{a}_R با توجه به شکل‌های بالا، جهت ثابتی ندارند.

اما:

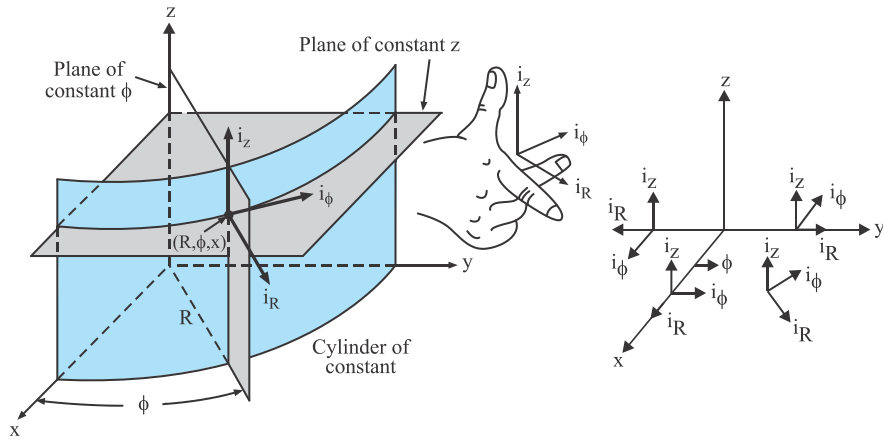


$3\hat{a}_R|_{\phi=0} + 4\hat{a}_R|_{\phi=90} = 5\hat{a}_R|_{\phi=53}$

$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{4}{3} = 53$

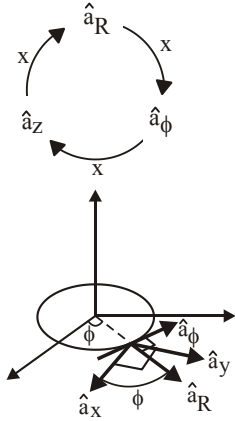
$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

توجه: به غیر از بردار واحد \hat{a}_z ، بردارهای واحد \hat{a}_ϕ و \hat{a}_R جهتشان متغیر بوده و بستگی به نقطه‌ای دارد که بردار \vec{A} از آن نقطه رسم می‌شود. به عبارت دیگر بردارهای واحد \hat{a}_R ، \hat{a}_ϕ تابع ϕ می‌باشند. ✓ به دلیل متعامد بودن صفحات، ضرب داخلی بردارهای یکه صفر هستند.



$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_\phi = 0$
 $\hat{a}_R \cdot \hat{a}_z = 0$
 $\hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_R = 0$

✓ به دلیل راستگرد بودن سیستم، ضرب خارجی بردارهای یکه از جایگشت چرخشی (راستگرد) حاصل می‌شود.



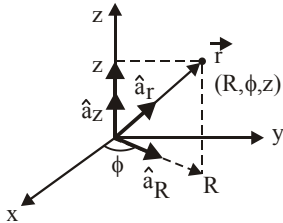
$$\begin{aligned}\hat{a}_R \times \hat{a}_\phi &= \hat{a}_z, & \hat{a}_\phi \times \hat{a}_R &= -\hat{a}_z \\ \hat{a}_\phi \times \hat{a}_z &= \hat{a}_R, & \hat{a}_z \times \hat{a}_\phi &= -\hat{a}_R \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_R &= \hat{a}_\phi, & \hat{a}_R \times \hat{a}_z &= -\hat{a}_\phi\end{aligned}$$

✓ ضرب خارجی بردارهای واحد استوانه‌ای و کارترین:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha_{AB}$$

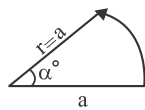
$$\begin{aligned}\hat{a}_R \times \hat{a}_x &\Rightarrow \begin{cases} |\hat{a}_R| |\hat{a}_x| \sin \varphi_{Rx} = \sin \varphi (-\hat{a}_z) \\ (\cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y) \times \hat{a}_x = \sin \varphi (-\hat{a}_z) \end{cases} \\ \hat{a}_R \times \hat{a}_y &\Rightarrow \begin{cases} |\hat{a}_R| |\hat{a}_y| \sin \varphi_{Ry} = \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \hat{a}_z = \cos \varphi \hat{a}_z \\ (\cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y) \times \hat{a}_y = \cos \varphi \hat{a}_z \end{cases} \\ \hat{a}_\phi \times \hat{a}_x &\Rightarrow \begin{cases} |\hat{a}_\phi| |\hat{a}_x| \sin \varphi_{\phi x} = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \hat{a}_z \triangleq \cos \varphi (-\hat{a}_z) \\ (-\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y) \times \hat{a}_x = \cos \varphi (-\hat{a}_z) \end{cases} \\ \hat{a}_\phi \times \hat{a}_y &\Rightarrow \begin{cases} |\hat{a}_\phi| |\hat{a}_y| \sin \varphi_{\phi y} \triangleq \sin \varphi (-\hat{a}_z) \\ (-\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y) \times \hat{a}_y = -\sin \varphi \hat{a}_z \end{cases}\end{aligned}$$

بردار مکان:

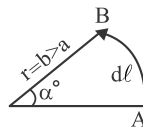


$$\begin{aligned}\vec{r} &= R\hat{a}_R + z\hat{a}_z \\ |\vec{r}| &= \sqrt{R^2 + z^2} \\ \hat{a}_r &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{R\hat{a}_R + z\hat{a}_z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\end{aligned}$$

عناصر دیفرانسیل طولی، سطحی و حجمی:



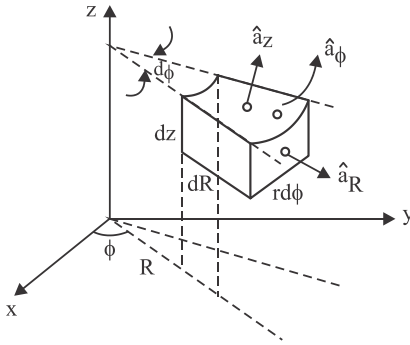
مسیر طی شده
به اندازه α°



مکان طی شده با همان
زاویه α°

نتیجه: شعاع کمان خیلی مهم است، پس اینجا R یک ضریب تبدیل کننده است و $d\alpha$ را که از جنس رادیان است، به طول تبدیل می کند

$$dl = R d\alpha$$



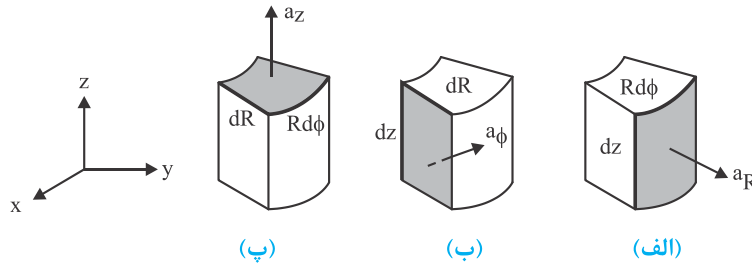
المان طولی یا دیفرانسیل طولی:

$$\vec{dl} = dR \hat{a}_R + Rd\phi \hat{a}_\phi + dz \hat{a}_z$$

$$|\vec{dl}| = \sqrt{(dR)^2 + (Rd\phi)^2 + (dz)^2}$$

المان سطحی:

در شکل زیر المانهای سطحی متناظر با بردارهای یکه استوانه‌ای قابل مشاهده است.



الف) $\vec{ds}_R = (Rd\phi)(dz)\hat{a}_R = Rd\phi dz \hat{a}_R$ صفحه R ثابت

ب) $\vec{ds}_\phi = (dR)(dz)\hat{a}_\phi = dR dz \hat{a}_\phi$ صفحه ϕ ثابت

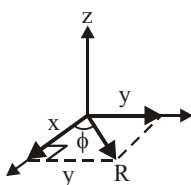
پ) $\vec{ds}_z = (dR)(Rd\phi)\hat{a}_z = RdR d\phi \hat{a}_z$ صفحه z ثابت

المان حجمی: به صورت ضرب هر سه المان طولی در هم می باشد.

$$dv = RdR d\phi dz$$

نکته

تبدیل پارامترهای استوانه‌ای و کارتزین و بالعکس:



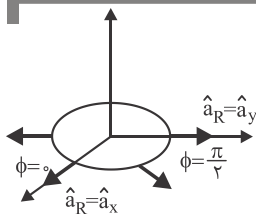
$x = R \cos \phi$ $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ← فیثاغورث

$y = R \sin \phi$ $\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

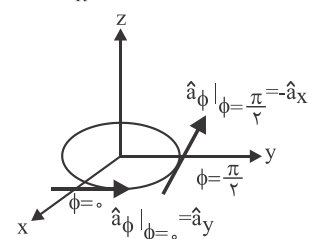
$(R, \phi, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), z\right)$

نکته

تبدیل بردارهای یکه استوانه‌ای به کارترین با استفاده از تکنیک هندسی:



$$\hat{a}_R = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y$$

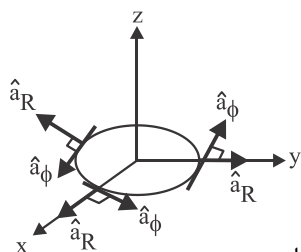


$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y$$

نکته

روش طلایی محاسبه \hat{a}_φ از روی \hat{a}_R :

با توجه به شکل زیر مشخص است که در هر نقطه روی محیط استوانه (سطح مقطع آن) بردار یکه‌ی \hat{a}_φ نسبت به \hat{a}_R به 90° درجه جلوتر است. بنابراین از این واقعیت می‌توان استفاده کرد و از روی \hat{a}_R را استخراج کرد:



$$\hat{a}_\varphi = \hat{a}_R \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \left(\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

یا

$$\hat{a}_\varphi = \frac{d}{d\varphi} \hat{a}_R$$

توجه شود که اختلاف فاز 90° درجه بین دو بردار متعامد به منزله‌ی مشتق است.

$$\begin{aligned} \hat{a}_R = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y &\xrightarrow{\varphi + \frac{\pi}{2}} \hat{a}_\varphi = \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \hat{a}_x + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \hat{a}_y \\ &= -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \end{aligned}$$

$$\hat{a}_R = \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y \xrightarrow{\frac{d}{d\varphi}} \hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y$$

نکته

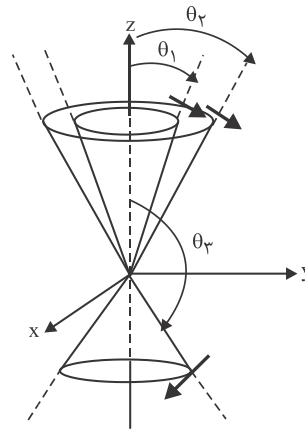
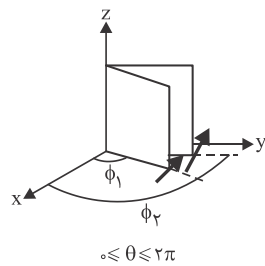
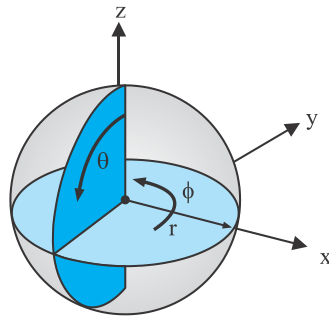
تبدیل بردارهای واحد \hat{a}_R و \hat{a}_φ به خصوص وقتی در عبارتی که باید از آن انتگرال گرفته شود ظاهر شوند، ضرورت پیدا می‌کند، چون بردارهای اشاره شده ثابت نیستند و با φ تغییر می‌کنند.

۳-۴-۱ دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات کروی برای مسائل، دارای تقارن کروی بسیار مناسب است. مختصات هر نقطه در فضا را می‌توان با مشخصات دستگاه کروی به صورت $P(r, \theta, \varphi)$ نشان داد. r فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مبدأ یا شعاع کره‌ای به مرکز مبدأ که از نقطه‌ی P می‌گذرد، می‌باشد. θ زاویه‌ی بین محور z^+ و بردار مکان نقطه‌ی P است؛ و φ (همانند دستگاه مختصات استوانه‌ای) نسبت به محور x اندازه‌گیری می‌شود. براساس این تعاریف، محدوده‌ی متغیرهای دستگاه مختصات کروی به صورت زیر است:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

در شکل‌های زیر می‌توان به راحتی مختصات r ، θ و φ را مشاهده کرد.

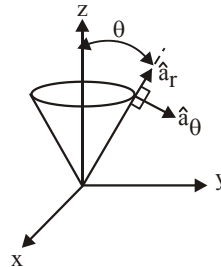
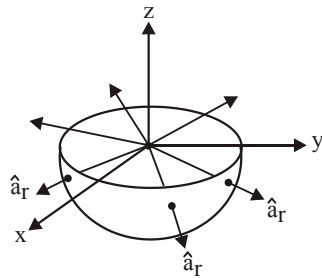


θ زاویه بازشدگی از محور z^+ است
 $0 \leq \theta \leq \pi$

بردارهای واحد: عبارتند از \hat{a}_r ، \hat{a}_θ و \hat{a}_φ

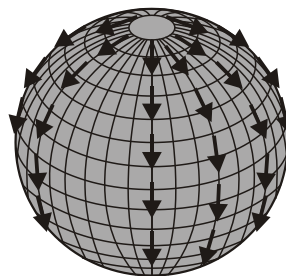
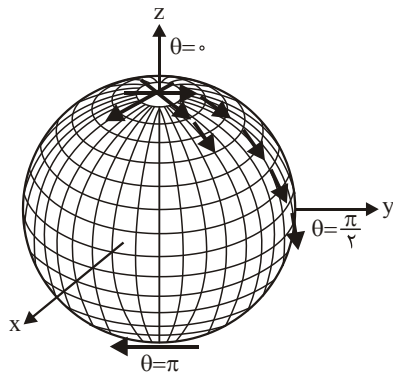
\hat{a}_r در امتداد شعاعی و در جهت افزایش r است. \hat{a}_θ در جهت افزایش θ و \hat{a}_φ در جهت

افزایش φ است.



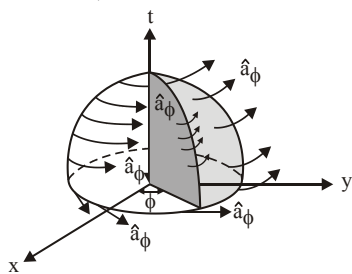
با توجه به شکل زیر و جهت گیری \hat{a}_φ در نقاط مختلف روی سطح کره می توان این بردار یکه را

بر حسب بردارهای یکه کارترین نوشت:



$$\textcircled{a} \theta = 0 : \hat{a}_\theta = \begin{cases} \hat{a}_x & \varphi = 0 \\ \hat{a}_y & \varphi = \frac{\pi}{2} \\ -\hat{a}_x & \varphi = \pi \\ -\hat{a}_y & \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ یا } -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{a} \theta = \frac{\pi}{2} : \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$$



✓ \hat{a}_φ کروی همان \hat{a}_φ استوانه ای است.

ϕ زاویه بازشدگی از محور x^+ است.

✓ به دلیل متعامد بودن صفحات، بردارهای یکه دو به دو برهم عمود هستند:

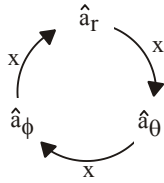
$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\varphi = 0$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta = 0$$

$$\hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\varphi = 0$$

✓ به دلیل راستگرد بودن دستگاه مختصات، ضرب خارجی بردارهای یکه در هم از جایگشت

چرخشی حاصل می شود.

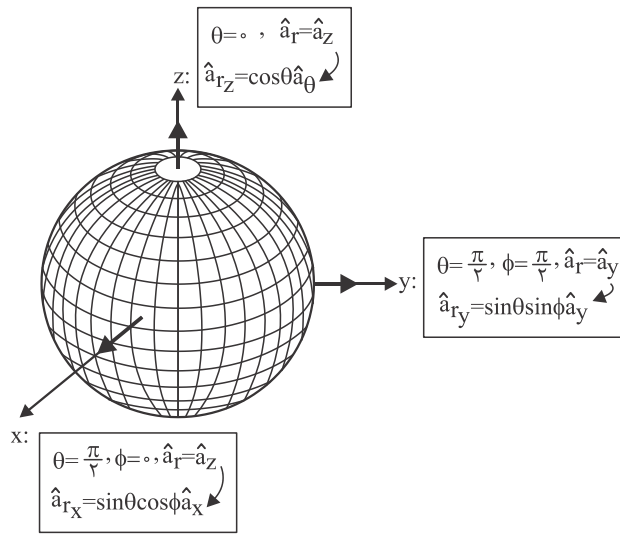


$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi, \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_r = -\hat{a}_\phi$$

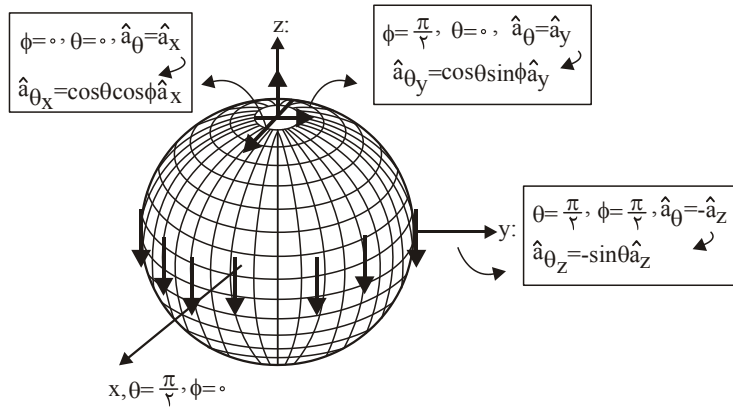
$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_r, \quad \hat{a}_\phi \times \hat{a}_\theta = -\hat{a}_r$$

$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_r = \hat{a}_\theta, \quad \hat{a}_r \times \hat{a}_\phi = -\hat{a}_\theta$$

نحوه‌ی نوشتن بردارهای یکه کروی بر حسب کارتزین: تکنیک طلایی هندسی



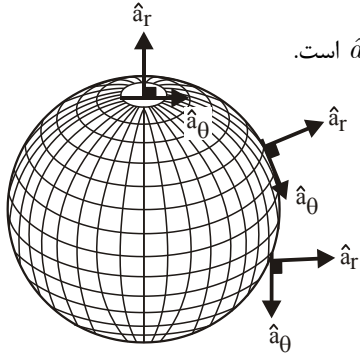
$$\hat{a}_r = \sin\theta \cos\phi \hat{a}_x + \sin\theta \sin\phi \hat{a}_y + \cos\theta \hat{a}_z$$



$$\hat{a}_\theta = \cos\theta \cos\phi \hat{a}_x + \cos\theta \sin\phi \hat{a}_y - \sin\theta \hat{a}_z$$

نکته

روش ساده در استخراج مولفه‌ی \hat{a}_θ از روی \hat{a}_r : (استفاده از هندسه‌ی مسئله)
در هر نقطه روی سطح کره بردار \hat{a}_θ به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ جلوتر از \hat{a}_r است.



$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_r \left(\theta \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1)$$

$$\hat{a}_\theta = \frac{d}{d\theta} \hat{a}_r \quad (2)$$

بنابراین می‌توان با دو روش شیفت فاز $\frac{\pi}{2}$ یا مشتق‌گیری نسبت به θ ، \hat{a}_θ را از روی \hat{a}_r بدست آورد.

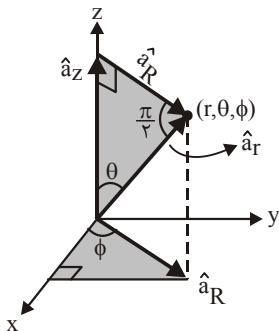
$$\hat{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z$$

$$(1) \rightarrow \theta + \frac{\pi}{2} : \hat{a}_\theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \hat{a}_z$$

$$(2) \rightarrow \frac{d}{d\theta} : \hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z$$

تبدیل بردارهای یک‌کروی به استوانه‌ای:

با توجه به شکل زیر و زوایای بین بردارهای یک‌کروی می‌توان این تبدیلات را استخراج کرد:



$$\begin{cases} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_r = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta \\ \hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \hat{a}_r = \sin \theta \hat{a}_R + \cos \theta \hat{a}_z$$

$$\begin{cases} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_R = \sin \theta \\ \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \hat{a}_r = \sin \theta \hat{a}_R + \cos \theta \hat{a}_z$$

همچنین اشاره شد که با مشتق‌گیری از \hat{a}_r نسبت به θ ، \hat{a}_θ بدست می‌آید، که به راحتی

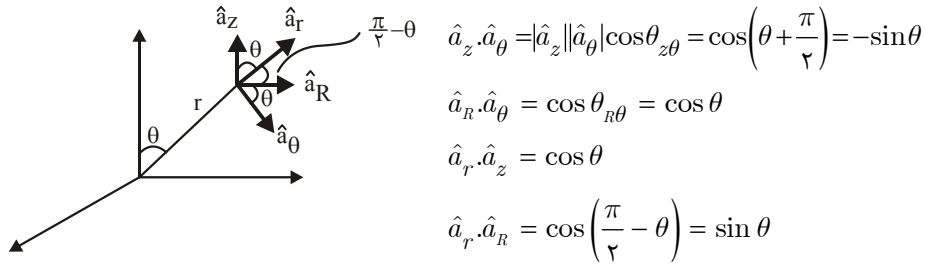
براساس بردارهای یک‌کروی قابل نوشتن است:

$$\hat{a}_\theta = \frac{d}{d\theta} \hat{a}_r = \cos \theta \hat{a}_R - \sin \theta \hat{a}_z$$

از طرفی پیش‌تر گفتیم که مختصه φ در هر دو دستگاه استوانه‌ای و کروی تعریف یکسانی دارد: $\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y$ استوانه‌ای

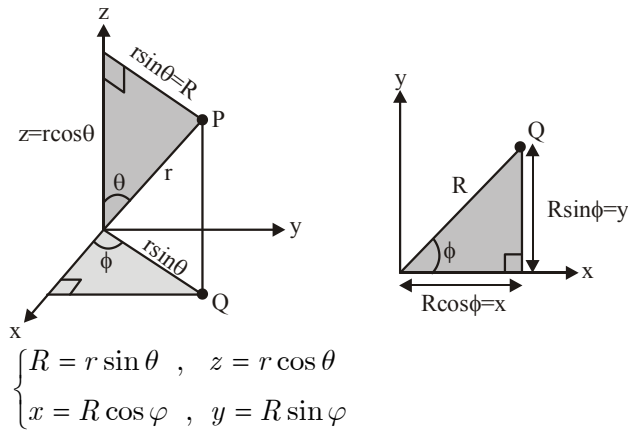
نکته

شکل زیر در پیدا کردن ارتباط بین بردارهای یکه کروی و استوانه‌ای کمک زیادی می‌کند.



نکته

با استفاده از شکل‌های زیر براحتی می‌توان متغیرهای (x, y, z) ، (R, φ, z) و (r, θ, φ) را بهم تبدیل کرد:



در نتیجه:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{R} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

تبدیل مختصات کارتیزین به کروی:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{یا} \quad \sqrt{R^2 + z^2} \quad \text{و} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad ; \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

نکته

بردارهای یکه کروی برحسب مختصات مکانی (طولی) در کارتیزین و استوانه‌ای

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{cases} \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{r} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{کارتیزین} \\ \frac{R\hat{a}_R + z\hat{a}_z}{r}, R\hat{a}_R = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y & \text{استوانه‌ای} \end{cases}$$

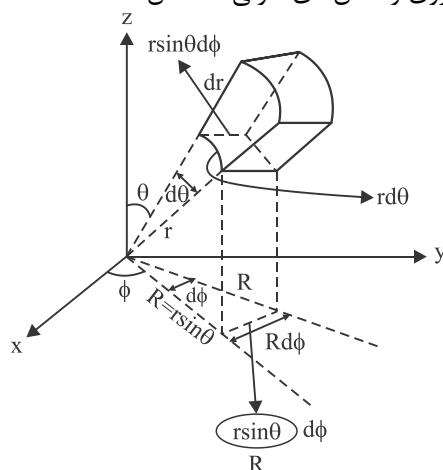
$$\hat{a}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y = -\frac{y}{R} \hat{a}_x + \frac{x}{R} \hat{a}_y$$

$$\hat{a}_\theta = -\sin \theta \hat{a}_z + \cos \theta \hat{a}_R = \frac{-R}{r} \hat{a}_z + \frac{z}{r} \hat{a}_R$$

المان‌های طولی، سطحی و حجمی در مختصات کروی:

در شکل زیر متغیرهای کروی و المان‌های طولی مشخص شده‌اند:



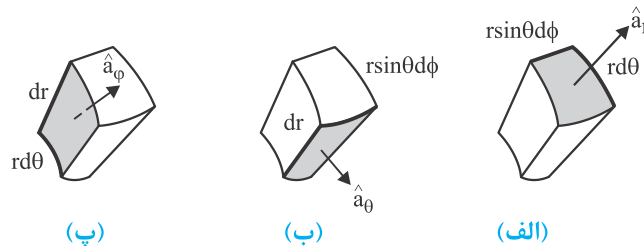
✓ المان طول در راستای r : dr (از جنس متر)
 ✓ المان طول در راستای θ : $rd\theta$ (طولی که زاویه $d\theta$ را جاروب می‌کند r است)
 توجه کنید که $d\theta$ به تنهایی از جنس متر نیست و ضرب r باعث می‌شود که به المان طولی تبدیل شود.

✓ المان طول در راستای φ : $Rd\varphi = r \sin \theta d\varphi$
 (طولی که زاویه $d\varphi$ را جاروب می‌کند، R استوانه‌ای یا به عبارتی $r \sin \theta$ است و این ضرب باعث می‌شود که $d\varphi$ به المان طولی و از جنس متر تبدیل شود)
 پس:

$$\overline{dl} = dr\hat{a}_r + rd\theta\hat{a}_\theta + r \sin \theta d\varphi\hat{a}_\varphi, \quad |\overline{dl}| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$$

المان سطحی:

در شکل زیر هر سه المان سطحی متناظر با بردارهای یک‌ه‌ی کروی قابل مشاهده است.



الف) $\overline{ds}_r = (rd\theta)(r \sin \theta d\varphi)\hat{a}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{a}_r$
 ب) $\overline{ds}_\theta = (r \sin \theta d\varphi)(dr)\hat{a}_\theta = r \sin \theta dr d\varphi \hat{a}_\theta$
 پ) $\overline{ds}_\varphi = dr(rd\theta)\hat{a}_\varphi = rd r d\theta \hat{a}_\varphi$

المان حجمی

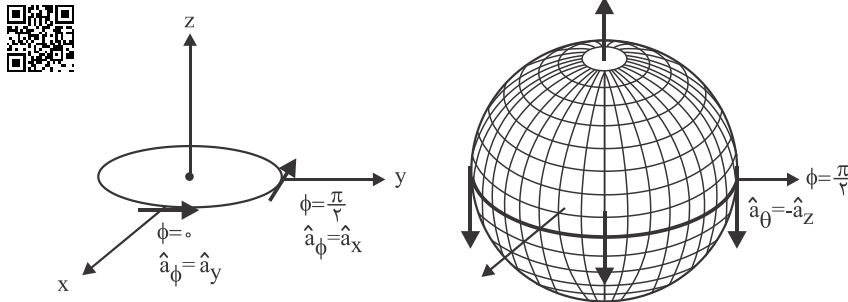
از ضرب هر سه المان طولی در مختصات کروی حاصل می‌شود و جهت ندارد.

$$dv = (dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

۵-۱ تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی (روش طلایی و نوین)

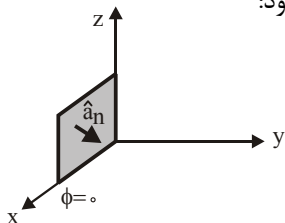
در این بخش روش جدیدی ارائه می‌شود تا در مسائل میدانی و در حل انتگرال‌های سطحی موقعی که بردار میدانی در دستگاه مختصات (i) بوده ولی مسیر یا سطح انتگرال‌گیری منطبق بر

دستگاه مختصات (ii) است، بتوان با تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی بین دستگاه‌ها مسئله را به راحتی حل کرد. در ادامه این تبدیل‌ها که متناظر با صفحات مرزی دستگاه‌های مختصات صورت می‌گیرد به طور گرافیکی ارائه می‌شود.

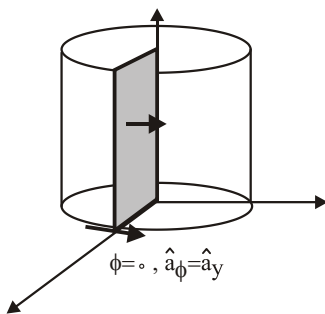


همانطور که می‌دانیم \hat{a}_φ در صفحات $\varphi = 0$ و $\varphi = \frac{\pi}{4}$ به ترتیب برابر است با \hat{a}_y و $-\hat{a}_x$ (مطابق شکل سمت چپ) بنابراین ds مربوط به \hat{a}_φ در این صفحات برابر $-ds_x$ و ds_y خواهد بود. همچنین در صفحه $\theta = \frac{\pi}{4}$ یا صفحه xy ، \hat{a}_θ برابر است با $-\hat{a}_z$ (مطابق شکل سمت راست)، بنابراین ds_θ در صفحه $z = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{4}$ برابر است با $-ds_z$. این تبدیلات در دستگاه‌های سه گانه قابل تبدیل هستند.

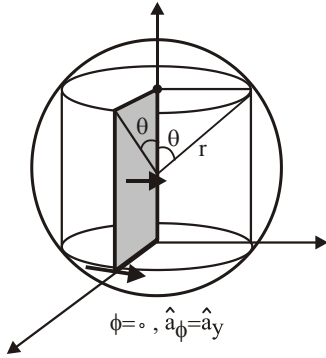
در صفحه $\varphi = 0$ تبدیلات مورد نظر به صورت‌های زیر خواهد بود:



$$\vec{ds}_y = dx dz \hat{a}_y$$



$$\vec{ds}_\varphi = dR dz \hat{a}_\varphi \Big|_{\varphi=0}$$



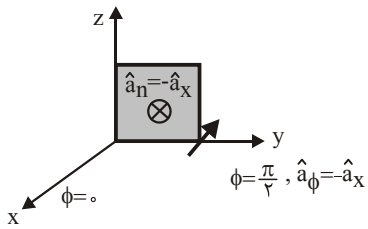
$$\overrightarrow{ds}_\varphi = r dr d\theta \hat{a}_\varphi \Big|_{\varphi=0}$$

می‌توان تبدیلات گرافیکی را به صورت روابط زیر در $\varphi = 0$ جمع‌بندی کرد:

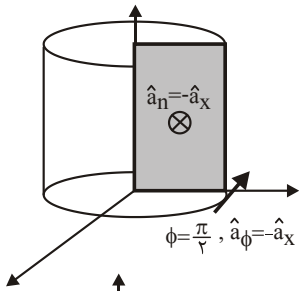
$$\varphi = 0 \rightarrow \hat{a}_\varphi = \hat{a}_y$$

$$\overrightarrow{ds}_y = dx dz \hat{a}_y \xleftrightarrow{\varphi=0} \overrightarrow{ds}_\varphi : \begin{cases} dR dz \hat{a}_\varphi, \varphi = 0 & \text{استوانه‌ای} \\ r dr d\theta \hat{a}_\varphi, \varphi = 0 & \text{کروی} \end{cases}$$

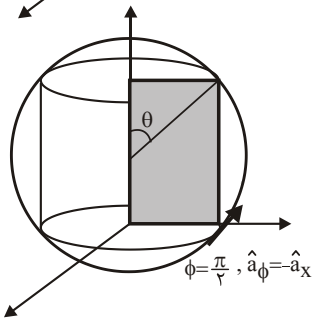
مشابه $\varphi = 0$ برای $\varphi = \frac{\pi}{2}$ نیز می‌توان این تبدیل را انجام داد:



$$\overrightarrow{ds}_x = dy dz \hat{a}_x$$



$$\overrightarrow{ds}_\varphi = dR dz \hat{a}_\varphi \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$



$$\overrightarrow{ds}_\varphi = r dr d\theta \hat{a}_\varphi$$

در نتیجه در $\varphi = \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$$

$$\overrightarrow{ds}_x = dydz \hat{a}_x \xleftrightarrow{\varphi = \frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds}_\varphi = \begin{cases} -dR dz \hat{a}_\varphi, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ استوانه‌ای} \\ -r dr d\theta \hat{a}_\varphi, & \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ کروی} \end{cases}$$

به طور مشابه برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ می‌توان نوشت:

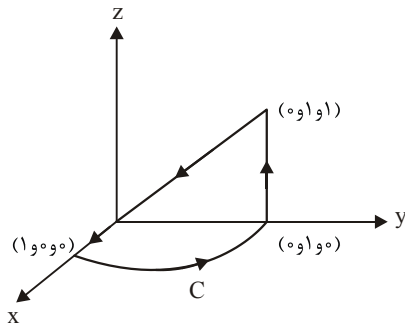
$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$$

$$\overrightarrow{ds}_z = \begin{cases} dydx \hat{a}_z \\ R dR d\varphi \hat{a}_z \end{cases} \xleftrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} \overrightarrow{ds}_\theta = -r \sin \theta dr d\varphi \hat{a}_\theta = -r dr d\varphi \hat{a}_\theta, \theta = \frac{\pi}{2}$$

به عنوان کاربردی از این تبدیلات در ادامه نمونه تستی حل می‌شود.

تست ۱: انتگرال میدان $\vec{A} = 3 \cot \theta \hat{a}_r - 6 \hat{a}_\theta$ روی سطح حاصل از مسیر بسته مشخص شده در

شکل زیر کدام است؟



$$\int_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$-\pi \quad (2)$$

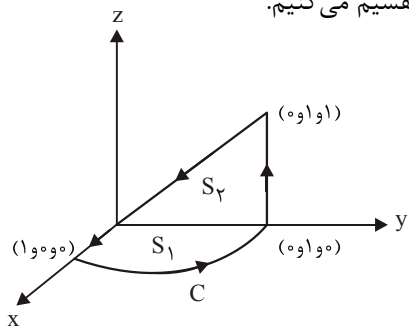
$$\frac{3\pi}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

پاسخ: \vec{A} در مختصات کروی است ولی S_1 و S_2 به ترتیب در مختصات استوانه‌ای و کارتزین

است پس می‌توان از نکات اشاره شده استفاده کرد و کل پارامترها را به یک مختصات انتقال داد.

سطح تشکیل شده از مسیر C را به دو سطح S_1 و S_2 تقسیم می‌کنیم.



$$S = S_1 + S_2$$

$$I = \int_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2$$

$$S_1 \text{ سطح: } @ z = 0 \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$$

$$\rightarrow d\vec{s}_1 = R dR d\varphi \hat{a}_z \xleftrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} d\vec{s}_\theta = -r dr d\varphi \hat{a}_\theta$$

$$S_2 \text{ سطح: } @ \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad x = 0, \quad \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$$

$$\rightarrow d\vec{s}_2 = dy dz \hat{a}_x \xleftrightarrow{\varphi = \frac{\pi}{2}} d\vec{s}_\varphi = -r dr d\theta \hat{a}_\varphi$$

$$\int_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 = \int (\varphi \cot \theta \hat{a}_r - \epsilon \hat{a}_\theta) \cdot (-r dr d\varphi \hat{a}_\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \epsilon r dr d\varphi$$

$$= \epsilon \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\varphi \pi}{2}$$

$$\int_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = \iint (\varphi \cot \theta \hat{a}_r - \epsilon \hat{a}_\theta) \cdot (-r dr d\theta \hat{a}_\varphi) = 0$$

$$I = \frac{\varphi \pi}{2} + 0 = \frac{\varphi \pi}{2}$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

طبقه‌بندی روابط بین بردارهای یک‌دیگر در سه دستگاه مختصات:

کارترین استوانه‌ای	\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}
\hat{R}	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	۰
$\hat{\varphi}$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	۰
\hat{z}	۰	۰	۱

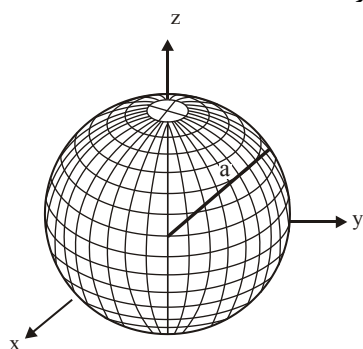
کارترین کروی	\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}
\hat{r}	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
$\hat{\theta}$	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$
$\hat{\varphi}$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	۰

استوانه‌ای کروی	\hat{R}	$\hat{\varphi}$	\hat{z}
\hat{r}	$\sin \theta$	\circ	$\cos \theta$
$\hat{\theta}$	$\cos \theta$	\circ	$-\sin \theta$
$\hat{\varphi}$	\circ	1	\circ

۶-۱ معادله‌ی قطبی کره در حالت‌های مختلف:

در بعضی از مسائل الکترومغناطیس و حل انتگرال‌های میدانی بهتر است مختصات مکانی یک کره به صورت قطبی بیان شود تا سرعت حل تست بالا رود. در این بخش می‌خواهیم معادله‌ی کره‌ای به شعاع a که مرکز آن در نقطه‌ای دلخواه روی محورهای مختصات کارتزین قرار گرفته را به صورت فرم کلی $r = Af(\theta)g(\varphi)$ بنویسیم. در ادامه حالات مختلف بررسی می‌شود. ابتدا از معادله‌ی استاندارد کره یعنی $a^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ به فرم قطبی اشاره شده می‌رسیم که در آن $A = r_{\max}$ (دورترین نقطه‌ی سطح کره از مبدأ مختصات) است.

(۱) کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات:

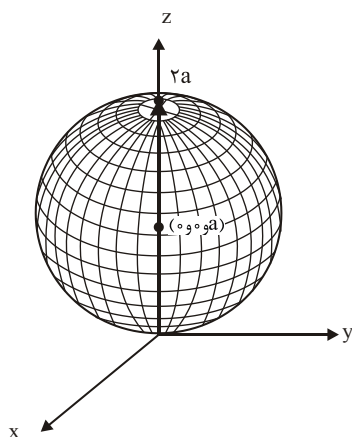


$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$r^2 = a^2 \rightarrow r = a$$

(۲) کره‌ای به مرکز $(0, 0, a)$:

برای این کره دورترین نقطه از سطح کره تا مبدأ مختصات به اندازه‌ی $2a$ است بنابراین $A = 2a$ می‌باشد. با دو روش می‌توان فرم قطبی را استخراج کرد.



الف) استفاده از فرم کارتزین و تبدیل به قطبی:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

$$r^2 = 2a(r \cos \theta) \rightarrow r = 2a \cos \theta$$

ب) مشخص کردن $f(\theta)$ ، $g(\varphi)$ و A از روی شکل:

توجه کنید چون در $\theta = 0$ داریم $r = 2a$ بنابراین تابعیت از θ به صورت \cos خواهد بود

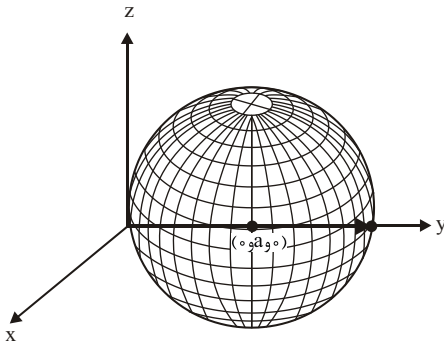
$$f(\theta)|_{\theta=0} = 1 \rightarrow f(\theta) = \cos \theta$$

با $r = 2a$ و $\theta = 0$ مشخص شده است و φ نقشی ندارد پس مستقل از φ خواهد بود.

$$r = 2a \cos \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

همانطور که دیده می‌شود روش ۲ به مراتب آسانتر بوده و سریع‌تر ما را به جواب می‌رساند.

۳) کره‌ای به مرکز $(0, a, 0)$:



$$r_{\max} = A = 2a|_{\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{2}}$$

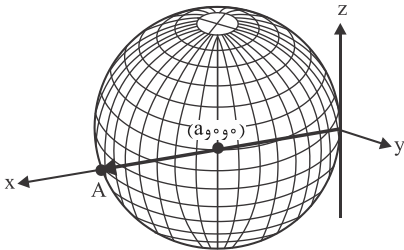
الف)

$$x^2 + (y - a)^2 + z^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$$

$$r^2 = 2ar \sin \theta \sin \varphi \rightarrow r = 2a \sin \theta \sin \varphi$$

ب)

$$\begin{cases} A = r_{\max} = 2a|_{\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=\frac{\pi}{2}} \\ f(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1 \rightarrow f(\theta) = \sin \theta \\ g(\varphi)|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 1 \rightarrow g(\varphi) = \sin \varphi \end{cases} \rightarrow r = 2a \sin \theta \sin \varphi$$



۴) کره‌ای به مرکز $(a, 0, 0)$

$$r_{\max} = A = 2a|_{\theta=\frac{\pi}{2}, \varphi=0}$$

(الف)

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$

$$r^2 = 2ar \sin \theta \cos \varphi \rightarrow r = 2a \sin \theta \cos \varphi$$

(ب)

$$\begin{cases} A = 2a \\ f(\theta)|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1 \rightarrow f(\theta) = \sin \theta \\ g(\varphi)|_{\varphi=0} = 1 \rightarrow g(\varphi) = \cos \varphi \end{cases} \rightarrow r = 2a \sin \theta \cos \varphi$$

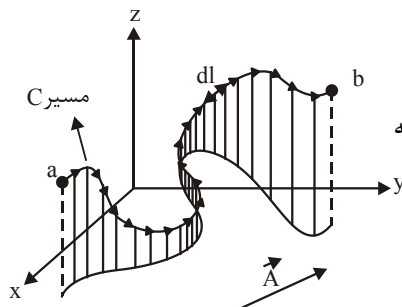
حالت‌هایی را که کره روی نیم‌ساز ربع‌های ۴ گانه صفحه xy قرار گیرد نیز می‌توان به راحتی با روش دوم مشخص کرد.

۷-۱ انتگرال‌های شامل توابع برداری:

در درس الکترومغناطیس (مثل بقیه درس‌ها) انتگرال‌ها به ۳ دسته خطی، سطحی و حجمی تقسیم می‌شوند.

انتگرال خطی: $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

حاصل این انتگرال یک کمیت اسکالر بوده و بیانگر کار انجام شده توسط بردار \vec{A} در مسیر C است. اجزای این انتگرال به صورت زیر است:



$d\vec{l}$: عنصر طول در امتداد مسیر C

\vec{A} : برداری دلخواه و در حالت کلی تابع هر سه مختصه

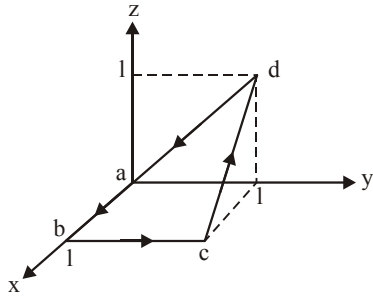


اگر مسیر C بسته باشد از علامت \oint_C برای انتگرال‌گیری خطی استفاده می‌شود.

نکته

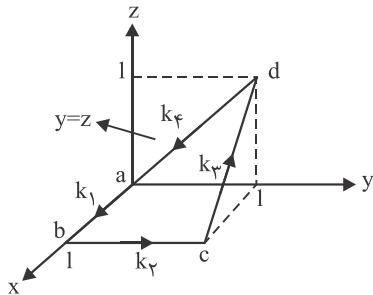
صورت‌های دیگر از انتگرال خطی به صورت $\int_C \vec{A} \times d\vec{l}$ ، $\int_C A d\vec{l}$ (حاصل آنها کمیت برداری است) و $\int_C \vec{A} dl$ (حاصل کمیت برداری) و $\int_C A dl$ (حاصل اسکالر) می‌باشد.

مثال ۱: انتگرال خطی $\oint_C \vec{A} \times \overline{dl}$ را برای مسیر بسته C در شکل زیر محاسبه نمایید.



$$\vec{A} = xy\hat{a}_x + yz\hat{a}_y + xz\hat{a}_z$$

پاسخ: مسیر داده شده را به مسیرهای ۴ گانه k_i و در نتیجه انتگرال خطی را به ۴ انتگرال تبدیل می‌کنیم.



$$\vec{A} = \underbrace{xy}_{A_x} \hat{a}_x + \underbrace{yz}_{A_y} \hat{a}_y + \underbrace{xz}_{A_z} \hat{a}_z$$

معادله مسیر برابر است با:

$$\begin{cases} x + z = 1 \rightarrow x = 1 - z \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\oint_{abcd} \vec{A} \cdot \overline{dl} = \int_a^b \vec{A} \cdot \overline{dl}_1 + \int_b^c \vec{A} \cdot \overline{dl}_2 + \int_c^d \vec{A} \cdot \overline{dl}_3 + \int_d^a \vec{A} \cdot \overline{dl}_4$$

$$k_1 = \int_a^b \vec{A} \cdot \overline{dl}_1, \quad \begin{cases} \overline{dl}_1 = dx \hat{a}_x, & 0 < x < 1 \\ y = 0 = z \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \vec{A} \cdot dx \hat{a}_x = \int_0^1 xy \hat{a}_x \cdot dx \hat{a}_x = 0$$

$$k_2 = \int_b^c \vec{A} \cdot \overline{dl}_2, \quad \begin{cases} \overline{dl}_2 = dy \hat{a}_y, & 0 < y < 1 \\ x = 1, z = 0 \end{cases}$$

$$k_2 = \int_0^1 \vec{A} \cdot dy \hat{a}_y \rightarrow k_2 = \int_0^1 yz dy = 0$$

$$k_3 = \int_c^d \vec{A} \cdot \overline{dl}_3 = \begin{cases} \overline{dl}_3 = dx \hat{a}_x + dz \hat{a}_z \\ y = 1, 0 < x < 1, 0 < z < 1 \end{cases} \rightarrow k_3 = \int A_x dx + \int A_z dz$$

$$k_3 = \int_1^0 xy dx + \int_0^1 xz dz, \quad x = 1 - z = -\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$k_{\varphi} = \int_d^a \vec{A} \cdot \vec{dl}_{\varphi}, \quad \begin{cases} \vec{dl}_{\varphi} = dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z \\ x = 0, y: 1 \rightarrow 0, z: 1 \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$k_{\varphi} = \int A_y dy + \int A_z dz, \quad z = y \rightarrow k_{\varphi} = \int_1^0 yz dy + \int_1^0 yz dz = -\frac{1}{3}$$

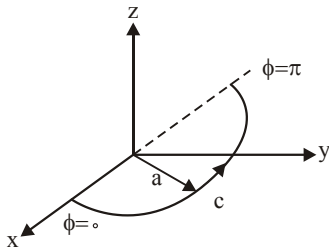
$$\oint_{abcd} \vec{A} \cdot \vec{dl} = \sum_{i=1}^4 k_i = 0 + 0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

تست ۷: انتگرال $\int_C \vec{A} dL$ وقتی که A در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت $\vec{A} = \sin \varphi \hat{a}_R$

بیان شود و C نیم دایره‌ای به شعاع a واقع در صفحه $y-x$ و محدود به $0 < \varphi < \pi$ باشد، کدام است؟ (مرکز نیم دایره بر مبدأ مختصات منطبق است). **(تألیفی)**

$$\frac{\pi a}{2} \hat{a}_y \quad (۴) \quad \frac{a}{4} \hat{a}_y \quad (۳) \quad -\frac{\pi a}{2} \hat{a}_x \quad (۲) \quad \frac{\pi}{2} \hat{a}_x \quad (۱)$$

پاسخ: مسیر C به صورت شکل زیر است



$$R = a, \quad dz = 0, \quad dR = 0$$

$$\vec{dl} = dR\hat{a}_R + R d\varphi\hat{a}_{\varphi} + dz\hat{a}_z = R d\varphi\hat{a}_{\varphi} = a d\varphi\hat{a}_{\varphi}, \quad 0 < \varphi < \pi$$

$$\int \vec{A} dl = \int_0^{\pi} \sin \varphi \hat{a}_R (a d\varphi)$$

$$\int_C \vec{A} dl = \int_0^{\pi} \sin \varphi (\cos \varphi \hat{a}_x + \sin \varphi \hat{a}_y) a d\varphi$$

$$= a \left[\hat{a}_x \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \hat{a}_y \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right]$$

$$= a \left[\hat{a}_x (0) + \hat{a}_y \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi a}{2} \hat{a}_y$$

گزینه ۴ صحیح است.

توجه: انتگرال‌های مربع سینوس در یک بازه‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ ، π و 2π برابر نصف بازه خواهد بود:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

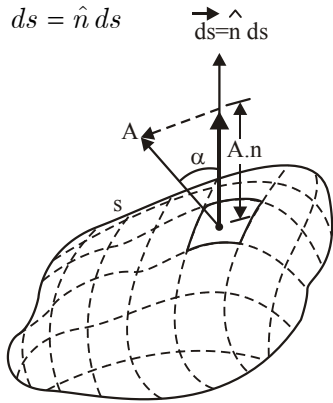
$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$$

انتگرال سطح $\int_s \vec{A} \cdot \vec{ds}$ و $\oint_s \vec{A} \cdot \vec{ds}$

انتگرال سطح به صورت $\int_s \vec{A} \cdot \vec{ds}$ تعریف می‌شود که از ضرب داخلی بردار \vec{A} در بردار \vec{ds}

بدست می‌آید. \vec{ds} برداری به اندازه عنصر سطح ds و در جهت عمود بر آن است:

$$\vec{ds} = \hat{n} ds$$



$$\vec{A} \cdot \vec{ds} = |\vec{A}| |\vec{ds}| \cos \alpha = (A \cos \alpha) ds$$

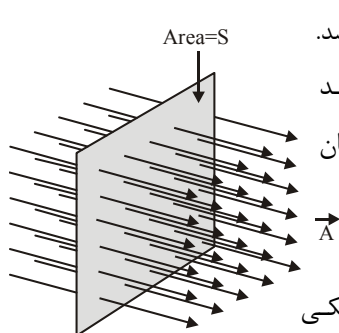
$$\vec{A} \cdot \vec{ds} = \vec{A} \cdot \hat{n} ds = (\vec{A} \cdot \hat{n}) ds$$

✓ مقدار $\int \vec{A} \cdot \vec{ds}$ یک کمیت اسکالر است و می‌تواند مثبت یا منفی باشد (وابسته به اطلاعات ساختار)

✓ اگر انتگرال روی سطح بسته انجام شود، معمول است که بردار \vec{ds} در تمام نقاط سطح به طرف بیرون آن در نظر گرفته شود.

✓ عنصر ds این قدر کوچک است که بردار \vec{A} در محل آن فقط یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

نکته

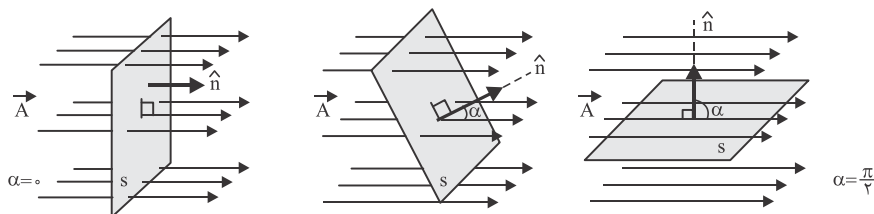


انتگرال $\oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$ معرف شار عبوری توسط بردار \vec{A} از سطح s می‌باشد.
 ✓ اگر بردار \vec{A} یکنواخت باشد یعنی تغییرات مکانی نداشته باشد
 در این صورت $\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = AS$ شار را با علامت ψ نشان
 می‌دهند.

$$\psi = \oint_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

✓ در الکترومغناطیس اگر \vec{A} میدان الکتریکی باشد ψ شار الکتریکی
 و اگر \vec{A} میدان مغناطیسی باشد ψ شار مغناطیسی خواهد بود.

✓ از آنجایی که $\vec{A} \cdot d\vec{s} = |\vec{A}| |d\vec{s}| \cos \alpha$ ، Max مقدار این عبارت یعنی شار گذرنده از سطح،
 موقعی اتفاق می‌افتد که \vec{A} و $d\vec{s}$ هم جهت باشند. ($\alpha = 0$)



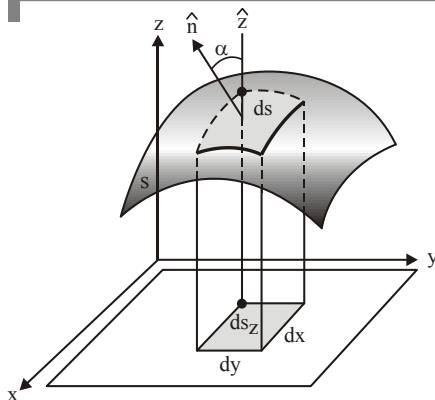
(ج) سطح موازی میدان \vec{A} قرار دارد. (ب) سطح با زاویه α نسبت به میدان \vec{A} قرار دارد. (الف) سطح عمود بر میدان \vec{A} قرار دارد.

(الف) $\psi = \psi_{max} = AS$ (ب) $0 < \psi < \psi_{max}$ (ج) $\psi = 0 = \psi_{min}$

$$\psi = |\vec{A}| S \cos \alpha$$

در بحث انتگرال سطحی، لزوماً \vec{A} و $d\vec{s}$ در یک دستگاه مختصات بیان نمی‌شود و در ضرب
 این دو بردار لازم است تبدیل بردارها صورت بگیرد.

نکته



سطح S در حالت کلی معادله‌ای به صورت
 $f(x, y, z) = k$ دارد که در آن k مقداری ثابت است.
 در حالت کلی بردار $d\vec{s}$ را که در هر نقطه بر سطح S
 عمود باشد می‌توان از تعریف گرادیان بدست آورد.

$$\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad S \text{ بردار یکه عمود بر سطح}$$

$$\begin{aligned} ds_u &= \vec{ds} \cdot \hat{a}_u \rightarrow ds_z = \vec{ds} \cdot \hat{a}_z = (ds \hat{a}_n) \cdot \hat{a}_z \\ \hat{a}_n \cdot \hat{a}_z &= \cos \alpha \rightarrow ds_z = ds (\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z) = ds |\cos \alpha| \\ \rightarrow ds &= \frac{ds_z}{|\cos \alpha|} \end{aligned}$$

$$\vec{ds} = ds \hat{a}_n = \frac{ds_z}{|\cos \alpha|} \hat{a}_n \rightarrow \vec{ds} = \hat{a}_n \frac{dx dy}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|}$$

بنابراین در مواردی که سطح S و در نتیجه \hat{a}_n معادله پیچیده‌ای دارد بهتر است از تصویر \vec{ds} روی یکی از صفحات منطبق بر محورهای مختصات استفاده کرد:

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \begin{cases} \int_{S_x} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dy dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x|} & S_x \text{ تصویر } S \text{ روی صفحه } x=0 \text{ است} \\ \int_{S_y} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_y|} & S_y \text{ تصویر } S \text{ روی صفحه } y=0 \text{ است} \\ \int_{S_z} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dy}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|} & S_z \text{ تصویر } S \text{ روی صفحه } z=0 \text{ است} \end{cases}$$

تست ۳: مقدار انتگرال $\int_S \vec{A} \cdot \vec{ds}$ که در آن $\vec{A} = 2y\hat{a}_x - z\hat{a}_y + x^2\hat{a}_z$ می‌باشد و S به صورت

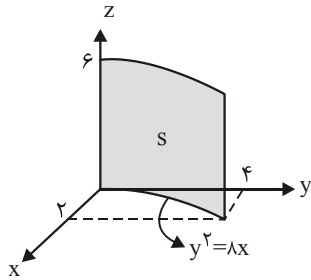
شکل زیر است، کدام است؟ (تألیفی)

$$\pm 132 \quad (1)$$

$$\pm 128 \quad (2)$$

$$132 \quad (3)$$

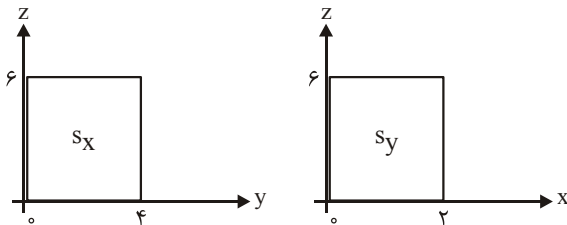
$$128 \quad (4)$$



پاسخ: معادله‌ی سطح S را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x, y, z) = \lambda x - y = 0 \quad \text{یا} \quad -\lambda x + y = 0$$

تصویر سطح S روی صفحات $x=0$ و $y=0$ به صورت‌های زیر است:



حل روی S_x :

$$f = \lambda x - y^2 = 0 \rightarrow \hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{\sqrt{\lambda^2 + (2y)^2}}$$

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{S_x} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dydz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_x|}, \quad \hat{a}_n \cdot \hat{a}_x = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4y^2}}$$

$$= \int_{S_x} (2y \hat{a}_x - z \hat{a}_y + x \hat{a}_z) \cdot \frac{\lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{\sqrt{\lambda^2 + 4y^2}} \frac{dydz}{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4y^2}}}, \quad x = 0$$

$$= \int \int_{S_x} \frac{1}{\lambda} (\lambda y + yz) dydz = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} y dy \int_0^{\lambda} (\lambda + z) dz = 128$$

تابع f را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f = y^2 - \lambda x = 0 \rightarrow \hat{a}_n = -\frac{\lambda \hat{a}_x - 2y \hat{a}_y}{\sqrt{\lambda^2 + 4y^2}} \rightarrow \text{انتگرال} = -128$$

$$\int \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{S_y} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dx dz}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_y|} = \int_{S_y} (\lambda y + yz) \frac{dx dz}{y} = \pm 128$$

نکته

در بعضی از سوال‌ها لازم است که معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه را بلد باشیم
معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه معلوم (a_1, b_1, c_1) ، (a_2, b_2, c_2) و (a_3, b_3, c_3) در دستگاه
کارتزین به صورت حل دترمینان زیر است:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \dots$$

انتگرال حجم: $\int \vec{A} dv$

این نوع انتگرال ساده‌ترین نوع انتگرال است و همواره با استفاده از روش‌های محاسبه
انتگرال‌های سه گانه به سادگی بدست می‌آید. انتگرال حجم عموماً به صورت $\int \vec{A} dv$ که در آن
 \vec{A} کمیتی برداری است ظاهر می‌شود.

مثال ۲: انتگرال $\int_v \vec{A} dv$ را وقتی که \vec{A} در دستگاه مختصات کروی به صورت $\vec{A} = \frac{1}{r^2} \hat{a}_r$ بیان

شود و v حجم $\frac{1}{8}$ کره‌ای به شعاع a و مرکزی منطبق بر مبدأ مختصات و محدود به $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

و $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ باشد، محاسبه کنید.

پاسخ:

$$dv = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\vec{A} dv = \left(\frac{1}{r^2} \hat{a}_r \right) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi) = \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\hat{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{a}_y + \cos \theta \hat{a}_z$$

$$\begin{aligned} \int_v \vec{A} dv &= \hat{a}_x \left[\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta d\varphi \right] \\ &+ \hat{a}_y \left[\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \right] \\ &+ \hat{a}_z \left[\int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \right] \end{aligned}$$

یادآوری:

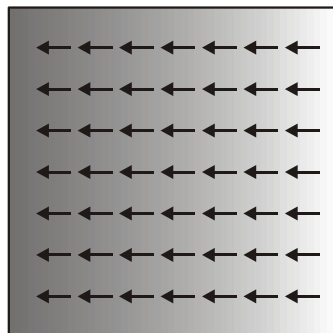
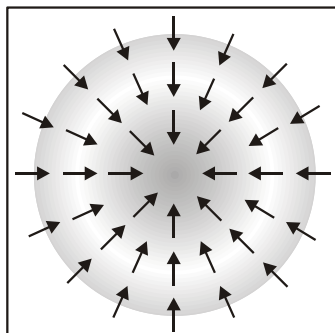
$$\int_a^b \sin^2 \theta d\theta = \frac{a+b}{2}$$

در نتیجه:

$$\int \vec{A} dv = \frac{\pi a}{4} (\hat{a}_x + \hat{a}_y + \hat{a}_z)$$

۸-۱ مشتق میدان‌های اسکالر و برداری

گرادیان: برداری را که اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش یک کمیت اسکالر را نشان می‌دهد این عملگر یک تابع می‌گیرد و یک بردار تحویل می‌دهد. (عملگر گرادیان: ∇f) شکل زیر مقادیر یک تابع را نشان می‌دهد:



نقاط مشکی: بیانگر مقادیر بزرگ تابع است.

نقاط سفید: بیانگر مقادیر کوچک تابع است.

فلش‌ها ← گرادیان تابع مورد نظر است که اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش تابع را از نقاط

سفید به مشکی نشان می‌دهد.



گرادیان در دستگاه‌های مختصات مختلف:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad \text{کارترین} \quad (f \text{ یک تابع اسکالر دلخواه})$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{a}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi \quad \text{کروی}$$

نکته

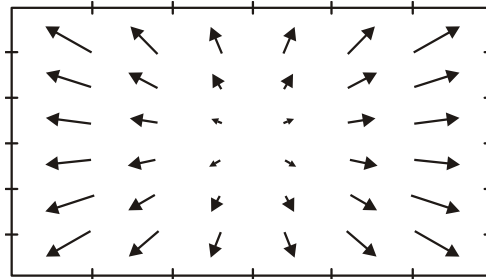
گرادیان تابع اسکالر $f(x, y, z)$ (یعنی ∇f) برداری است که بر سطح $f(x, y, z) = k$ عمود می‌باشد.

ثابت

دیورژانس: مشتق فضائی است که روی یک میدان برداری عمل می‌کند و حاصل تابع اسکالر می‌باشد.

✓ دیورژانس یک میدان برداری بیانگر: آهنگ تغییر یک مولفه بردار در راستای خودش می‌باشد و معیاری برای تعیین همگرایی یا واگرایی میدان برداری در نقطه مورد نظر است.

✓ دیورژانس را با عملگر $\nabla \cdot \vec{A}$ نشان می‌دهند.



نکته

برای بردار \vec{A} با توجه به علامت $\nabla \cdot \vec{A}$ می‌توان طبقه‌بندی زیر را ترتیب داد:

$\nabla \cdot \vec{A} > 0 \rightarrow$ به صورت منبع یا چشمه



$\nabla \cdot \vec{A} < 0 \rightarrow$ به صورت چاه یا سینک



$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \rightarrow$ سیموله‌ای \vec{A}

دو نمونه مهم از دیورژانس طبیعی خروج آب از شیلنگ و فواره است که در شکل‌های زیر

مشاهده می‌شوند:

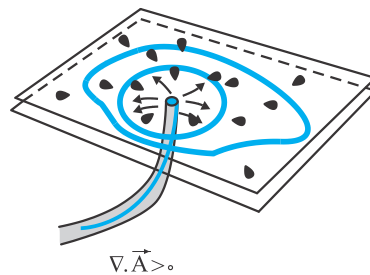
شیلنگ دیورژانس:

فواره:



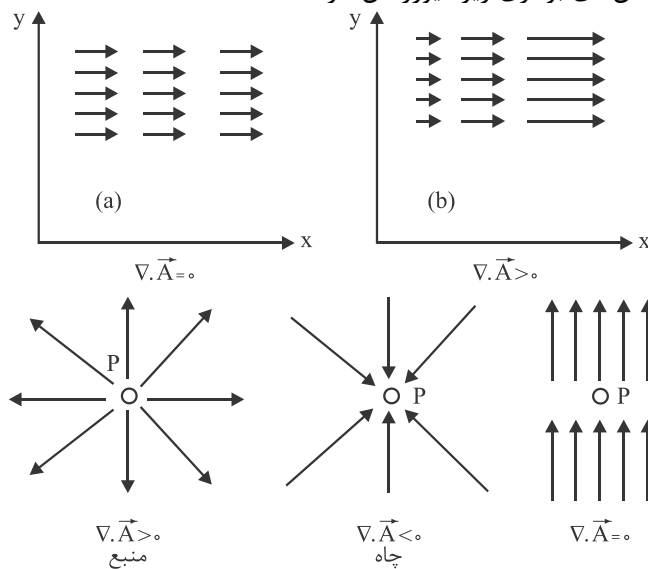
$\nabla \cdot \vec{A} > 0$
منبع یا چشمه

شیلنگ دیورژانس:



$\nabla \cdot \vec{A} > 0$

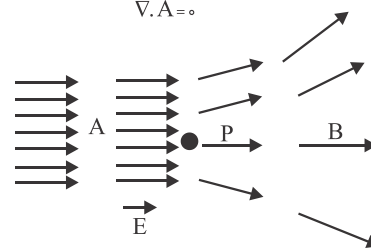
✓ کدام یک از میدان‌های برداری زیر دیورژانس دارند؟



دیورژانس در نقطه A : $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

دیورژانس در نقطه P : $\nabla \cdot \vec{E} < 0$

دیورژانس در نقطه B : $\nabla \cdot \vec{E} = 0$



نکته

مفهوم فیزیکی عملگر دیورژانس به زبان دیگر:

وقتی اپراتور دیورژانس روی یک تابع برداری در یک نقطه دلخواه از فضا عمل می‌کند، نتیجه‌ای که به ما می‌دهد وجود یا عدم وجود منبع اسکالر تولیدکننده آن بردار است.

دیورژانس در دستگاه مختصات مختلف:

\vec{A} برداری دلخواه در دستگاه مختصات است.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{کارتزین}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{کروی}$$

نکته

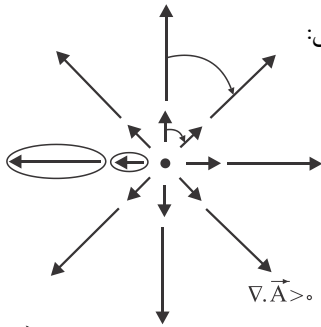
دیورژانس بیانگر آهنگ تغییر (مشتق) مولفه یک بردار در راستای خودش می‌باشد:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x \quad \text{مثلاً در کارتزین با فرض}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{A} = A_\varphi \hat{a}_\varphi \quad \text{یا در کروی با فرض}$$



مثال: مطابق شکل زیر بردار A تابعیت r و در جهت \hat{a}_r است پس:

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r$$

$$\nabla \cdot \vec{A} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r)$$

با توجه به شکل اندازه‌ی بردارها در جهت r متغیر ولی در جهت φ ثابت است و چون خود \vec{A} در جهت \hat{a}_r است پس دیورژانس آن مخالف صفر است.

کول: مشتق فضائی است که روی یک میدان برداری اعمال می‌شود و حاصل یک بردار است.

$$\text{curl } \vec{A} : \nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta s} \hat{a}_n$$

\hat{a}_n توسط قاعده دست راست مشخص می‌شود ← ۴ انگشت در جهت مسیر C قرار گیرد.



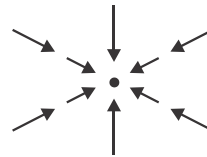
انگشت شصت جهت \hat{a}_n خواهد بود

نکته

کول یک میدان برداری تعیین کننده مقدار چرخش بردار حول نقطه مورد نظر است و سنجش از قدرت گردابی بودن بردار \vec{A} می‌باشد.



$$\nabla \times \vec{A}$$



✓ اگر کول یک برداری صفر باشد ($\nabla \times \vec{A} = 0$) بردار: غیر چرخشی، ذخیره شونده یا پایستار است.

کرل در دستگاه‌های مختلف:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \text{کارترین} \quad \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & R\hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R & RA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r \sin \theta \hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{کروی}$$

نکته

کرل بیانگر آهنگ تغییر مؤلفه یک بردار در غیر راستای خودش می‌باشد مثل:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{a}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{a}_y \quad \leftarrow \vec{A} = A_z \hat{a}_z \quad \text{مثال:}$$

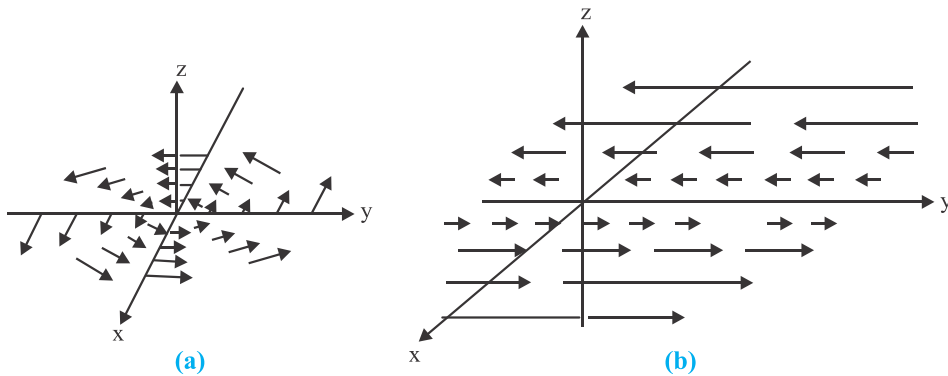
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[-r\hat{a}_\theta \left(\frac{-\partial A_r}{\partial \varphi} \right) + r \sin \theta \hat{a}_\varphi \left(\frac{-\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad \leftarrow \vec{A} = A_r \hat{a}_r \quad \text{مثال:}$$

در حالی که دیورژانس بیانگر آهنگ تغییر مؤلفه یک بردار در راستای خودش می‌باشد:

$$\vec{A} = A_\theta \hat{a}_\theta \quad \text{مثال:}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta)$$

سوال: کرل و دیورژانس میدان‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید:



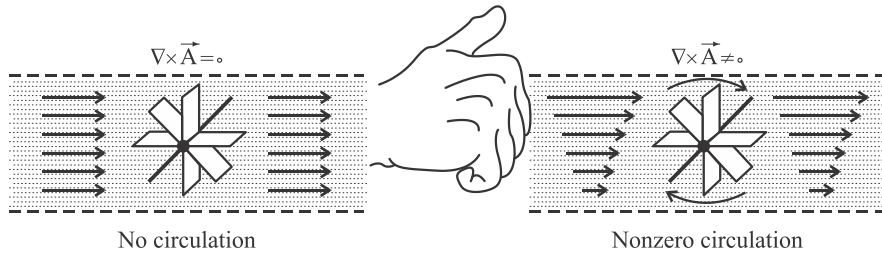
میدان شکل‌های a و b را می‌توان با روابط زیر مدل کرد:

$$a) \vec{A} = A_\varphi \hat{a}_\varphi \quad b) \begin{cases} x > 0 \rightarrow \vec{A} = A_y \hat{a}_y \\ x < 0 \rightarrow \vec{A} = -A_y \hat{a}_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \nabla \times \vec{A} \neq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \nabla \times \vec{A} = 0 \end{cases}$$

نکته

اگر یک پره را در میدان با کرل صفر قرار دهیم چرخشی در پره ایجاد نخواهد شد. ولی اگر در یک میدان با کرل غیرصفر قرار دهیم چرخشی در پره ایجاد خواهد شد. جهت چرخش آن با جهت \hat{a}_n (قاعده دست راست) متناسب خواهد بود.



نکته

با فرض اینکه f یک تابع اسکالر و \vec{A} میدان برداری باشد، اتحادهای زیر در زمینه کرل برقرارند:

$$\underbrace{\nabla \times (f\vec{A})}_{\text{بردار}} = f(\nabla \times \vec{A}) + \underbrace{\nabla f \times \vec{A}}_{\text{بردار}}$$

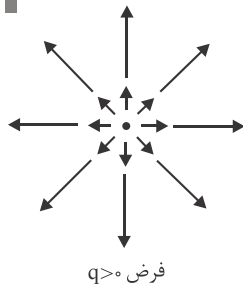
$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

کرل گرادیان هر کمیت اسکالر همواره صفر است.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

دیورژانس کرل هر کمیت برداری همواره صفر است.

نکته



شدت میدان الکترواستاتیکی \vec{E} در اطراف یک بار منفرد q دارای ویژگی‌های زیر است:

(در فصل دوم خواهیم دید که \vec{E} بار منفرد q متناسب است با: $\frac{1}{r^2} \hat{a}_r$)

$$\nabla \cdot \vec{E} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} > 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} < 0 \text{ بار منفی}$$

نکته

در میدان‌های غیرچرخشی روابط زیر معادند:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (۱)$$

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (۲) \quad \text{مستقل از مسیر است}$$

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (۳) \quad \text{صفر خواهد بود}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} = 0 & \rightarrow \vec{A} = \nabla V \\ \nabla \times (\nabla V) = 0 & \quad \downarrow \\ & \text{اسکالر} \end{aligned} \quad (۴) \quad \text{گرادیان یک تابع اسکالر است}$$

نکته

در میدان‌های سیملوله‌ای روابط زیر معادند:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (۱)$$

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (۲) \quad \text{برای هر مسیر فرضی مستقل از سطح است}$$

$$\oiint_s \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (۳)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 \rightarrow \vec{A} = \nabla \times \vec{B} \quad (۴) \quad \text{کول یک بردار است:}$$

لاپلاسیان: $\nabla^2 f$ (مشتق دوم)

این عملگر (صرفاً ریاضی) یک $\left\{ \begin{matrix} \text{تابع} \\ \text{بردار} \end{matrix} \right\}$ می‌گیرد و خروجی آن نیز یک $\left\{ \begin{matrix} \text{تابع} \\ \text{بردار} \end{matrix} \right\}$ است.

نکته

لاپلاسیان یک تابع اسکالر، به صورت دیورژانس گرادیان آن تابع تعریف می‌شود.
لاپلاسیان در دستگاه مختصات مختلف:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{کارترین}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \text{کروی}$$

نکته

لاپلاسین یک تابع برداری به صورت گرادیان دیورژانس، منهای کرل کرل آن بردار تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

✓ در دستگاه مختصات کارتزین، لاپلاسین یک بردار مساوی مجموع لاپلاسین مولفه‌های آن می‌باشد:

$$\nabla^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{a}_x + (\nabla^2 A_y) \hat{a}_y + (\nabla^2 A_z) \hat{a}_z$$

ولی در دستگاه‌های استوانه‌ای و کروی $\nabla^2 \vec{A}$ باید از بسط سمت راست عبارت اولی حاصل شود.

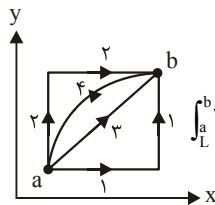
۹-۱ قضایای مهم در الکترومغناطیس

هر کدام از مشتق‌های فضائی که بررسی شد در جاهای مختلف کاربرد دارند، به عنوان مثال دیورژانس در قانون گوس یا معادله‌ی دوم ماکسول و قضیه‌ی دیورژانس کاربرد دارد، یا کرل در قانون آمپر یا معادله اول ماکسول و قضیه‌ی استوکس کاربرد دارد که به مرور به این موارد خواهیم پرداخت.

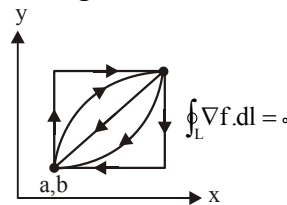
نکته

انتگرال مشتق تابع روی یک ناحیه برابر مقدار تابع روی مرز آن ناحیه است

قضیه‌ی گرادیان: $\nabla V =$ مشتق تابع خط = ناحیه ابتدا و انتهای خط = مرز



(a)



(b)

قضیه‌ی دیورژانس: $\nabla \cdot \vec{F} =$ مشتق تابع حجم = ناحیه سطح در بر گیرنده حجم = مرز

قضیه‌ی استوکس: $\nabla \times \vec{F} =$ مشتق تابع سطح = ناحیه خط در بر گیرنده سطح = مرز

قضیه دیورژانس

برای بردار \vec{A} و سطح بسته S که دارای حجمی برابر V باشد طبق این قضیه:

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dv$$

به عبارت دیگر انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری مانند \vec{A} برابر است با

شار کل خروجی بردار \vec{A} از حجم در برگیرنده‌ی مورد نظر.



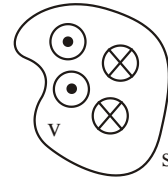
نکته

تعبیر فیزیکی قضیه:

$\nabla \cdot \vec{A} \rightarrow$ قدرت همگرایی یا واگرایی (منبع یا چاه بودن)

$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV \rightarrow V$ مجموع چشمه یا چاه‌های موجود در حجم

$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \rightarrow V$ میزان آب (شار) گذرنده از سطح بسته S حاوی حجم

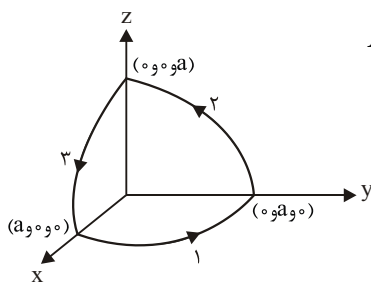


نکته

با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان یک انتگرال سطحی را به یک انتگرال حجمی و یا برعکس تبدیل کرد. از این قضیه در محاسبه شار خروجی از سطح بسته‌ی دلخواه که محاسبه یا مشخص کردن \vec{A} سخت باشد می‌توان استفاده کرد.

تست ۴: حجم $r \leq a$ ، $x > 0$ ، $y > 0$ ، $z > 0$ یک هشتم کره‌ای به شعاع a است (شکل زیر)،

روی $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$ دربرگیرنده این حجم کدام گزینه است؟ (\vec{A} به صورت زیر است)



$$\vec{A} = r^2 \cos \theta \hat{a}_r + r^2 \cos \varphi \hat{a}_\theta - r^2 \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_\varphi$$

$$\frac{\pi a^2}{2} \quad (2) \qquad \frac{\pi a^2}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi a^4}{4} \quad (4) \qquad \pi a^2 \quad (3)$$

پاسخ: با استفاده از قضیه دیورژانس ب راحتی می‌توان به جواب رسید:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$= 4r \cos \theta + r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi - r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \varphi = 4r \cos \theta$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (4r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= 4 \times \frac{a^4}{4} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}$$

گزینه ۴ صحیح است.

قضیه‌ی استوکس (کرل)

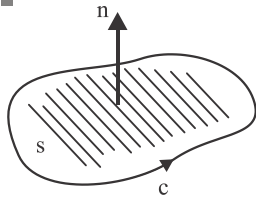
طبق این قضیه:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$



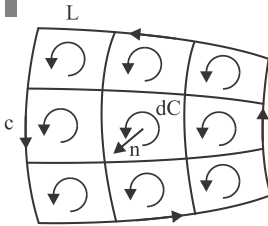
به عبارت دیگر **انتگرال سطحی کرل یک میدان برداری مانند \vec{A}** ، روی یک **سطح باز** برابر است با **انتگرال مسیر بسته بردار \vec{A}** روی مسیری که **سطح s** را در بر می‌گیرد.

نکته



در استفاده از قضیه‌ی استوکس، **انتگرال سطحی** را فقط روی **سطح ناشی** از مسیر بسته‌ی C محاسبه می‌کنیم، یعنی $d\vec{s}$ ناشی از مسیر C . (با استفاده از قاعده دست راست، طوری که ۴ انگشت در جهت مسیر C باشد و انگشت شصت جهت \hat{a}_n سطح را نشان می‌دهد)

نکته



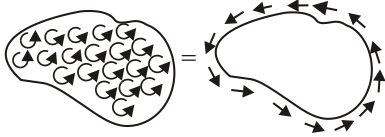
تعبیر فیزیکی قضیه‌ی استوکس:

$$\nabla \times \vec{A} \rightarrow \vec{A} \rightarrow \text{قدرت گردابی بودن میدان برداری}$$

تصور کنید یک سری چشمه آب داخل سطح S هستند که باعث چرخش جریان آب داخل سطح می‌شوند

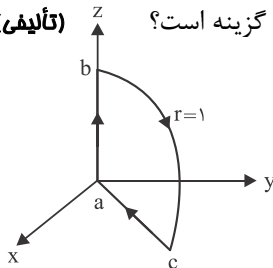
$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \rightarrow \text{مجموع این چشمه‌ها روی سطح}$$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \rightarrow \text{چرخش آب روی مسیر } C \text{ در برگیرنده‌ی سطح } S$$



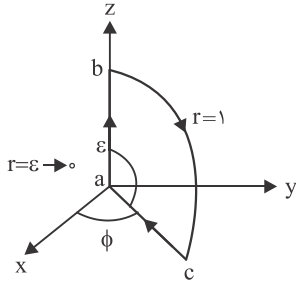
به عبارتی دیگر برآیند جهت‌گیری چشمه‌های داخل سطح بسته S همان جهت آب در روی مسیر C است.

تست ۵: انتگرال خط $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ برای مسیر C داده شده در زیر، کدام گزینه است؟ (تألیفی)



$$(1) \quad \pi(e-1) \quad (2) \quad \text{نامحدود}$$

$$(3) \quad \frac{\pi}{2}(e-1) \quad (4) \quad \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$



پاسخ: اگر بخواهیم از خود $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ استفاده کنیم، چون مسیر c شامل $r = 0$ است مطابق شکل بردار A در $r = 0$ تعریف نشده می‌شود و باید مسیر c را در همسایگی مبدأ تغییر بدهیم و به صورت قوس با شعاع ε (که $\varepsilon \rightarrow 0$) حل کنیم، ولی با استفاده از قضیه‌ی استوکس مسئله با سادگی بیشتری حل می‌شود:

$$I = \oint_{abca} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

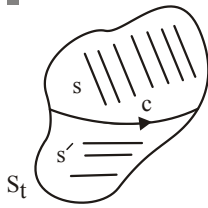
$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r\hat{a}_\theta & r \sin \theta \hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & rA_\theta = e^{-r} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{e^{-r}}{r} \hat{a}_\varphi, d\vec{s}_\varphi = r dr d\theta \hat{a}_\varphi, 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \varphi = k$$

$$I = \int_S \left(-\frac{e^{-r}}{r} \hat{a}_\varphi \right) \cdot (r dr d\theta \hat{a}_\varphi) = -\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{-r} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

گزینه ۴ صحیح است.

نکته



دو سطح s و s' با مرز مشترک c را در نظر بگیرید، طبق قضیه‌ی استوکس:

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int_{s'} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}' = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

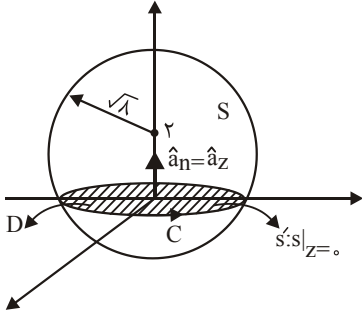
$$s_t = s + s', d\vec{s}' = -d\vec{s}$$

تست ۴: مقدار $I = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$ کدام گزینه است. به طوری که s قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$

است که در صفحه z^+ قرار می‌گیرد و $\vec{A} = y^2 \cos z \hat{a}_x + x^3 e^{yz} \hat{a}_y - e^{-xyz} \hat{a}_z$ می‌باشد.

- ۱۲π (۴) ۴π (۳) ۱۸π (۲) ۶π (۱)

پاسخ: از نکته‌ی قبلی در حل تست استفاده می‌کنیم



$$\overline{ds}_D \text{ یا } \overline{ds}' = R dR d\varphi \hat{a}_z$$

$$S' : S|_{z=0} : x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow \text{دایره‌ای به شعاع ۲}$$

$$I = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \overline{ds} = \int_D (\nabla \times \vec{A}) \cdot \overline{ds}_D$$

$$z=0 @ S_D \text{ یا } S' \rightarrow (\nabla \times \vec{A})_z|_{z=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 e^{yz}) - \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cos xz) \right] \Big|_{z=0}$$

$$= 2x^2 - 2y^2, \int_{-2}^2 2y dy = 0$$

$$I = \int_{S_D} 2x^2 R dR d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 R^3 \cos^2 \varphi dR d\varphi = 12\pi$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

تست ۷: اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله از مبدا در مختصات کروی باشد، حاصل انتگرال زیر روی حجم کره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدا چقدر است؟ (α ثابت است) و

(دکتری ۹۱)

$$I = \int (1 + e^{-\alpha r}) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dv$$

$4\pi \left(1 + \frac{1}{e}\right)$ (۴) 8π (۳) 4π (۲) -8π (۱)

پاسخ: روش اول:

انتگرال داده شده را تجزیه کرده و از قضیه‌ی دیورژانس و اتحاد برداری زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱) \int_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot \overline{ds}$$

$$۲) \nabla \cdot (f\vec{A}) = f \nabla \cdot \vec{A} + \nabla f \cdot \vec{A} \rightarrow f \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (f\vec{A}) - \nabla f \cdot \vec{A}$$

$$\int_V (1 + e^{-\alpha r}) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV + \int_V e^{-\alpha r} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV$$

$$I = \underbrace{\oint_S \left(\frac{1}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r})}_{\text{طرف دوم دیورژانس}} + \underbrace{\int_V \left[\nabla \cdot \left(e^{-\alpha r} \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - \nabla(e^{-\alpha r}) \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right] dV}_{\text{طرف دوم اتحاد برداری}}$$

طرف دوم دیورژانس

طرف دوم اتحاد برداری

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{S_1} \sin \theta d\theta d\varphi + \oint_{S_2} \left(\frac{e^{-\alpha r}}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}) + \int_v \frac{\alpha e^{-\alpha r}}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-\alpha r} \sin \theta d\theta d\varphi + \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= 4\pi + 4\pi e^{-\alpha} + (1 - e^{-\alpha})4\pi = 8\pi
 \end{aligned}$$

روش دوم: استفاده از تعریف ضربه‌ی کروی:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(r)$$

$$I = \int_v (1 + e^{-\alpha r}) 4\pi \delta(r) dv = \int (1 + e^0) 4\pi \delta(r) dv = 8\pi$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱-۱۰ پیوست: (۱) جمع‌بندی مشتق‌های برداری (۲) اتحادهای برداری

مشتق‌های برداری: u و v و w متغیرهای دستگاه مختصات هستند. h_u و h_v و h_w ضرایب مقیاس یا متریک هستند و \vec{A} بردار دلخواه و f تابع اسکالر است.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_w h_u A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v A_w) \right]$$

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{a}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{a}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{a}_w$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{a}_u & h_v \hat{a}_v & h_w \hat{a}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]$$

ضرایب مقیاس (متری) در دستگاه‌های مختصات مختلف به صورت جدول زیر است:

ضرائب متری	مختصات کارترین (x, y, z)	مختصات استوانه‌ای (R, ϕ, z)	مختصات کروی (r, θ, ϕ)
h_u	۱	۱	۱
h_v	۱	R	r
h_w	۱	۱	$r \sin \theta$

مشتق‌های برداری در دستگاه مختصات مختلف:

مختصات کارتزین	مختصات استوانه‌ای
$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial R} \hat{a}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{a}_z$
$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & R \hat{a}_\varphi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_R & R A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$
$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

مختصات کروی

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{a}_\varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & r \hat{a}_\theta & r \sin \theta \hat{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

اتحادهای برداری:

- ۱) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$
- ۲) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) : bac - cab$
- ۳) $\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$
- ۴) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

$$\delta) \nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

$$\epsilon) \nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \nabla f \cdot \vec{A}$$

$$\upsilon) \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\lambda) \nabla \times (f\vec{A}) = f\nabla \times \vec{A} + \nabla f \times \vec{A}$$

$$\eta) \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$

$$\iota) \nabla \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

$$\kappa) \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} = \vec{A}(\vec{B} \cdot \nabla) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \nabla)$$

$$\lambda) \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

$$\mu) \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$\nu) \nabla \times \nabla f = 0$$

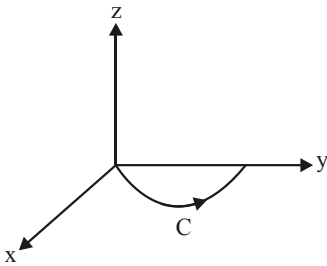
$$\xi) \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

[تست‌های تکمیلی فصل اول]

۱- مسیر نشان داده شده در شکل زیر یک نیم دایره به شعاع یک و مرکز $(0, 1, 0)$ است.

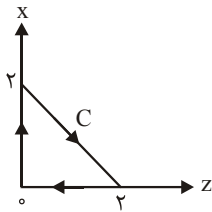
انتگرال میدان برداری \vec{A} روی این مسیر کدام گزینه است. میدان \vec{A} در مختصات

استوانه‌ای بیان شده است. $\vec{A} = R^\gamma z \hat{a}_R + \sin \varphi \cos \varphi \hat{a}_\varphi + R^\gamma \cos^\gamma \varphi \hat{a}_z$.



- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $-\frac{4}{3}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{3}$

۲- حاصل $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{L}$ برای بردار $\vec{A} = (2x^2 + z^2)\hat{a}_x + (xz - z^2)\hat{a}_z$ و مسیر بسته c



مطابق شکل زیر کدام است؟

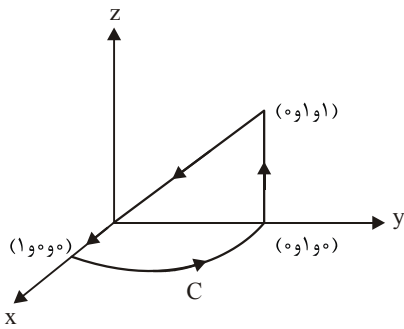
- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $-\frac{3}{4}$
- (۴) $-\frac{4}{3}$

۳- اگر $\vec{A} = 3x^2\hat{a}_x + 4xy\hat{a}_y$ ، انتگرال خط $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{L}$ روی مسیری با معادلات پارامتری

$y = 3 \sin t, x = 2 \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$) کدام است؟

- (۱) ۳۲
- (۲) ۳۶
- (۳) ۴۰
- (۴) ۳۰

۴- انتگرال میدان $\vec{A} = (r \cos^\gamma \theta)\hat{a}_r - (r \sin \theta \cos \theta)\hat{a}_\theta + 3r\hat{a}_\varphi$ روی مسیر بسته‌ی



مشخص شده در شکل زیر کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$
- (۲) $-\pi$
- (۳) $\frac{3\pi}{2}$
- (۴) $-\frac{\pi}{2}$

۵- انتگرال $\int \vec{A} \cdot d\vec{s}$ روی سطح بسته‌ی در بردارنده‌ی حجم $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}, 0 < \varphi \leq 2\pi, r \leq a$ که \vec{A} به صورت زیر می‌باشد، کدام است؟

$$\vec{A} = r^\varphi \sin \theta \hat{a}_r + \varphi r^\varphi \cos \theta \hat{a}_\theta + r \theta g \hat{a}_\varphi$$

$$\pi a^4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2) \qquad \pi a^4 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (1)$$

$$\pi a^4 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad (4) \qquad \pi a^4 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \quad (3)$$

۶- تابع برداری $\vec{A} = (x + y^2)\hat{a}_x - 2x\hat{a}_y + 2yz\hat{a}_z$ را در نظر بگیرید. انتگرال این تابع روی سطح مثلثی $2x + y + 2z = 6$ واقع در $z > 0, y > 0, x > 0$ کدام است؟

$$72 \quad (4) \qquad 216 \quad (3) \qquad 58 \quad (2) \qquad 81 \quad (1)$$

۷- مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که بین استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد، برابر کدام گزینه است؟

$$3\pi\sqrt{2} \quad (4) \qquad 3\pi \quad (3) \qquad 6\pi\sqrt{2} \quad (2) \qquad 6\pi \quad (1)$$

۸- مقدار انتگرال $\int_v e^{-2r} (\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) d^3r$ کدام است؟ (r اندازه بردار \vec{r} و v حجم کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a است).

$$-4\pi(1 - e^{-2a}) \quad (4) \qquad 4\pi(1 - e^{-2a}) \quad (3) \qquad -4\pi \quad (2) \qquad 4\pi \quad (1)$$

۹- اگر V حجم سطح بسته‌ای باشد که مساحت مرز آن S است، در این صورت حاصل عبارت $\oint_s \vec{r} \cdot d\vec{\sigma}$ کدام است؟ \vec{r} بردار مکان و $d\vec{\sigma}$ برداری در راستای عمود بر سطح است.

$$2V \quad (4) \qquad 3V \quad (3) \qquad 2S \quad (2) \qquad 3S \quad (1)$$

پاسخنامه تست‌های تکمیلی فصل اول

۱- گزینه (۳). عنصر طول در مختصات استوانه‌ای عبارت است از:

$$d\vec{L} = dR\hat{a}_R + R d\varphi\hat{a}_\varphi + dz\hat{a}_z$$

پس:

$$\vec{A} \cdot d\vec{L} = r^2 z dR + R \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + R^2 \cos^2 \varphi dz$$

معادله‌ی مسیر در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \text{معادله‌ی نیم دایره: } x^2 + (y-1)^2 = 1, x > 0, y > 0 \\ x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi \end{cases} \rightarrow R^2 \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi + 1 - 2R \sin \varphi = 1$$

$$\rightarrow R^2 - 2R \sin \varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} R = 2 \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

همچنین بر روی این مسیر $z = 0$ است، پس:

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \varphi \cos \varphi R d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 \varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

۲- گزینه (۴). براساس قضیه‌ی استوکس داریم:

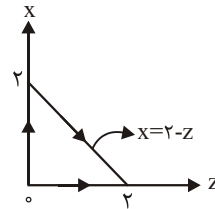
$$I = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

نویس: جهت $d\vec{s}$ از روی مسیر c و با استفاده از قاعده دست راست مشخص می‌شود که در

اینجا $-\hat{a}_y$ می‌شود.

$$d\vec{s} = -dx dz \hat{a}_y$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 + z^2 & 0 & xz - z^2 \end{vmatrix} = z\hat{a}_y$$



$$I = -\int_0^2 \int_0^{2-z} z dx dz = -\int_0^2 z(2-z) dz \Rightarrow I = -\frac{4}{3}$$

۳- گزینه (۱).

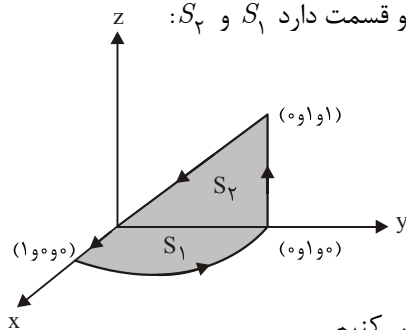
$$\vec{A} \cdot d\vec{L} = 3x^2 dx + 4xy dy = 12 \cos^2 t dx + 24 \cos t \sin t dy$$

$$dx = -2 \sin t dt, dy = 2 \cos t dt$$

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_0^\pi 48 \cos^2 t \sin t dt = -16 \cos^3 t \Big|_0^\pi = 32 \quad \text{پس:}$$

۴- گزینه (۳). از قضیه‌ی استوکس استفاده می‌کنیم.

سطحی که توسط مسیر بسته‌ی c ایجاد می‌شود، دو قسمت دارد S_1 و S_2 :



$$I = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{L} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

$$\nabla \times \vec{A} = 3 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \hat{a}_r - 6 \hat{a}_\theta$$

حال باید $d\vec{s}$ مربوط به سطوح S_1 و S_2 را مشخص کنیم.

✓ بر روی بخش ربع دایره‌ای واقع در صفحه‌ی $z=0$:

$$d\vec{s}_1 = R dR d\varphi \hat{a}_z, \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{a}_x + \cos \theta \sin \varphi \hat{a}_y - \sin \theta \hat{a}_z \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} \hat{a}_\theta = -\hat{a}_z$$

بنابراین طبق بخش تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی داریم:

$$d\vec{s}_1 = R dR d\varphi \hat{a}_z \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} d\vec{s}_1 = -r dr d\varphi \hat{a}_\theta$$

✓ $d\vec{s}$ مربوط به سطح S_2 به صورت زیر است:

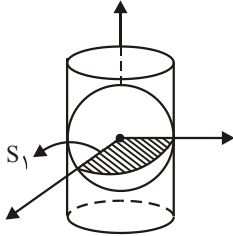
$$d\vec{s}_2 = dy dz \hat{a}_x, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

در اینجا نیز طبق بخش تبدیل عناصر دیفرانسیل سطحی که در متن درس بیان شده داریم:

$$\hat{a}_\varphi = -\sin \varphi \hat{a}_x + \cos \varphi \hat{a}_y \xrightarrow{\varphi = \frac{\pi}{2}} \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_x$$

$$d\vec{s}_2 = dy dz \hat{a}_x \xrightarrow{\varphi = \frac{\pi}{2}} d\vec{s}_2 = -r dr d\theta \hat{a}_\varphi$$

$$I = \int_{S_1} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}_2$$

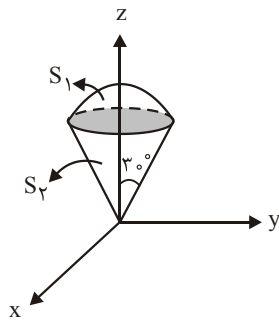


ترم دوم عبارت فوق صفر است، پس:

$$R: [0, 1] \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{2}} r = R: [0, 1]$$

$$I = 6 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dr d\varphi = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

گزینه (۳). شکل مسئله به صورت زیر است:



روی بخش کره سطح $\vec{ds}_1 = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{a}_r$ و

$$\vec{A} \cdot \vec{ds}_1 = a^2 \sin^2\theta r^2 d\theta d\varphi, r = a$$

$$= a^4 \sin^2\theta d\theta d\varphi$$

پس:

$$\int_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{ds}_1 = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi a^4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

روی بخش مخروطی، $\vec{ds}_2 = r \sin\theta dr d\varphi \hat{a}_\theta$ و

$$\vec{A} \cdot \vec{ds}_2 = 4r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\varphi, \theta = \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}r^3 dr d\varphi$$

$$\int_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{ds}_2 = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\sqrt{3}\pi a^4}{2}$$

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{S_1} \vec{A} \cdot \vec{ds}_1 + \int_{S_2} \vec{A} \cdot \vec{ds}_2 = \pi a^4 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

گزینه (۱). طبق نکته‌ی اشاره شده در بخش انتگرال سطحی:

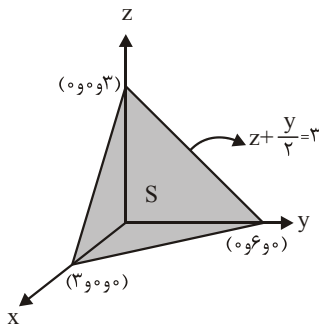
$$I = \int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_{S_x} \vec{A} \cdot \hat{a}_n \frac{dy dz}{|\hat{a}_x \cdot \hat{a}_n|}, x = 0$$

$$f(x, y, z) = 2x + y + 2z$$

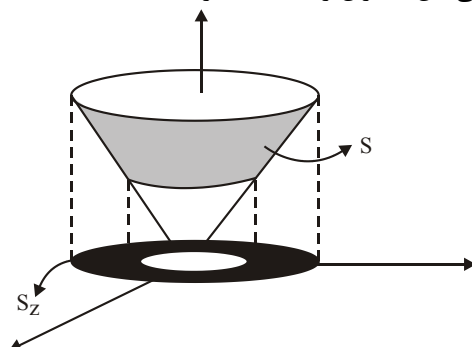
$$\hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\hat{a}_x + \hat{a}_y + 2\hat{a}_z}{3}$$

$$\vec{A} \cdot \hat{a}_n = \frac{2y^2 + 4yz}{3}, \hat{a}_x \cdot \hat{a}_n = \frac{2}{3}$$

$$I = \int \int_{S_x} \frac{2y^2 + 4yz}{3} \frac{dy dz}{\frac{2}{3}} = \int_0^6 \int_0^{2-\frac{y}{2}} (y^2 + 2yz) dy dz = 8$$



۷- گزینه (۴). با استفاده از نکته‌ی اشاره شده در محاسبه‌ی انتگرال سطحی و استفاده از تصویر سطح مورد نظر روی یکی از صفحات منطبق بر دستگاه مختصات کارتزین (در اینجا صفحه‌ی $z = 0$) می‌توان براحتی این انتگرال را محاسبه کرد.



S_z تصویر سطح جانبی متشکل از دو استوانه‌ی هم محور در صفحه‌ی $z = 0$ است که مطابق شکل به صورت یک واشر صفحه‌ای است.

$$I = \int_s ds$$

$$I = \int_{s_z} \frac{dx dy}{|\hat{a}_n \cdot \hat{a}_z|}, \quad \hat{a}_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

$$I = \int_{s_z} \frac{|\nabla f| dx dy}{|\nabla f \cdot \hat{a}_z|}$$

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} - z \rightarrow \nabla f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{a}_y - \hat{a}_z$$

$$|\nabla f| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$|\nabla f \cdot \hat{a}_z| = 1$$

$$I = \int \int_{s_z} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \pi(4 - 1) = 3\pi\sqrt{2}$$

۸- گزینه (۱). نکته: در دستگاه مختصات کروی داریم:

$$\nabla \cdot (r^n \hat{a}_r) = \begin{cases} (n+2)r^{n-1}, & n \neq -2 \\ 4\pi\delta(r), & n = -2 \end{cases}, \quad \delta(r) = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ است بنابراین برای $n = -2$ خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \nabla \cdot \left(r^{-2} \frac{\vec{r}}{r} \right) = \nabla \cdot (r^{-2} \hat{a}_r) = 4\pi \delta(r)$$

لذا:

$$I = \int_v e^{-2r} 4\pi \delta(r) d^3r$$

با استفاده از خاصیت غربالی تابع ضربه، انتگرال ساده تر می شود:

$$I = \int_v e^0 4\pi \delta(r) d^3r = 4\pi \int \int \int \delta(r) d^3r = 4\pi$$

۹- گزینه (۳). با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$I = \oint_s \vec{r} \cdot \vec{d}\sigma = \oiint \vec{r} \cdot \vec{d}s = \int \int \int (\nabla \cdot \vec{r}) dv$$

از طرفی دیورژانس \vec{r} برابر است با:

$$\nabla \cdot \vec{r} = \nabla \cdot (x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z) = 3$$

$$I = 3 \int \int \int dv = 3v$$

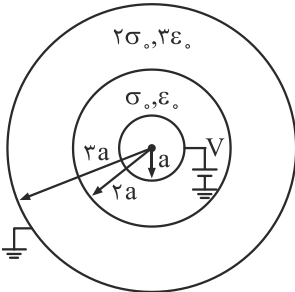
[سوال‌های کارشناسی ارشد ۹۷]

۱- برای انتقال بارهای سطحی با چگالی سطحی ثابت ρ_s (کولمب بر متر مربع) از روی کره‌ای به شعاع $\sqrt{2}a$ به روی سطح کره‌ای به شعاع $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ، چه میزان کار لازم است؟

$$(1) \quad \frac{4\pi\rho_s^2 a^3}{\epsilon_0} (14 - \sqrt{2}) \quad (2) \quad \frac{2\pi\rho_s a^3}{\epsilon_0} (2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}})$$

$$(3) \quad \frac{4\pi\rho_s^2 a^3}{\epsilon_0} (\frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}) \quad (4) \quad \frac{2\pi\rho_s a^3}{\epsilon_0} (\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}})$$

۲- فضای بین یک کره رسانای کامل به شعاع a و پوسته رسانای کامل به شعاع داخلی $3a$ از دو ناحیه رسانای ناقص با رسانایی ویژه σ و 2σ و ضرایب گذردهی ϵ_0 و $3\epsilon_0$ پر شده است. مرز دو ناحیه، یک کره به شعاع $2a$ است. اگر کره رسانای داخلی به پتانسیل V_0 و پوسته رسانای بیرونی به پتانسیل صفر وصل باشند، چگالی بار آزاد سطحی روی مرز دو ناحیه ($r = 2a$)، چند کولمب بر مترمربع خواهد بود؟



$$(1) \quad -\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right) \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

$$(2) \quad +\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

$$(3) \quad +\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right) \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

$$(4) \quad +\left(\frac{3}{14}\right) \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

۳- اگر در لحظه $t = 0$ ، کره‌ای به شعاع a و رسانایی ویژه σ و گذردهی ϵ_0 به طور یکنواخت و با چگالی حجمی ρ_0 باردار شود، بار سطحی روی کره در لحظه $t = \Delta s$ ، کدام است؟ $\left(\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}\right)$

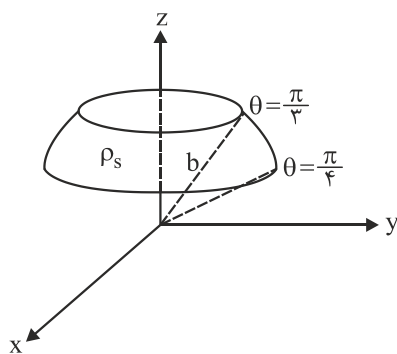
$$(1) \quad \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}}) \quad (2) \quad \frac{\rho_0 a}{3} (1 - e^{-\frac{\Delta}{\tau}})$$

$$(3) \quad \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} (1 + e^{-\frac{\Delta}{\tau}}) \quad (4) \quad \frac{\rho_0 a}{3} (1 + e^{-\frac{\Delta}{\tau}})$$

۴- در فضای آزاد، دوقطبی‌های الکتریکی با چگالی $\vec{P} = k \frac{\hat{r}}{r^2}$ درون یک پوسته کروی به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b توزیع شده است ($a < r < b$). بار نقطه‌ای q از بی‌نهایت به مرکز این پوسته کروی منتقل می‌شود. کار انجام شده برای این انتقال برابر کدام است؟

$$(1) \frac{kq}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad (2) \frac{kq}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (3) \frac{kq}{\epsilon_0 a} \quad (4) \frac{-kq}{\epsilon_0 a}$$

۵- روی بخشی از پوسته کروی با $r = b$ ، $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ و $0 \leq \varphi < 2\pi$ ، مانند شکل زیر بار الکتریکی با چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s توزیع شده است. میدان الکتریکی \vec{E} در مبدأ مختصات، کدام است؟



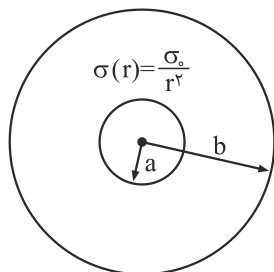
$$(1) \vec{E} = \hat{z} \frac{\rho_s b}{2\epsilon_0}$$

$$(2) \vec{E} = \hat{z} \frac{\rho_s b^2}{4\epsilon_0}$$

$$(3) \vec{E} = \hat{z} \left(-\frac{\rho_s}{16\epsilon_0} \right)$$

$$(4) \vec{E} = \hat{z} \left(-\frac{\rho_s b^2}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

۶- مطابق شکل زیر، فضای میان کره رسانای کامل به شعاع a و پوسته رسانای کامل به شعاع b را ماده‌ای با رسانایی ویژه $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$ پر کرده است. وابستگی $\epsilon(r)$ چگونه باشد تا بار الکتریکی آزاد در فاصله میان دو رسانا ایجاد نشود؟



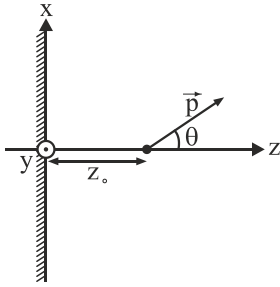
$$(1) \epsilon(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$(2) \epsilon(r) \propto r^2$$

$$(3) \epsilon(r) \propto r$$

$$(4) \epsilon(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

۷- دوقطبی الکتریک \vec{p} در فاصله z از مبدأ مختصات روی محور z ها و در صفحه xoz طوری قرار گرفته است که با محور z ها زاویه θ می‌سازد. با فرض آنکه صفحه xy رسانا و با پتانسیل صفر باشد، چگالی بار سطحی القایی که توسط دوقطبی \vec{p} روی صفحه رسانا



ایجاد می‌شود، در مبدأ مختصات چند $\frac{C}{m^2}$ است؟

$$\rho_s = \frac{\pi p \cos \theta}{z_0^2} \quad (2) \quad \rho_s = \frac{2\pi p \cos \theta}{z_0^2} \quad (1)$$

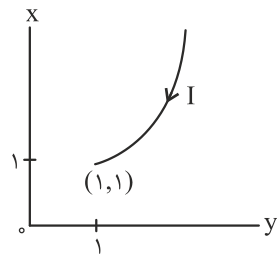
$$\rho_s = \frac{p \cos \theta}{\pi z_0^2} \quad (4) \quad \rho_s = \frac{2p \cos \theta}{\pi z_0^2} \quad (3)$$

۸- کابل هم‌محوری با رسانای داخلی توپر به شعاع a و رسانای خارجی به شعاع b مفروض است. ضریب خودالقایی این کابل بر واحد طول، کدام است؟ بین هادی داخلی و خارجی فضای آزاد وجود دارد.

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{1}{\lambda} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad (2) \quad L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad (1)$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad (4) \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right] \quad (3)$$

۹- بخشی از یک سیم با جریان الکتریکی ثابت I روی منحنی $y = x^2$ مانند شکل زیر از مثبت بی‌نهایت تا نقطه $(1, 1)$ در صفحه xoy کشیده شده است. شدت میدان مغناطیسی \vec{H} در مبدأ مختصات، کدام است؟



$$\frac{I}{4\pi} \left(\ln \left(\tan \frac{\pi}{\lambda} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z} \quad (1)$$

$$\frac{I}{4\pi} \left(\ln \left(\tan \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right) \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{I}{2\pi} \left(\tan \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{z} \quad (3)$$

$$\frac{I}{2\pi} \left(\tan \frac{\pi}{4} - 1 \right) \hat{z} \quad (4)$$

۱۰- یک کره به شعاع a با مغناطیدگی $(Magnetization)$ $\vec{M} = M_0 \hat{z}$ یکنواخت در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر بخش $0 \leq r \leq a$ ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $0 \leq \varphi \leq \pi$ ، چقدر است؟

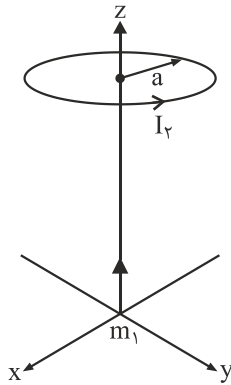
$$M_0 \frac{2\pi a^3}{3} B_0 \hat{y} \quad (۴) \quad M_0 \pi a^2 B_0 \hat{y} \quad (۳) \quad M_0 \frac{4\pi}{3} a^2 B_0 \hat{y} \quad (۲) \quad \frac{M_0 \pi a^3 B_0}{2} \hat{y} \quad (۱)$$

۱۱- در صورتی که در محیطی میدان الکتریکی $\vec{E} = E_0(\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z)$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_0(\hat{a}_x - \hat{a}_y + \hat{a}_z)$ برقرار باشد، بار q با چه سرعتی (\vec{v}) به صورت عمود بر \vec{B} حرکت کند تا بر آن نیرویی وارد نشود؟

$$\frac{E_0}{B_0} (15\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z) \quad (۲) \quad \frac{B_0}{E_0} (7\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z) \quad (۱)$$

$$\frac{B_0}{E_0} (15\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z) \quad (۴) \quad \frac{E_0}{B_0} (7\hat{a}_x + 2\hat{a}_y - 5\hat{a}_z) \quad (۳)$$

۱۲- دو قطبی مغناطیسی $\vec{m}_1 = m_1 \hat{z}$ در مبدأ مختصات واقع است. حلقه‌ای به شعاع a هم‌محور با محور z ، در $z = d$ قرار دارد و از آن جریان I_1 می‌گذرد. نیروی وارد بر حلقه کدام است؟



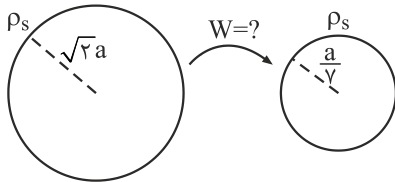
$$-\frac{1}{2} \mu_0 m_1 I_1 \frac{\pi a^2 d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (۱)$$

$$-\frac{3}{2} \mu_0 m_1 I_1 \frac{\pi a^2 d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{2} \mu_0 m_1 I_1 \frac{a^2 d}{(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \quad (۳)$$

(۴) صفر

پاسخنامه سوال‌های کارشناسی ارشد ۹۷



- ۱- گزینه (۱). با استفاده از مفهوم انرژی ذخیره شده در خازن و خازن کروی می‌توان به پاسخ صحیح رسید:
میزان بار اولیه سیستم برابر است با:

$$q = \rho_s S = \rho_s (4\pi r^2) = \rho_s (\lambda \pi a^2)$$

انرژی ذخیره شده در خازن با بار ثابت برابر است با:

$$W = \frac{q^2}{2c}$$

اختلاف انرژی ذخیره شده در کره‌ی با شعاع $\sqrt{2}a$ و $\frac{a}{2}$ همان میزان کار انجام شده برای انتقال بار ρ_s خواهد بود.

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} q^2 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right)$$

خازن یک کره‌ی به شعاع r برابر است با: $4\pi\epsilon_0 r$

$$\Delta W = \frac{(\lambda \pi a^2 \rho_s)^2}{2} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 \frac{a}{2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] = \frac{4\pi\rho_s^2 a^3}{\epsilon_0} (14 - \sqrt{2})$$

- ۲- گزینه (۴). این تست را می‌توان با مفهوم مقاومت حل کرد. در صورت سؤال اشاره به رسانایی ویژه و پتانسیل V_0 شده که می‌توان براحتی مقاومت کل ساختار را بدست آورد و از روی قانون اهم جریان و در نتیجه ρ_s را محاسبه کرد:

$$R = \int_a^{2a} \frac{dr}{4\pi\sigma_0 r^2} + \int_{2a}^{4a} \frac{dr}{4\pi(\sigma_0/2)r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{6a} \right] = \frac{\gamma}{48\pi\sigma_0 a}$$

$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{48}{\gamma} \pi\sigma_0 a V_0$$

به خاطر یکنواخت بودن میدان الکتریکی ناشی از اختلاف پتانسیل V_0 ، چگالی جریان ثابتی در سطوح کروی جاری خواهد شد:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_n S \rightarrow J_n = \frac{I}{S}$$

در سطح $r = 2a$ خواهیم داشت:

$$J_n = \frac{I}{16\pi a^2} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_0 V_0}{a}$$

با استفاده از شرط مرزی مؤلفه‌ی نرمال چگالی شار الکتریکی می‌توان ρ_s را محاسبه کرد.

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} J_{2n} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} J_{1n} = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \frac{3}{4} \frac{\sigma_0 V_0}{a} = \frac{3}{14} \frac{\epsilon_0 V_0}{a}$$

۳- گزینه (۲). با توجه به گزینه‌ها فرم ρ_s با زمان به صورت معادله‌ی $\frac{\rho_0 a}{A} (1 + B e^{-\frac{t}{\tau}})$ خواهد

بود. کفایت ضرایب A و B را از روی شرط اولیه و نهایی بار محاسبه کنیم:

در لحظه‌ی $t = 0$ کره بدون بار است:

$$t = 0 : \rho_s(0) = 0 \rightarrow B = -1$$

با گذشت زمان طولانی کل بار روی سطح کره جمع می‌شود:

$$t \rightarrow \infty : \rho_s(\infty) = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0}{4\pi a^2} = \frac{\rho_0 a}{3}$$

با اعمال شرط حاصل در معادله‌ی $\rho_s(t)$ ، A حاصل می‌شود:

$$t \rightarrow \infty : \frac{\rho_0 a}{A} = \frac{\rho_0 a}{3} \rightarrow A = 3$$

لذا $\rho_s(t) = \frac{\rho_0 a}{3} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ خواهد بود.

۴- گزینه (۱). ابتدا باید چگالی بارهای مقید ناشی از بردار \vec{P} را محاسبه کنیم:

$$\rho_{PV} = \nabla \cdot \vec{P} = 0$$

$$\rho_{PS} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n = \begin{cases} k \frac{\hat{r}}{a^2} \cdot (-\hat{r}) & \text{در سطح } r = a \\ k \frac{\hat{r}}{b^2} \cdot (\hat{r}) & \text{در سطح } r = b \end{cases}$$

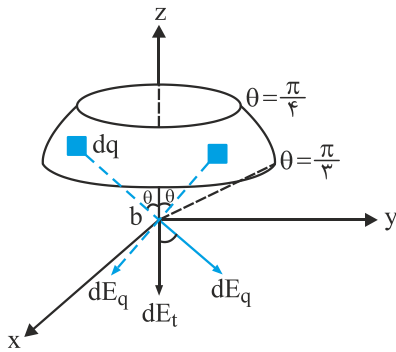
$$\rho_{PS} = \begin{cases} -\frac{k}{a^2} & \text{در سطح } r = a \\ \frac{k}{b^2} & \text{در سطح } r = b \end{cases}$$

بنابراین دو توزیع بار سطحی در روی پوسته‌های کروی داریم. این توزیع بارها، در فضای موجود پتانسیل الکتریکی ایجاد می‌کنند که باید محاسبه شود. در حضور این پتانسیل میزان کار لازم جهت انتقال بار q از بی‌نهایت به مرکز ساختار از رابطه‌ی $\Delta W = q\Delta V$ قابل محاسبه خواهد بود.

مرجع پتانسیل $V = 0$ در بی‌نهایت

$$\text{در مرکز کره } V = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{k}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\Delta W = q(V - 0) = \frac{kq}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$



۵- گزینه (۳). این تست را می‌توان با دو روش حل کرد:

روش اول: با المان‌گیری متقارن dq و مشخص کردن عامل اسکالرساز و استفاده از میدان بار نقطه‌ای، میدان کل در مبدأ در جهت $-\hat{z}$ خواهد بود بنابراین عامل اسکالرساز $\cos \theta$ خواهد بود.

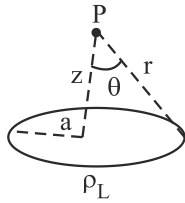
$$dE_t = dE_q \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cos \theta, \quad dq = \rho_s ds = \rho_s b^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$dE_t = \frac{\rho_s b^2 \sin \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 b^2} \cos \theta$$

$$dE_t = \frac{\rho_s \sin \theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} d\theta d\phi$$

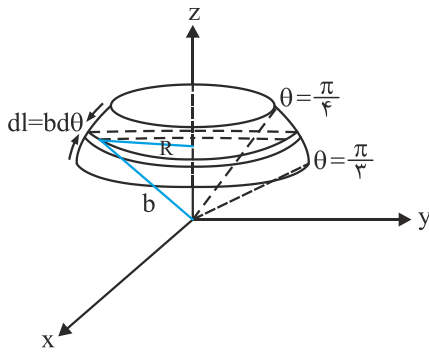
$$E_t = \frac{\rho_s}{4\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\rho_s}{16\epsilon_0} \rightarrow \vec{E}_t = \frac{-\rho_s}{16\epsilon_0} \hat{a}_z$$

روش دوم: استفاده از میدان یک حلقه‌ی با چگالی بار خطی ρ_L در نقطه‌ای روی محور آن



$$E_P = \frac{\rho_L a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{یا} \quad E_P = \frac{\rho_L a \cos \theta}{2\epsilon_0 r^2}$$

حال می‌توان از تعمیم این رابطه و استفاده از $\rho_L = \rho_s dl$ میدان توزیع بار سطحی را در مبدأ محاسبه کرد.



$$dE = \frac{\rho_L R \cos \theta}{2\epsilon_0 b^2}$$

به جای شعاع حلقه از R استوانه‌ای استفاده می‌کنیم چرا که حلقه‌های المان، شعاع‌های مختلفی دارند.

$$R = b \sin \theta$$

$$dE = \frac{(\rho_s b d\theta)(b \sin \theta) \cos \theta}{2\epsilon_0 b^2} = \frac{\rho_s \sin \theta \cos \theta d\theta}{2\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\rho_s}{16\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\rho_s}{16\epsilon_0} \hat{a}_z$$

۶- گزینه (۴).

با استفاده از فرم نقطه‌ای قانون گوس یعنی $\nabla \cdot D = \rho$ که در آن ρ چگالی بار حجمی آزاد است می‌توان گفت:

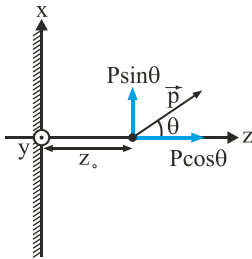
$$D = \epsilon E, \quad E = \frac{J}{\sigma} \rightarrow D = \frac{\epsilon}{\sigma} J$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\sigma} J \right) = \rho$$

طبق رابطه‌ی دیورژانسی بالا، جهت صفر بودن ρ لازم است عبارت $\frac{\epsilon}{\sigma} J$ مقداری ثابت

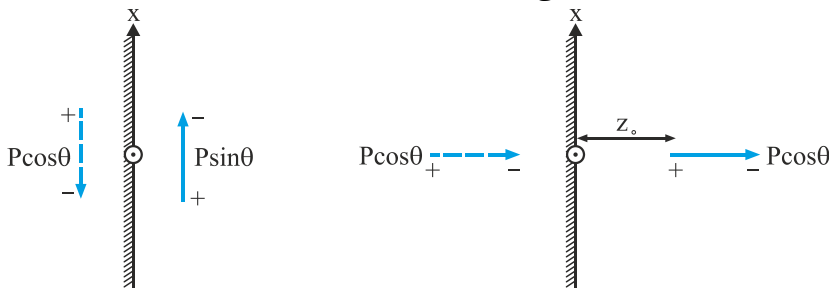
باشد و لازمه‌ی این ثابت بودن نسبت $\frac{\epsilon}{\sigma}$ است پس:

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \text{عدد ثابت} \rightarrow \epsilon \propto \sigma \propto \frac{1}{r^2}$$



۷- گزینه (۴). با تجزیه‌ی بردار \vec{P} به مؤلفه‌های عمودی و موازی نسبت به سطح رسانا مشخص می‌شود که مؤلفه‌ی موازی \vec{P} و تصویر آن در خلاف جهت هم خواهند بود که در محل رسانا نمی‌تواند باری القا کند چرا که $\rho_s = \epsilon_0 E_n$ می‌باشد و فقط مؤلفه‌ی عمود بر سطح می‌تواند بار ایجاد کند.

تصویر مؤلفه‌های P به صورت زیر می‌باشد:



بنابراین انگار دو تا دوقطبی الکتریکی با اندازه‌ی $P \cos \theta$ داریم و میدان در نقطه‌ای در راستای آنها خواسته شده است. برای یک دوقطبی که در جهت محور z قرار داشته باشد:

$$\vec{E} = \frac{|\vec{P}|}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\gamma \cos \theta \hat{a}_r + \sin \theta \hat{a}_\theta)$$

در راستای دوقطبی یعنی $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ (محور z^+ و z^-)، E برابر است با:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{|\vec{P}|}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} (2\hat{a}_z) & \text{میدان ناشی از دوقطبی واقع در } z \text{ های منفی در مبدأ} \\ \frac{|\vec{P}|}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} (-2\hat{a}_z) & \text{میدان ناشی از دوقطبی واقع در } z \text{ های مثبت در مبدأ} \end{cases}$$

حال به جای P باید $P \cos \theta$ جایگذاری شود.

$$\rho_{s_1} = \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \hat{a}_{n_1} = \epsilon_0 \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} 2\hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = \frac{P \cos \theta}{2\pi z_0^3}$$

$$\rho_{s_2} = \epsilon_0 \vec{E}_2 \cdot \hat{a}_{n_2} = \epsilon_0 \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} (-2\hat{a}_z) \cdot (-\hat{a}_z) = \frac{P \cos \theta}{2\pi z_0^3}$$

$$\rho_s \text{ کل} = \frac{P \cos \theta}{\pi z_0^3}$$

۸- گزینه (۳). این سؤال به عنوان نکته در متن فصل نهم بررسی شده است.

اندوکتانس داخلی یک سیم برابر $\frac{\mu_0}{\lambda\pi}$ است. اندوکتانس داخلی یک پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b نیز برابر $\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ می‌باشد. مقدار $\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ را می‌توان از تعریف $LC = \mu_0 \varepsilon$ نیز محاسبه کرد.

$$L_{ext} = \frac{\mu_0 \varepsilon}{C}, \quad \frac{1}{C} = \int_a^b \frac{dR}{\varepsilon_0 \int_0^{2\pi} R d\varphi dz} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \varepsilon_0} \rightarrow L_{ext} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$L_{کل} = \frac{\mu_0}{\lambda\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{\lambda} + \ln \frac{b}{a} \right]$$

۹- گزینه (۱). براحتی می‌توان از قانون بیوساوار این تست را حل کرد.

$$\vec{H} = \int \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi R^3}, \quad I d\vec{l} = -I(dx\hat{x}_x + dy\hat{x}_y)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = -(x\hat{x}_x + y\hat{x}_y) = -x\hat{x}_x - y\hat{x}_y, \quad |\vec{R}| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{-x dy + y dx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}_z$$

$$y = x^2 \rightarrow dy = 2x dx$$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int \frac{-x(2x dx) + x^2 dx}{(x^2 + x^4)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}_z = \frac{-I}{4\pi} \int_{x=1}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{x}_z = \frac{I}{4\pi} \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \hat{x}_z$$

۱۰- گزینه (۱). ابتدا جریان مغناطیس‌شوندگی را از روی \vec{M} محاسبه می‌کنیم و سپس از

رابطه‌ی $d\vec{F} = \vec{J} ds \times \vec{B}$ نیرو حاصل می‌شود.

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0, \quad \vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{x}_n = M \hat{x}_z \times \hat{x}_r = M \sin \theta \hat{x}_\varphi$$

$$d\vec{F} = \vec{J}_{ms} ds \times \vec{B} = M_0 B_0 \sin \theta ds \hat{x}_R, \quad \hat{x}_R = \cos \varphi \hat{x}_x + \sin \varphi \hat{x}_y$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = M_0 B_0 a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi \hat{x}_y = \frac{\pi M_0 B_0 a^2}{2} \hat{x}_y$$

۱۱- گزینه (۳). به منظور عدم حرکت بار q لازم است برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد.

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = qE_0(\hat{x} + 4\hat{y} + 3\hat{z})$$

$$\vec{F}_m = q\vec{V} \times \vec{B}, \quad \vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$$

$$\vec{F}_m = qB_0 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ V_x & V_y & V_z \\ B_0 & -B_0 & B_0 \end{vmatrix} = qB_0 [(V_y + V_x)\hat{x} + (V_z - V_x)\hat{y} - (V_x + V_y)\hat{z}]$$

شرط تعادل بار q :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$$

$$\begin{cases} V_y + V_z = -\frac{E_0}{B_0} \\ V_z - V_x = -\frac{4E_0}{B_0} \\ V_x + V_y = \frac{3E_0}{B_0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{5}{3} \frac{E_0}{B_0} \\ V_y = \frac{2}{3} \frac{E_0}{B_0} \\ V_z = -\frac{5}{3} \frac{E_0}{B_0} \end{cases} \xrightarrow[\text{نرمالیزه}]{\times 3} \vec{V} = \frac{E_0}{B_0} (5\hat{x} + 2\hat{y} - 5\hat{z})$$

۱۲- گزینه (۳). ساده‌ترین راه استفاده از رابطه‌ی $W = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ است که در آن \vec{B} چگالی شار مغناطیسی حلقه در محل دوقطبی مغناطیسی است.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_\gamma a^2}{2(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} (\hat{z})$$

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 m_\gamma I_\gamma a^2}{2(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

نیروی لازم برای جابه‌جایی در جهت z برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial d} = \frac{\mu_0 m_\gamma I_\gamma a^2}{2} \frac{(2d)(\frac{3}{2})}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} (\hat{z})$$

$$\vec{F} = \frac{3}{2} \mu_0 m_\gamma I_\gamma \frac{a^2 d}{(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

نیروی وارد بر حلقه طبق قانون سوم نیوتن منفی این نیرو خواهد بود بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

[سوالهای دکتری ۹۷]

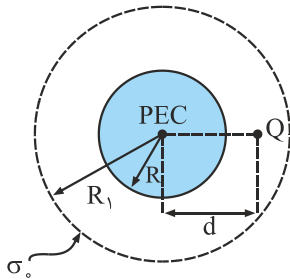
۱- پوسته‌ای کروی به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع a دارای توزیع بار سطحی با چگالی مختصات کروی هستند. $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \sin \theta \cos \varphi$ است که σ_0 مقداری ثابت است و θ و φ متغیرهای مختصات کروی هستند.

پتانسیل الکتریکی ناشی از این توزیع بار در نقاط بسیار دور از کره، با کدام گزینه بیان می‌شود؟

$$(1) \quad \frac{\sigma_0 a^4 \sin \theta \cos \varphi}{3\epsilon_0 r^3} \quad (2) \quad \frac{\sigma_0 a^3 \sin \theta \cos \varphi}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$(3) \quad \frac{\sigma_0 a^3 \cos \theta \sin \varphi}{3\epsilon_0 r^2} \quad (4) \quad \frac{\sigma_0 a^2 \sin \theta \cos \varphi}{3\epsilon_0 r}$$

۲- بار نقطه‌ای Q مطابق شکل زیر به فاصله d از مرکز یک کره رسانای بدون بار و مجزا به شعاع R در فضای آزاد مفروض است. بار کروی پوسته‌ای به چگالی سطحی ثابت σ_0 (کولمب بر مترمربع) به صورت هم‌مرکز با کره رسانا و به شعاع R_1 ($R_1 > d > R$) حول این مجموعه قرار داده می‌شود. اختلاف کار لازم برای تشکیل این پوسته بار نسبت به کار لازم برای ساختن آن در فضای خالی، کدام است؟



$$(1) \quad \frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\epsilon_0 d}$$

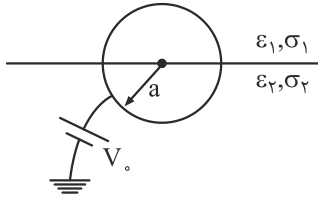
$$(2) \quad \frac{\sigma_0 Q R_1^2}{\epsilon_0 \left(d - \frac{R^2}{d}\right)} \quad (3) \quad -\frac{\sigma_0 Q R_1^2}{2\epsilon_0 d} \quad (4) \quad \frac{\sigma_0 Q R_1^2}{2\epsilon_0 d}$$

۳- خازن استوانه‌ای هم‌محور بسیار طویل به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی c ، در فضای آزاد مفروض است. ناحیه $a < r < b < c$ از یک توزیع ثابت دوقطبی‌ها با بردار قطبش الکتریکی $\vec{P} = k\vec{r}$ پر شده است. محور ساختار منطبق بر محور z و بردار مکان در دستگاه استوانه‌ای است. اگر رساناهای داخلی و بیرونی اتصال کوتاه شوند، چگالی بار آزاد در واحد طول داخلی چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{k\pi(b^2 - a^2)}{\ln(\frac{c}{a})} \quad (2) \quad \frac{k\pi a^2(b^2 - a^2)}{c^2 - b^2} \quad (3) \quad \frac{k\pi^2 \ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{c}{a})} \quad (4) \quad \frac{k\pi^2 \ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{c}{a})}$$

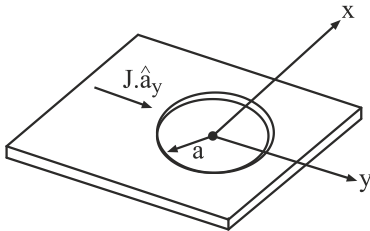
۴- الکتروود رسانای کاملی به شکل کره با شعاع a به صورت متقارن، بین دو نیم فضا با رسانایی ویژه و گذردهی الکتریکی σ_1 و ϵ_1 و σ_2 و ϵ_2 قرار گرفته است. این الکتروود به پتانسیل V_0 نسبت به بی‌نهایت وصل می‌شود. اگر چگالی بار آزاد سطحی روی کره در نیمه واقع در محیط ۱ را با ρ_{s_1} و چگالی بار آزاد سطحی در نیمه واقع در محیط ۲ را با ρ_{s_2} نشان دهیم،

نسبت $\frac{\rho_{s_1}}{\rho_{s_2}}$ کدام است؟



$$\begin{array}{ll} \frac{\epsilon_1 \sigma_2}{\epsilon_2 \sigma_1} & (۲) \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} & (۱) \\ \frac{\epsilon_1 \sigma_1}{\epsilon_2 \sigma_2} & (۴) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} & (۳) \end{array}$$

۵- در شکل زیر، بر روی صفحه‌ای نامحدود، به ضخامت ناچیز و رسانایی ویژه σ ، جریانی با چگالی $J = J_0 \hat{a}_y \left(\frac{A}{m^2} \right)$ عبور می‌کند. در صورتی که حفره‌ای به قطر $2a$ در این صفحه ایجاد شود، در مختصات استوانه‌ای (ρ, φ, z) توزیع پتانسیل روی صفحه، کدام است؟ مرکز حفره منطبق بر مبدأ مختصات و صفحه رسانا در صفحه xy است.



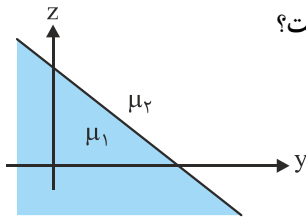
$$\begin{array}{l} \frac{J_0}{\sigma} \left(a - \frac{\rho^2}{a} \right) \sin \varphi & (۱) \\ -\frac{J_0}{\sigma} \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \sin \varphi & (۲) \\ -\frac{J_0}{\sigma} \left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \sin \varphi & (۳) \\ -\frac{J_0}{\sigma} \left(a + \frac{\rho^2}{a} \right) \sin \varphi & (۴) \end{array}$$

۶- نیمی از فضا با یک ماده رسانا با مشخصات $\sigma = \sigma_0 \sin^2 \theta \left(\frac{S}{m} \right)$ و $\epsilon = \epsilon_0$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ در مختصات کروی پر شده و نیم دیگر $\left(\frac{\pi}{4} < \theta < \pi \right)$ فضای آزاد است. یک الکتروود رسانای کامل کروی به شعاع a و به مرکز مبدأ مختصات بین این دو نیم فضا قرار گرفته

است؛ به نحوی که دقیقاً نیمی از آن درون رسانا است. اگر بار آزاد Q به الکتروود تزریق شود، چه مدت طول می‌کشد تا بار کل الکتروود به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه کاهش یابد؟

$$(1) \quad \frac{3\varepsilon_0}{2\sigma_0} \quad (2) \quad \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \quad (3) \quad 3\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \quad (4) \quad \frac{\varepsilon_0}{2\sigma_0}$$

۷- صفحه 1 $y+z=1$ مرز دو ناحیه با تراوایی $\mu_1 = 4\mu_0$ و $\mu_2 = 6\mu_0$ است. اگر در ناحیه 1 ،



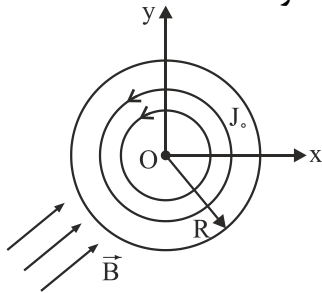
$\vec{B}_1 = 2\hat{x} + \hat{y}$ باشد، میدان مغناطیسی در ناحیه 2 کدام است؟

$$(1) \quad 3\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y} - \frac{5}{4}\hat{z} \quad (2) \quad \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} \\ (3) \quad 3\hat{x} + \frac{3}{4}\hat{y} - \frac{3}{4}\hat{z} \quad (4) \quad 3\hat{x} + \frac{5}{4}\hat{y} - \frac{1}{4}\hat{z}$$

۸- روی قرص $0 \leq r \leq R$ و $0 \leq \phi \leq 2\pi$ واقع در صفحه xoy (مانند شکل زیر) جریان

سطحی با چگالی یکنواخت $\vec{J}_s = J_0 \hat{\phi} \left(\frac{A}{m} \right)$ جاری است؛ و در میدان مغناطیسی یکنواخت

$\vec{B} = B_0 (\hat{x} + \hat{y})$ قرار دارد. گشتاور نیروی وارد بر قرص چقدر است؟



$$(1) \quad \frac{1}{2} \pi B_0 J_0 R^2 (\hat{y} - \hat{x}) \\ (2) \quad \pi B_0 J_0 R (\hat{y} + \hat{x}) \\ (3) \quad \pi B_0 J_0 R^2 (\hat{y} + \hat{x}) \\ (4) \quad \frac{1}{3} \pi B_0 J_0 R^2 (\hat{y} - \hat{x})$$

۹- در فضای آزاد، ناحیه $|z| < \frac{h}{2}$ در دستگاه دکارتی با قطبش مغناطیسی ثابت

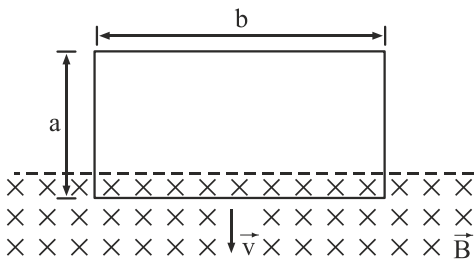
$\vec{M} = M_0 (\hat{z} + \hat{x})$ پر شده است. در ناحیه $h < z < h+d$ نیز یک ماده مغناطیسی با

تراوایی نسبی μ_r قرار گرفته است. چگالی شار مغناطیسی در $z=0$ و چگالی انرژی

مغناطیسی ذخیره شده در $z = h + \frac{d}{2}$ کدام است؟

$$(1) \quad \mu_0 M_0 \hat{x} \quad , \quad \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 M_0^2 \\ (2) \quad \mu_0 M_0 \hat{z} \quad , \quad 0 \\ (3) \quad 0 \quad , \quad 0 \\ (4) \quad \mu_0 M_0 \hat{x} \quad , \quad 0$$

۱۰- حلقه‌ای مستطیلی به ابعاد a و b و با مقاومت الکتریکی R مطابق شکل با سرعت \vec{v} در میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. چگالی شار مغناطیسی \vec{B} عمود بر سطح سیم‌پیچ است. با چشم‌پوشی از خودالقایی حلقه، نیروی وارد بر حلقه برابر کدام خواهد بود؟



$$\frac{-\vec{v}b^{\vee}B^{\vee}}{R} \quad (1)$$

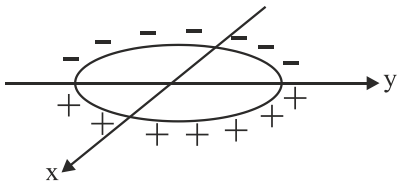
$$\frac{\vec{v}b^{\vee}B^{\vee}}{R} \quad (2)$$

$$\frac{-\vec{v}b^{\vee}B^{\vee}}{R} \quad (3)$$

$$\frac{\vec{v}b^{\vee}B^{\vee}}{R} \quad (4)$$

[پاسخنامه سوال‌های دکتری ۹۷]

- ۱- گزینه (۲). با توجه به فرم توزیع بار سطحی می‌توان گفت که در $x > 0$ بار مثبت و در $x < 0$ بار منفی داریم:



$$x > 0 \quad \text{یا} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \rightarrow +q$$

$$x < 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -q$$

سطح مقطع دایروی از کره‌ی باردار

بنابراین با یک ساختار دوقطبی الکتریکی مواجه هستیم، پتانسیل یک دوقطبی در فواصل دور برابر است با:

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

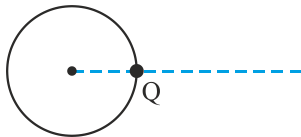
$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int \vec{r}' dq = \int \vec{r}' \rho_s ds' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a \hat{a}_r \sigma_s \sin \theta \cos \varphi a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \hat{a}_x a^3 \sigma_s \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \varphi (\sin \theta \cos \varphi) d\theta d\varphi \\ &= \hat{a}_x a^3 \sigma_s \frac{4}{3} \pi = \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_s \hat{a}_x \end{aligned}$$

بنابراین:

$$V = \frac{a^3 \sigma_s}{3\epsilon_0 r^2} \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \frac{\sigma_s a^3}{3\epsilon_0} \frac{\sin \theta \cos \varphi}{r^2}$$

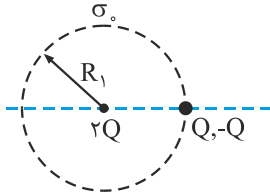
- ۲- گزینه‌ی صحیح وجود ندارد.

درستی گزینه‌ها را می‌توان با یک حالت حدی بررسی کرد. اگر فرض کنیم $R = d$ باشد یعنی بار Q مماس بر کره‌ی رسانا باشد. در این صورت طبق روش تصویر، بارهای Q' و Q'' باید برای حذف اثر کره‌ی رسانا در نظر گرفته شوند.



$$Q' = -\frac{R}{d} Q = -Q$$

$$Q'' = Q - Q' = 2Q$$



Q' دقیقاً در محل بار Q قرار می‌گیرد (با فرض $R = d$) و اثر آن را خنثی می‌کند و بار Q'' در مرکز قرار می‌گیرد.

بنابراین یک بار نقطه‌ای $2Q$ در مرکز داریم که در حضور میدان آن پوسته‌ی کروی با چگالی سطحی σ_0 و به شعاع R_1 قرار است ساخته شود، لذا انرژی لازم برای این کار برابر است با:

(پتانسیل بار نقطه‌ای در محل پوسته‌ی کروی) \times (بار پوسته‌ی کروی) $W =$

$$q = \sigma_0 s = \sigma_0 4\pi R_1^2$$

$$V = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

بنابراین

$$W = \frac{\sigma_0 (4\pi R_1^2)(2Q)}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{2\sigma_0 QR_1}{\epsilon_0}$$

که در گزینه‌ها با اعمال شرط $R = d$ وجود ندارد. توجه کنید که فرض $R = d$ هیچ خللی در تابعیت گزینه‌ها هم وارد نمی‌کنند.

گزینه (۱). با فرض اینکه خواسته‌ی سؤال محاسبه‌ی چگالی بار القایی در واحد طول رسانای داخلی باشد می‌توان از بارهای مقید به پاسخ صحیح رسید.

$$\vec{P} = k\vec{r} = kr\hat{a}_r$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{a}_n = \begin{cases} -ka & \text{سطح استوانه‌ای داخلی} \\ kb & \text{سطح استوانه‌ای بیرونی} \end{cases}, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -2k$$

با فرض اینکه مقدار چگالی بار القا شده برابر λ باشد میدان الکتریکی E در نواحی بین پوسته‌ها از قانون گوس قابل محاسبه است:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r \quad (\text{مختصات استوانه‌ای})$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{kr}{\epsilon_0} \right) \hat{a}_r & a < r < b \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r & b < r < c \end{cases}$$

با توجه به اینکه رساناهای داخلی و خارجی اتصال کوتاه شده‌اند بنابراین باید $V_a = V_c$ باشد.

$$V_b - V_c = V_b - V_a \rightarrow -\int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{c}{a} = \frac{k}{2\epsilon_0} (b^2 - a^2) \rightarrow \lambda = \frac{k\pi(b^2 - a^2)}{\ln(\frac{c}{a})}$$

۴- گزینه (۱). چون میدان به خاطر تقارن کروی در مرز بین دو محیط به صورت مؤلفه‌ی

مماسی است پس طبق شرط مرزی $E_{1t} = E_{2t}$ خواهیم داشت، بنابراین

$$E_1 = E_2 \rightarrow E_{1n} = E_{2n} \rightarrow \frac{D_{1n}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_2}$$

$$\rightarrow \frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{|D_{1n}|}{|D_{2n}|} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

۵- گزینه (۳). با توجه به رابطه‌ی جریان‌های دائم با میدان الکتریکی به صورت $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (قانون اهم) داریم:

$$\vec{E} = \frac{J}{\sigma} \hat{a}_y$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

از طرف پتانسیل الکتریکی هم برابر است با:

با توجه به رسانا بودن صفحه، سطح هم پتانسیل داریم. بنابراین:

$$V(R \rightarrow \infty) = V(R = a)$$

$$V|_{R \rightarrow \infty} = -\frac{J}{\sigma} y = -\frac{J}{\sigma} R \sin \varphi = V(R = a)$$

با چک کردن این شرط در گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

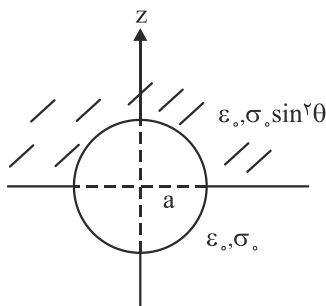
۶- گزینه (؟؟؟). ساختار مسئله به صورت شکل زیر است:

رابطه‌ی زمانی بار الکتریکی به صورت زیر است:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

بنابراین دنبال t ای هستیم که $Q(t)$ به $\frac{1}{e} Q_0$ برسد:

$$\frac{1}{e} Q_0 = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow t = \tau = RC \quad (\text{ثابت زمانی})$$



کافیست R و C ساختار را محاسبه کنیم. توجه کنید که بخشی که به صورت فضای آزاد لذا

$$R = \int_a^\infty \frac{dr}{\sqrt{\pi\sigma} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta} = \frac{3}{4\pi\sigma} \ln a$$

است در محاسبه‌ی R وارد نمی‌شود.

$$\frac{1}{C} = \int_a^\infty \frac{dr}{\sqrt{\pi\epsilon_0} r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln a$$

بنابراین

$$t = \tau = RC = 3 \frac{\epsilon_0}{\sigma_0}$$

۷- گزینه (۴). شرایط مرزی در مغناطیس ساکن و در عدم حضور چگالی جریان آزاد به صورت $B_{1n} = B_{2n}$ و $H_{1t} = H_{2t}$ است.

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \rightarrow B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{2t} + \vec{B}_{2n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_{1t} + \vec{B}_{1n}$$

با تعریف معادله‌ی سطح مرز بین دو محیط به صورت $f(y, z) = y + z - 1$ می‌توان \hat{a}_n را از رابطه‌ی $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ محاسبه کرد.

$$\hat{a}_n = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{B}_{2n} = (\vec{B}_1 \cdot \hat{a}_n) \hat{a}_n = \left[(\sqrt{2} \hat{x} + \hat{y}) \cdot \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}} \right] \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{2}$$

$$\vec{B}_{2t} = \vec{B}_1 - \vec{B}_{2n} = \sqrt{2} \hat{x} + \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{z} = \sqrt{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{z}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{3}{2} \left(\sqrt{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{z} \right) + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z} = 3\sqrt{2} \hat{x} + \frac{5}{4} \hat{y} - \frac{1}{4} \hat{z}$$

۸- گزینه (۴). از رابطه‌ی $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ می‌توان گشتاور نیروی وارد بر قرص را محاسبه کرد. قرص داده شده یک دوقطبی مغناطیسی است که \vec{m} آن برابر است با:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{\mu_0} \int \vec{r}' \times I \vec{dl} \quad , \quad I \vec{dl} = \vec{J} ds \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \hat{a}_r \times (J \hat{a}_\varphi r dr d\varphi) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \pi J R^2 \hat{a}_z\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \pi B J R^2 (\hat{y} - \hat{x})$$

۹- گزینه (۴). چگالی جریان‌های مقید سطحی و حجمی را محاسبه کرده و از روی روابط فصل مغناطیس ساکن \vec{B} حاصل می‌شود:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{a}_n = \begin{cases} \hat{M}_0 (\hat{z} + \hat{x}) \times \hat{a}_z = -M_0 \hat{y} & : z = \frac{h}{\mu_0} \text{ در سطح} \\ \hat{M}_0 (\hat{z} + \hat{x}) \times (-\hat{a}_z) = M_0 \hat{y} & : z = -\frac{h}{\mu_0} \text{ در سطح} \end{cases}$$

بنابراین دو صفحه‌ی بی‌نهایت داریم که جریان‌های سطحی در خلاف جهت هم دارند و از رابطه‌ی صفحه‌ی جریان بی‌نهایت B حاصل می‌شود:

$$\overleftarrow{-M_0 \hat{y}} \quad z = \frac{h}{\mu_0}$$

$$\overleftarrow{M_0 \hat{y}} \quad z = -\frac{h}{\mu_0}$$

$$\vec{B}|_{z=0} = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 [-M_0 \hat{y} \times (-\hat{z}) + M_0 \hat{y} \times (\hat{z})] = \mu_0 M_0 \hat{x}$$

برای محاسبه‌ی چگالی انرژی مغناطیسی در $z = h + \frac{d}{\mu_0}$ کفایت \vec{B} در این محل محاسبه شود. این نقطه در بالای هر دو صفحه‌ی جریان بی‌نهایت واقع است لذا:

$$\vec{B}\left(z = h + \frac{d}{\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0} \mu_0 [-M_0 \hat{y} \times \hat{z} + M_0 \hat{y} \times \hat{z}] = 0 \rightarrow W_m = 0$$

۱۰- گزینه (۳). ابتدا از روی emf القا شده مقدار جریان حلقه را محاسبه می‌کنیم و سپس نیرو را بدست می‌آوریم.

$$emf = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = VbB$$

$$I = \frac{emf}{R} = \frac{VbB}{R}$$

بنابراین:

$$F = \left| \int I d\vec{l} \times \vec{B} \right| = \frac{vb^2 B^2}{R}$$

از طرفی طبق قانون لنز جهت نیروی مغناطیسی وارد بر حلقه در خلاف جهت حرکت حلقه می‌باشد. لذا:

$$\vec{F} = -\frac{\vec{v}b^2 B^2}{R}$$