فهرست

پیشگفتار

همان‌گونه که در پی‌نوشت بر پیشگفتار کتاب «مبانی آنالیز ریاضی» بیان شده است اینک مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکورهای کارشناسی ارشد ریاضی، آمار، علوم کامپیوتر و دکتری ریاضی به صورت کتابی مستقل که همزمان باید پیوست تفکیک‌ناپذیر کتاب بالا تلقی شود در دسترس علاقه‌مندان قرار می‌گیرد.

در حل تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای، از تکرار مطالب کتاب یاد شده در بالا خودداری کرده و به جای آن، به نکته‌های به کار رفته اشاره شده است. هدف از این روش، وادار کردن خواننده به تأمل دربارهٔ آموخته‌هایش و همچنین، مراجعه پیوسته به کتاب است تا به این ترتیب، بتواند هرچه بیشتر با مفاهیم، تعریف‌ها و قضیه‌ها خو بگیرد.

در پایان بر خود لازم می‌دانیم از مدیریت محترم انتشارات پوران پژوهش سپاس‌گذاری کنم. همچنین، سرکار خانم خسروی که با دقت و وسواس فراوان تایپ کتاب را برعهده داشتند جای سپاس ویژه دارند.

محمدعلی رضوانی
زمستان ۱۴۰۰

فصل ۱. دستگاه‌های اعداد حقیقی و مختلط

۱. اگر به ازای هر عدد مثبت ε، $y \le x \le y+\varepsilon$، آنگاه « ریاضی ۷۴ »

۱) $x=y$ ۲) $x<y$ ۳) $x>y$ ۴) $xy=۱$

۲. مجموعهٔ $\{x : \lfloor x\rfloor \le x/۲\}$ با کدام مجموعه برابر است؟ « ریاضی ۷۴ »

۱) $]-\infty\,,\,۰[$ ۲) $]-\infty\,,\,۱[$ ۳) $]\,۱\,,\,\infty\,[$ ۴) $]\,۰\,,\,\infty\,[$

۳. اگر $n\in\mathbb{N}$، کدام یک از گزاره‌های زیر مثال نقض دارد؟ « ریاضی ۷۵ »

۱) $\sqrt{n(n+۱)}$ گنگ است. ۲) $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ گنگ است.

۳) $\sqrt{n/(n+۲)}$ گنگ است. ۴) $\sqrt[۳]{n}+\sqrt{n+۱}$ گنگ است.

۴. اگر $A=\{\frac{۱-۵n}{n+۱} : n\in\mathbb{N}\}$، $\sup A+\sup(-A)$ کدام است؟ « ریاضی ۷۵ »

۱) ۵- ۲) صفر ۳) ۳ ۴) ۵

۵. اگر x و y دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، کدام گزاره نادرست است؟ « ریاضی ۷۵ »

۱) $\| x\|\,\| y\| = | x\cdot y|$

۲) $\| x+y\|^۲ - \| x-y\|^۲ = ۴(x\cdot y)$

۳) $\| x+y\|^۲ + \| x-y\|^۲ = ۲(\| x\|^۲ + \| y\|^۲)$

۴) $\| x+y\|^۲ = \| x\|^۲ + \| y\|^۲$

۶. به ازای هر x که در $x>b$ صدق کند داریم $x\ge a$. در این صورت « ریاضی ۷۶ »

۱) $a\le b$ ۲) $b\le a$ ۳) $a<b$ ۴) $b<a$

۷. کدام یک از نابرابری‌های زیر به ازای $a>۰$، $b>۰$ و $a+b=۱$ برقرار است؟

« ریاضی ۷۷ »

۱) $a+\frac{۱}{a}+b+\frac{۱}{b}\le ۴$ ۲) $\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲\ge\frac{۲۵}{۲}$

۳) $\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲<\frac{۲۵}{۲}$ ۴) $\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲\ge ۲۵$

۸. اگر $\circ < a < 1 < b$ و $A = \{a^{1/n} + b^{1/m} : n, m \in \mathbb{N}\}$، مقدار $\sup A$ کدام است؟
« ریاضی ۷۷ »

۱) $1 + a$ ۲) $1 + b$ ۳) $a + b$ ۴) ۲

۹. فرض کنیم $A = \{2x - \sqrt{2}y : \circ < x < 1\ ,\ -1 < y < 2\}$، در این صورت: « ریاضی ۷۸ »

۱) $\sup A = \sqrt{2} - 1$ ۲) $\sup A = 1 - \sqrt{2}$

۳) $\sup A = 2 + \sqrt{2}$ ۴) $\sup A = 2 - \sqrt{2}$

۱۰. اگر z عــددی مخــتلط باشــد و $|\, z + ai \,| = |\, z + bi \,|$ (کـه در آن a و b حقیقــی‌انــد و $a \neq b$) مقدار $z - \overline{z}$ کدام است؟
« ریاضی ۷۹ »

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

۱۱. اگر $a < x < b$، آنگاه: « ریاضی ۷۹ »

۱) $|\, x \,| < a$ ۲) $|\, x \,| < b$

۳) $|\, x \,| < \min\{|\, a \,|, |\, b \,|\}$ ۴) $|\, x \,| < \max\{|\, a \,|, |\, b \,|\}$

۱۲. $\sup\left\{\dfrac{nx}{1 + n^2 x^2} : \circ < x \leq 1\right\}$ کدام است؟ $(n \in \mathbb{N})$ « ریاضی ۷۹ »

۱) $1/3$ ۲) ۲ ۳) $1/2$ ۴) ۳

۱۳. برد تابع f با فرمول $f(x) = x - \frac{1}{k}\lfloor kx \rfloor$ ($k > \circ$ ثابت) عبارت است از: « ریاضی ۷۹ »

۱) $[\circ\ , 1/k\ [$ ۲) $[\circ\ , k\ [$ ۳) $[-k\ , k\ ]$ ۴) $]-k\ , k\ [$

۱۴. فرض کنیم توابع f و g، $f(x) = x$ و $g(x) = 1 - x$، بر مجموعــهٔ $A = [\circ\ , 1]$ تعریــف شده باشند. در این صورت: « ریاضی ۷۹ »

۱) $\sup\limits_A (f+g) = \sup\limits_A (f) + \sup\limits_A (g)$ ۲) $\sup\limits_A (f+g) = \sup\limits_A (f) = \sup\limits_A (g)$

۳) $\inf\limits_A (f+g) = \inf\limits_A (f) + \inf\limits_A (g)$ ۴) $\inf\limits_A (f+g) = \inf\limits_A (f) = \inf\limits_A (g)$

۱۵. اگر $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$، مقدار $\sup A + \inf A$ کدام است؟ « ریاضی ۸۰ »

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $3/2$ ۴) ۲

۱۶. **تابع** $\varphi : [\circ,1[\times \mathbb{N} \to [1,\infty[$ ، $\varphi(x,n) = x + n$ ، « ریاضی ۸۰ »

۱) پوشا نیست ولی یک‌به‌یک است. ۲) پوشاست ولی یک‌به‌یک نیست.

۳) پوشا و یک‌به‌یک است. ۴) نه پوشاست نه یک‌به‌یک.

۱۷. **چند عدد مختلط غیرحقیقی در رابطهٔ** $z + \overline{z} = \frac{\overline{z}}{z}$ **صدق می‌کنند؟** « ریاضی ۸۱ »

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸. **اگر f تابعی بر** $[-1,1]$ **با ضـابطهٔ** $f(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ **باشـد (n عـددی طبیعـی) آنگـاه** $\sup\{|f(x)| \ : -1 \le x \le 1\}$ **کدام است؟** « ریاضی ۸۱ »

۱) $1/2n$ ۲) $1/n$ ۳) $1/2$ ۴) 1

۱۹. **فرض کنیم** $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left]\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$ **. در این صورت .....** « ریاضی ۸۲ »

۱) $\begin{cases}\inf E = 1\\ \sup E = 2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}\inf E = \circ\\ \sup E = 1\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}\inf E = \circ\\ \sup E = 2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}\inf E > \circ\\ \sup E < 2\end{cases}$

۲۰. **کدام‌یک از مجموعه‌های زیر کراندار نیست؟** « ریاضی ۸۲ »

۱) $\{\frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$ ۲) $\{x \sin x : x \in \mathbb{R}\}$

۳) $\{\frac{x}{1+x} : x \in [-1/2\ ,\ \infty[\}$ ۴) $\{e^{-x^2} \sin x : x \in \mathbb{R}\}$

۲۱. **اگر** $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ **، حاصل** $\sup\limits_{n\ge 1} a_n + \inf\limits_{n \ge 1} a_n$ **کدام است؟** « آمار ۸۵ »

۱) $-1/2$ ۲) صفر ۳) $1/2$ ۴) 1

۲۲. **کدام گزاره درست است؟** « ریاضی ۸۷ »

۱) یک عدد گنگ به توان عددی گنگ، ممکن است عددی گویا بشود.

۲) مجموعهٔ $\{1/x \ : \ \circ < x < 1\}$ کراندار است.

۳) مجموعهٔ $\{1/x \ : \ \circ < x < 1\}$ اینفیموم ندارد.

۴) اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ کراندار باشد، آنگاه $\inf A = \sup(-A)$.

۲۳. کدام گزاره درست است؟ « ریاضی ۸۸ »

۱) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲) حاصلضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) هر عدد گنگ به توان عددی گنگ، عددی گنگ است.

۴) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $\sqrt{n-۱}+\sqrt{n+۱}$ گنگ است.

۲۴. فرض کنیم $A=\left\{\frac{(-۱)^n}{n\sqrt{۲}}-\frac{(-۱)^m}{(۲m-۱)\sqrt{۳}}:n,m\in\mathbb{N}\right\}$، $\alpha=\sup A$ و $\beta=\inf A$. **در این صورت** « ریاضی ۹۰ »

۱) $\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، $\beta=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، $\beta=-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$

۳) $\alpha=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$، $\beta=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\alpha=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، $\beta=-(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})$

۲۵. مقدار $\sup\{\sqrt[n]{n}:n=۱,۲,۳,\ldots\}$ **کدام است؟** « آمار ۹۱ »

۱) $\sqrt[۳]{۳}$ ۲) $\sqrt[۴]{۴}$ ۳) ۲ ۴) e

۲۶. اگر $A=\{۲(-۱)^{n+۱}+(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}(۲+\frac{۳}{n}):n\in\mathbb{N}\}$، **آنگاه** $\sup A$ **و** $\inf A$ **به ترتیب برابرند با** « علوم‌کامپیوتر ۹۳ »

۱) ۳ و ۵/۳− ۲) ۵ و ۱۱/۲− ۳) ۳ و ۷− ۴) ۷ و ۷−

۲۷. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی کراندار $\mathbb{R}$ باشند. برابری $\sup A=\inf B$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟ « دکتری ریاضی ۹۱ »

۱) به ازای هر $a\in A$ و $b\in B$ داریم $a\leq b$ و به ازای هر $a\in A$ و هر $\varepsilon>۰$، عنصری مانند $b\in B$ هست که $b-\varepsilon<a$.

۲) به ازای هر $a\in A$ و هر $b\in B$ داریم $a\leq b$ و به ازای هر $\varepsilon>۰$، عنصرهایی مانند $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a\leq\varepsilon$.

۳) به ازای هر $a\in A$ عنصری مانند $b\in B$ هست که $a\leq b$ و به ازای هر $\varepsilon>۰$، عنصرهایی مانند $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارند به‌طوری‌که $b-a\leq\varepsilon$.

۴) به ازای هر $\varepsilon>۰$ و هر $a\in A$، عنصری مانند $b\in B$ هست که $a+\varepsilon>b$ و به ازای هر $b\in B$، عنصری مانند $a\in A$ هست که $b-\varepsilon<a$.

۲۸. مساحت یک هشت ضلعی منتظم که رأس‌های آن ریشه‌های هشتم یک هستند، برابر است با « دکتری آمار ۹۱ »

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt[۸]{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt[۸]{۲}$

۲۹. با این فرض که $z=(x,y)\in\mathbb{R}^۲$، کدام ضابطهٔ زیر، نرمی بر $\mathbb{R}^۲$ تعریف نمی‌کند؟ « دکتری ریاضی ۹۲ »

۱) $\| z \|=| x |+| y |$ ۲) $\| z \| =(\sqrt{| x |}+\sqrt{| y |})^۲$

۳) $\| z \|=\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}\right)^{۱/۲}$ ۴) $\| z \|=\left(| x |^۳+| y |^۳\right)^{۱/۳}$

۳۰. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی کراندار $\mathbb{R}$ باشند. کدام گزاره هم‌ارز است با $\inf A\leq \inf B$؟ « علوم کامپیوتر ۹۴ »

۱) به ازای هر $b\in B$ عضوی مانند $a\in A$ هست به طوری که $a\leq b$.

۲) عضوی مانند $a\in A$ هست به طوری که به ازای هر $b\in B$ داریم $a\leq b$.

۳) به ازای هر $\varepsilon>۰$ دو عضو مانند $a\in A$ و $b\in B$ هست به طوری که $a<b+\varepsilon$.

۴) به ازای هر $b\in B$ و هر $\varepsilon>۰$ عضوی مانند $a\in A$ هست به طوری که $a<b+\varepsilon$.

۳۱. فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ ناتهی بوده و تابع $f:A\times B\to\mathbb{R}$ کراندار باشد. در این صورت «دکتری ریاضی ۹۵ »

۱) $\sup_y \inf_x f(x,y)\leq \inf_y \sup_x f(x,y)$

۲) $\sup_y \inf_x f(x,y)\leq \inf_x \sup_y f(x,y)$

۳) $\sup_y \inf_x f(x,y)\geq \inf_x \sup_y f(x,y)$

۴) $\sup_x \inf_y f(x,y)\leq \inf_x \sup_y f(x,y)$

۳۲. فرض کنیم $A=\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{۴}\right)-\frac{۱}{m+۱}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$. در این صورت « ریاضی ۹۶ »

۱) $\sup A=۱$، $\inf A=\frac{-۱-\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sup A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\inf A=\frac{-۱-\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\sup A=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $\inf A=-\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sup A=۱$، $\inf A=-\frac{۳}{۲}$

۳۳. اگر $A=\left\{\frac{۱}{a(۱-a)}: ۰<a<۱\right\}$ و B عبارت باشد از مجموعهٔ همهٔ کران‌های پـایین A (در $\mathbb{R}$) آنگاه $\sup B$ برابر است با « علوم کامپیوتر ۹۶ »

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴. فرض کنیم E و F دو زیرمجموعهٔ ناتهی و کراندار $\mathbb{R}$ باشند. کدام گزینه درست است؟ « ریاضی ۹۷ »

۱) $\sup(E+F)=\sup E+\sup F$.

۲) $\sup(EF)=(\sup E).(\sup F)$

۳) اگر $E\bigcap F\neq \phi$، آنگاه

$$\sup(E\bigcup F)=\sup E+\sup F-\sup(E\bigcap F)$$

۴) اگر $E\bigcap F\neq \phi$، آنگاه

$$\sup(E\bigcap F)=(\sup E).(\sup F)$$

۳۵. برای مجموعهٔ $A=\left\{\frac{۱}{n^{۲}}-\frac{۱}{m}: n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{۰\}\right\}$ کدام گزینه درست است؟ «ریاضی ۹۹»

۱) A مینیموم دارد. ۲) $\inf A=-۱$

۳) $\max A=\sup A=۱$ ۴) A نه $\max$ دارد نه $\min$.

۳۶. اگر $A=\left\{\frac{۳m+۲n}{۵m+۷n}: m,n\geq ۳\right\}$، آنگاه $\inf A$ برابر است با «دکتری ریاضی ۱۴۰۰»

۱) ۰ ۲) ۲ / ۷ ۳) ۳ / ۵ ۴) ۵ / ۱۲

فصل ۲. توپولوژی فضاهای متریک

۱. **کدام گزارهٔ زیر در مورد مجموعهٔ $\{(x,y) : x+y \neq 0\}$ درست است؟** « آمار ۷۲ »

۱) در $\mathbb{R}^2$ باز نیست ولی در $\mathbb{R}^3$ باز است. ۲) هم در $\mathbb{R}^2$ باز است هم در $\mathbb{R}^3$.

۳) در $\mathbb{R}^2$ باز است و در $\mathbb{R}^3$ باز نیست. ۴) نه در $\mathbb{R}^2$ باز است نه در $\mathbb{R}^3$.

۲. **کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟** « آمار ۷۳ »

۱) $\mathring{E}$ باز است.

۲) $\mathring{E} = E$ اگر و تنها اگر E باز باشد.

۳) $\mathring{E}$ همواره یک زیرمجموعهٔ سرهٔ E است.

۴) اگر G باز باشد و $G \subseteq E$، آنگاه $G \subseteq \mathring{E}$.

۳. **اگر (X,d) فضایی متریک و A و B دو زیرمجموعهٔ X باشند، کدام گزینه درست است؟**
« ریاضی ۷۵ »

۱) $(A\bigcup B)^\circ \subseteq \mathring{A}\bigcup \mathring{B}$ ۲) $\overline{A}\bigcap B \subseteq \overline{A\bigcap B}$

۳) $\overline{A}\bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A\bigcap B}$ ۴) $\overline{A}\bigcap \mathring{B} \subseteq \overline{A\bigcap B}$

۴. **اگر A زیرمجموعهٔ فضایی متریک باشد، کدام گزینه با گزینه‌های دیگر هم‌ارز نیست؟**
« ریاضی ۷۵ »

۱) A مجموعه‌ای فشرده است.

۲) A بسته و کراندار است.

۳) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی A در A نقطهٔ انباشتگی دارد.

۴) هر دنباله در A زیردنباله‌ای همگرا به نقطه‌ای از A دارد.

۵. **اگر $Y = \{1\} \bigcup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر در Y مجموعه‌ای باز است؟**
«ریاضی ۷۵ »

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{2\}$ ۴) $\{3\}$

۶. **دربارهٔ مجموعهٔ حدهای زیردنباله‌ای $a_n = \cos n$ چه می‌توان گفت؟ (n برحسب درجه است.)** « ریاضی ۷۵ »

۱) شمارش‌پذیر است. ۲) متناهی است. ۳) شمارش‌ناپذیر است. ۴) ϕ است.

۷. **فرض کنیم $\{G_\alpha\}$ و $\{F_\alpha\}$ به ترتیب گردایه‌ای از مجموعه‌های باز و بسته باشند، در این صورت** « ریاضی ۷۶ »

۱) $\bigcap_\alpha (F_\alpha \setminus G_\alpha)$ بسته است. ۲) $\bigcup_\alpha F_\alpha$ بسته است.

۳) $\bigcap_\alpha (G_\alpha \setminus F_\alpha)$ باز است. ۴) $\bigcup_\alpha (F_\alpha \setminus G_\alpha)$ بسته است.

۸. **در مجموعهٔ عددهای طبیعی با متریک معمولی (القا شده از $\mathbb{R}$) مجموعهٔ تک عضوی $\{n\}$ مجموعه‌ای است ...** « آمار ۷۶ »

۱) هم باز هم بسته ۲) فقط باز ۳) فقط بسته ۴) نه باز نه بسته

۹. **کدام گزاره نادرست است؟ هر دنبالهٔ** « ریاضی ۷۷ »

۱) همگرا دنباله‌ای کوشی است. ۲) کوشی با برد متناهی، همگراست.

۳) کوشی، کراندار است. ۴) کوشی، دنباله‌ای همگراست.

۱۰. **اگر X فضایی متریک، $A \subseteq X$ فشرده و $B \subseteq X$ باز باشد، آنگاه $\cdots$ فشرده است.** « ریاضی ۷۸ »

۱) $B \setminus A$ ۲) $A \setminus B$ ۳) $A \bigcup B$ ۴) $A \bigcap B$

۱۱. **اگر (I_n) دنباله‌ای نزولی از بازه‌های ناتهی در $\mathbb{R}$ باشد، تحت کدام شرط، زیرمجموعهٔ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ناتهی است؟** « ریاضی ۷۸ »

۱) I_nها بسته باشند. ۲) I_nها بسته و کراندار باشند.

۳) I_nها کراندار باشند. ۴) I_nها همبند باشند.

۱۲. **اگر $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n^2} : m, n \in \mathbb{N}\}$، در این صورت بست A عبارت است از** « ریاضی ۷۸ »

۱) $A \bigcup \{1/m : m \in \mathbb{N}\}$ ۲) $A \bigcup \{1/n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

۳) $A \bigcup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\}$ ۴) $A \bigcup \{1/n^2 : n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\}$

۱۳. **اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ باشد، شرط کافی برای اینکه $\sup A \in A$ کدام است؟** « ریاضی ۷۹ »

۱) A باز باشد. ۲) A بسته باشد. ۳) A کراندار باشد. ۴) A بیکران باشد.

۱۴. (X,d) **فضایی متریک و** $(x_n)\subseteq X$ **طوری است که به ازای هر** $m\neq n$، $d(x_n,x_m)=\alpha$ (α **عددی مثبت و ثابت است). کدام گزینه درست است؟** « ریاضی ۷۹ »

۱) X فشرده نیست. ۲) X فشرده است. ۳) X کامل نیست. ۴) X کامل است.

۱۵. **اگر** $\mathbb{R}^۲$ **با متریک معمولی در نظر گرفته شود، مجموعهٔ** $A=\{(x,y) : x^۲-y^۲\geq ۱\}$ **مجموعه‌ای است ...** « ریاضی ۷۹ »

۱) فشرده و همبند. ۲) نه فشرده نه همبند.

۳) فشرده و ناهمبند. ۴) همبند و نافشرده.

۱۶. **متریک گسسته بر** $\mathbb{R}$ **را در نظر می‌گیریم. شرط لازم و کافی برای اینکه دنبالهٔ** (α_n) **در این فضای متریک همگرا باشد آن است که** « ریاضی ۷۹ »

۱) جمله‌های دنباله از شماره‌ای به بعد ثابت باشند.

۲) دنباله از شماره‌ای به بعد اکیداً نزولی باشد.

۳) دنباله از شماره‌ای به بعد اکیداً صعودی باشد.

۴) دنباله کراندار باشد.

۱۷. **اگر** (x_n) **دنباله‌ای کراندار در** $\mathbb{R}$ **باشد، کدام گزینه همواره درست است؟** « آمار ۷۹ »

۱) (x_n) دنباله‌ای همگراست. ۲) (x_n) دنباله‌ای کوشی است.

۳) (x_n) دست‌کم یک زیردنبالهٔ همگرا دارد. ۴) (x_n) فقط دو زیردنبالهٔ همگرا دارد.

۱۸. **در** $\mathbb{R}$ **با متریک گسسته، دنبالهٔ** $\{۱/n\}$ « آمار ۷۹ »

۱) کوشی و واگراست. ۲) کوشی و همگراست.

۳) کوشی نیست و واگراست. ۴) کوشی نیست و همگراست.

۱۹. **اگر** $A=\{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n} : m,n\in\mathbb{N}\}$**، آنگاه** $\mathring{A}$ **کدام است؟** « ریاضی ۸۰ »

۱) ϕ ۲) $\{۱/n : n\in\mathbb{N}\}$ ۳) $\mathbb{Q}$ ۴) $\{۱/n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{۰\}$

۲۰. **مجموعهٔ** $A=\{(\frac{۱}{۲^n}+\frac{۱}{۲^m},\frac{۲^m}{۲^n+۲^m}) : m,n\in\mathbb{N}\}$ **را در** $\mathbb{R}^۲$ **در نظر می‌گیریم. در این صورت** « ریاضی ۸۰ »

۱) $(۰,۰)$ یک نقطهٔ درونی A است. ۲) مجموعهٔ A باز است.

۳) مجموعهٔ A بسته است. ۴) $(۰,۰)$ یک نقطهٔ انباشتگی این مجموعه است.

۲۱. کدام گزینه نادرست است؟ « ریاضی ۸۰ »

۱) اجتماع هر دو مجموعهٔ همبند با اشتراک ناتهی، مجموعه‌ای است همبند.

۲) اشتراک هر دو مجموعهٔ همبند $\mathbb{R}^n$ به ازای $n \geq ۲$، مجموعه‌ای است همبند.

۳) تنها زیرمجموعه‌های همبند ناتهی فضای اعداد گویا، تک عضوی هستند.

۴) تنها زیرمجموعه‌های همبند ناتهی فضای متریک گسسته، تک عضوی هستند.

۲۲. در فضای متریک (X,d) اگر $A \subseteq X$، کدام عبارت مرز مجموعهٔ A نیست؟ « ریاضی ۸۰ »

۱) $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ ۲) $\overline{A} \bigcap \overline{(X \setminus A)}$

۳) $\overline{A} \bigcap (X \setminus \overline{A})$ ۴) $\overline{(X \setminus A)} \setminus (X \setminus A)^{\circ}$

۲۳. اگر $A = \bigcup\limits_{n=۲}^{\infty} \left[\frac{۱}{n}, \frac{n}{n+۱} \right]$ و $B = \bigcap\limits_{n=۱}^{\infty} \left] -\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n} \right[$، آنگاه ... « آمار ۸۰ »

۱) A مجموعه‌ای باز و B مجموعه‌ای بسته است.

۲) A مجموعه‌ای بسته و B مجموعه‌ای باز است.

۳) A و B هر دو فشرده‌اند.

۴) A فشرده و B بسته است.

۲۴. فرض کنیم X مجموعه‌ای نامتناهی باشد. بر X متریک زیر را تعریف می‌کنیم: « آمار ۸۰ »

$$d(p,q) = \begin{cases} ۱ & p \neq q \\ ۰ & p = q \end{cases}$$

(که در آن $p, q \in X$). کدام گزینه درست است؟ « آمار ۸۰ »

۱) تنها زیرمجموعه‌های باز در X، تهی و X هستند.

۲) هر زیرمجموعهٔ X همبند است.

۳) تنها زیرمجموعه‌های فشردهٔ X مجموعه‌های تک نقطه‌ای هستند.

۴) هر زیرمجموعهٔ X در X بسته است.

۲۵. هر فضای متریک فشرده ... « آمار ۸۰ »

۱) شمارش‌ناپذیر است. ۲) همبند است.

۳) تفکیک‌پذیر است. ۴) حداکثر شمارش‌پذیر است.

۲۶. در مورد دنبالهٔ $a_n = \cos n \cos n^۲$ کدام گزاره درست است؟ « ریاضی ۸۱ »

۱) زیردنبالهٔ همگرا دارد. ۲) هر زیردنبالهٔ آن همگراست.

۳) حد دنباله ∞ است. ۴) هیچ زیردنبالهٔ همگرا ندارد.

۲۷. فرض کنیم $Y = [۰,۱] \bigcup]۲,۴[\subseteq \mathbb{R}$. در این صورت « ریاضی ۸۱ »

۱) $]۲,۴[$ در Y فشرده است. ۲) $[۰,۱]$ در Y هم باز است هم بسته.

۳) $]۲,۴[$ در Y زیرفضایی کامل است. ۴) $[۰,۱]$ در Y چگال است.

۲۸. کدام یک از نقطه‌های زیر یک نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ $A = \{\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} : m,n \in \mathbb{N}\}$ است؟ « ریاضی ۸۱ »

۱) ۲/۳ ۲) ۱ ۳) ۳/۲ ۴) ۲

۲۹. کدام یک از توابع زیر متریکی بر مجموعهٔ اعداد حقیقی نیست؟ « ریاضی ۸۱ »

۱) $d(x,y) = \frac{|x-y|}{۱+|x-y|}$ ۲) $d(x,y) = \frac{|x-y|}{۱+۳|x-y|}$

۳) $d(x,y) = \left|x^۲ - y^۲\right|$ ۴) $d(x,y) = \begin{cases} x-y & x \geq y \\ y-x & x < y \end{cases}$

۳۰. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک و A یک زیرمجموعهٔ X باشد. در این صورت کدام گزینه همواره درست است؟ « ریاضی ۸۱ »

۱) اگر A همبند و نامتناهی باشد، $\overline{A}$ بی‌نقص است.

۲) اگر A بی‌نقص و کراندار باشد، A فشرده است.

۳) اگر A بی‌نقص باشد، A شمارش‌ناپذیر است.

۴) اگر A بی‌نقص باشد، A همبند است.

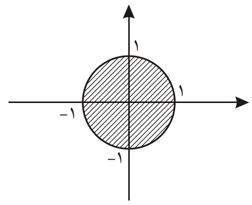
۳۱. مجموعهٔ $B = \{۱, -۱, \frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, -\frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}, -\frac{۵}{۴}, \ldots\}$ در $\mathbb{R}$ (با متریک اقلیدسی) مجموعه‌ای است « آمار ۸۱ »

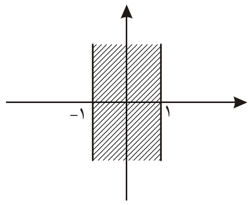
۱) باز ۲) بسته ۳) نه بسته نه باز ۴) هم بسته هم باز

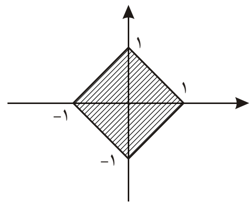
۳۲. فرض کنیم X فضایی متریک و $A \subseteq X$ همبند باشد و $B \subseteq \overline{A}$. کدام یک از مجموعه‌های زیر همواره همبند است؟ « آمار ۸۱ »

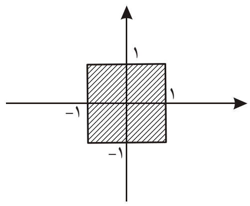
۱) $\mathring{A}$ ۲) $\mathring{B}$ ۳) $A \bigcup B$ ۴) $\overline{A} \backslash A$

۳۳. در فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d)$ **با متریک** $d(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ **که در آن** $x = (x_1, x_2)$ **و** $y = (y_1, y_2)$**، گوی باز به مرکز** $(0,0)$ **و شعاع ۱ کدام است؟** « آمار ۸۱ »

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۴. فرض کنیم $A = [-2,-1[\cup \{1/n : n\in\mathbb{N}\}$**. در این صورت** … « ریاضی ۸۲ »

۱) A' برابر $[-2,-1]$ و A^* برابر $\{0\}\cup\{-1,-2\}$ است.

۲) A' برابر $\{0\} \cup [-2,-1]$ و A^* برابر $\{1/n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{-1,-2\}$ است.

۳) A' برابر $[-2,-1]$ و A^* برابر $\{-1,-2\}$ است.

۴) A' برابر $\{0\} \cup [-2,-1]$ و A^* برابر $\{0\}\cup\{1/n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{-2,-1\}$ است.

۳۵. کدام گزاره درست است؟ « ریاضی ۸۲ »

۱) هر فضای متریک همبند، یا شمارش‌ناپذیر است یا تک عضوی.

۲) هر فضای همبند زیرمجموعه‌ای شمارش‌پذیر و چگال دارد.

۳) هر فضای متریک فشرده، شمارش‌پذیر است.

۴) هر فضای متریک همبند، کامل است.

۳۶. فرض کنیم (X,d) **فضایی متریک باشد و** $A\subseteq X$**. در این صورت** A **در** X **باز است هرگاه** …
« ریاضی ۸۲ »

۱) دنباله‌ای در A وجود داشته باشد که به عضوی از $(X\setminus A)$ همگرا باشد.

۲) دنباله‌ای در A وجود داشته باشد که به عضوی از $(X\setminus A)$ همگرا باشد.

۳) هیچ دنباله‌ای در $(X\setminus A)$ به عضوی از A همگرا نباشد.

۴) هر دنباله در $(X\setminus A)$ به عضوی از A همگرا باشد.

۳۷. فرض کنیم (X,d) فضایی متریک، (x_n) و (y_n) دو دنباله در (X,d) و $(d(x_n,y_n))$ دنباله‌ای همگرا به صفر باشد. در این صورت ... « ریاضی ۸۲ »

۱) هر دو دنبالهٔ (x_n) و (y_n) همگرا هستند.

۲) هر دو دنبالهٔ (x_n) و (y_n) واگرا هستند.

۳) اگر (x_n) همگرا باشد، (y_n) نیز همگراست.

۴) هیچ‌کدام از این گزاره‌ها درست نیست.

۳۸. فرض کنیم (x_n) دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}^k$ باشد. در این صورت ... « ریاضی ۸۲ »

۱) (x_n) در $\mathbb{R}^k$ کوشی است.

۲) (x_n) زیردنباله‌ای همگرا در $\mathbb{R}^k$ دارد.

۳) (x_n) در $\mathbb{R}^k$ نقطهٔ بست ندارد.

۴) (x_n) فشرده است.

۳۹. فرض کنیم X فضایی متریک، $E \subseteq X$ و E' مجموعهٔ نقاط انباشتگی E باشد. کدام گزارهٔ زیر همواره درست است؟ « ریاضی ۸۲ »

۱) E' بسته و کراندار است.

۲) $E' \subseteq (E')'$

۳) $(E')' = E'$

۴) $(E')' \subseteq E'$

۴۰. فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره باشد به‌طوری‌که $\mathbb{R} \setminus A$ همبند است. در این صورت ... « ریاضی ۸۲ »

۱) A فشرده است.

۲) A بیکران است.

۳) درون A تهی است.

۴) A حداکثر شمارش‌پذیر است.

۴۱. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ « ریاضی ۸۲ »

۱) هر مجموعهٔ نامتناهی از عددهای حقیقی، باز است.

۲) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ مجموعه‌ای باز است.

۳) مجموعهٔ ناتهی بازی مانند A از عددهای حقیقی وجود دارد که نمی‌توان آن را به صورت اجتماعی از بازه‌های باز نوشت.

۴) برای هر دو زیرمجموعهٔ A و B در $\mathbb{R}$ داریم $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (A \cup B)^\circ$.

۴۲. فرض کنیم X فضایی متریک و $\{A_i : i \in I\}$ خانوادهٔ دلخواهی از زیرمجموعه‌های X باشد. کدام گزاره همواره درست است؟ « ریاضی ۸۲ »

۱) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

۲) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

۳) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$

۴) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

۴۳. اگر $\operatorname{int} A$ و ∂A به ترتیب درون و مرز مجموعهٔ A را نشان دهند، آنگاه $\operatorname{int}(\partial\mathbb{Q})$ برابر کدام مجموعه است؟ « آمار ۸۲ »

۱) تهی ۲) اعداد حقیقی ۳) اعداد گویا ۴) اعداد گنگ

۴۴. کدام مجموعه در $\mathbb{R}^{۲}$ فشرده است؟ « آمار ۸۲ »

۱) $\{(۱/n, ۱/m) : n, m \in \mathbb{N}\}$

۲) $\{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}, n^{۲} + m^{۲} < ۱۰۰\}$

۳) $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x^{۲} + y^{۲} < ۱۰۰۰\}$

۴) $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, xy \leq ۱۰۰۰\}$

۴۵. اگر A و $S \setminus A$ یک جداسازی برای فضای ناهمبند S باشد، کدام گزینه نادرست است؟ « ریاضی ۸۳ »

۱) $\overline{S \setminus A} = S \setminus \overline{A}$
۲) $\overline{A} \bigcap \overline{S \setminus A} = \phi$

۳) $\overline{S \setminus A} \neq S \setminus \overline{A}$
۴) $\overline{A} \bigcap (S \setminus A) = \phi$

۴۶. اگر (X, d) فضایی متریک باشد و $(A_i)_{i=۱}^{\infty} \subseteq (X, d)$، کدام گزینه همواره درست نیست؟ « ریاضی ۸۳ »

۱) $\bigcap_{i=۱}^{\infty} \mathring{A}_i \subseteq (\bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i)^{\circ}$
۲) به ازای هر عدد طبیعی n، $\mathring{A}_n \subseteq A_n$

۳) $\bigcup_{i=۱}^{\infty} \mathring{A}_i \subseteq (\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i)^{\circ}$
۴) $(\bigcap_{i=۱}^{n} A_i)^{\circ} = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathring{A}_i$، $(n \in \mathbb{N})$

۴۷. کدام گزارهٔ زیر برای فضاهای متریک گسسته نادرست است؟ « ریاضی ۸۳ »

۱) هر مجموعهٔ بسته و ناتهی نقطهٔ انباشتگی دارد.
۲) تنها مجموعه‌های فشردهٔ فضا مجموعه‌های متناهی هستند.
۳) هر مجموعهٔ تک عضوی، گویی باز است.
۴) هر زیرمجموعهٔ فضا بسته است.

۴۸. فضای متریک $(\mathbb{N}, d)$ را که در آن $d(m,n) = \left|\frac{۱}{m} - \frac{۱}{n}\right|$، در نظر می‌گیریم. گوی باز به مرکز ۱ و شعاع $۱/۲$ برابر است با « آمار ۸۳ »

۱) $]۲/۳, ۴/۳[$ ۲) $]۳/۲, ۲[$ ۳) $\{۱, ۲\}$ ۴) $\{۱\}$

۴۹. اگر A و B دو زیرمجموعهٔ همبند $\mathbb{R}^k$ باشند، کدام مجموعه لزوماً همبند است؟ « آمار ۸۳ »

۱) $\mathring{A}$ ۲) $\overline{A}$ ۳) $A\bigcup B$ ۴) $A\bigcap B$

۵۰. کدام مجموعه با متریک اقلیدسی فشرده است؟ « آمار ۸۳ »

۱) $]۰,۱[$ ۲) $]۰,\infty[$ ۳) $]۱,۲[\bigcup]۳,۴[$ ۴) $\bigcup\limits_{۱}^{n}[-k,k]$

۵۱. فرض کنیم $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲:(x,y)=(\frac{۱}{n},۱-\frac{۱}{n}),n\in\mathbb{N}\}$. کدام گزاره نادرست است؟ « آمار ۸۳ »

۱) E باز نیست. ۲) E دارای نقطهٔ انباشتگی در E است.
۳) E بسته نیست. ۴) E دارای نقطهٔ درونی نیست.

۵۲. اگر $A\subseteq\mathbb{R}^n$ همبند و بیش از دو عنصر داشته باشد، آنگاه A « ریاضی ۸۴ »

۱) شمارش‌ناپذیر است. ۲) شامل همهٔ نقاط انباشتگی خود است.
۳) شامل همهٔ نقاط مرزی خود است. ۴) شامل یک بازهٔ n- بعدی است.

۵۳. اگر $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ و A مجموعه‌ای باز باشد، کدام گزاره نادرست است؟ (∂A مرز A را نشان می‌دهد) « ریاضی ۸۴ »

۱) $(\partial A)^\circ\neq\phi$ ۲) $A\bigcap\overline{B}\subseteq\overline{A\bigcap B}$
۳) $A\bigcap\mathring{B}=(A\bigcap B)^\circ$ ۴) $A\bigcup\mathring{B}\subseteq(A\bigcup B)^\circ$

۵۴. کدام گزینه در مورد مجموعهٔ $\mathbb{R}^۲\setminus\{(x,y)\}$ درست است؟ « ریاضی ۸۴ »

۱) فشرده است. ۲) بسته است.
۳) همبند است. ۴) شامل همهٔ نقاط مرزی خود است.

۵۵. فرض کنیم X فضایی متریک و A یک زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی آن باشد. در این صورت ... « ریاضی ۸۴ »

۱) اگر مرز A برابر باشد با A، آنگاه متمم A بسته است.
۲) اگر مرز A برابر باشد با A، آنگاه A در X چگال نیست.
۳) اگر مرز A برابر نباشد با A، آنگاه A در X چگال است.
۴) اگر مرز A برابر نباشد با A، آنگاه متمم A در X باز است.

۵۶. کدام گزینه در مورد بازهٔ $]1,2[$ به عنوان یک زیرمجموعهٔ فضای $\mathbb{R}^2$ درست است؟
« آمار ۸۴ »

۱) فشرده است. ۲) بسته است. ۳) باز است. ۴) هیچ جا چگال است.

۵۷. اگر $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ عددهای گویا با متریک اقلیدسی باشد و $E=\{x\in\mathbb{Q}:2<x^2<3\}$، آنگاه E در $\mathbb{Q}$
« آمار ۸۴ »

۱) بسته، کراندار و فشرده است. ۲) باز، بسته و کراندار است.

۳) باز است ولی بسته نیست. ۴) بسته است ولی باز نیست.

۵۸. فرض کنیم K مجموعه‌ای فشرده در فضای متریک (X,d) و A مجموعهٔ نقطه‌های تنهای K باشد. در این صورت
« ریاضی ۸۵ »

۱) A متناهی است.

۲) تنها اگر (X,d) یک فضای متریک گسسته باشد، A متناهی است.

۳) A همواره نامتناهی است.

۴) A ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

۵۹. فرض کنیم فضای متریک (X,d)، دنبالهٔ $(x_n)_{n\geq 1}$ در X و عدد $0<C<1$ به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر $n\geq 1$، $d(x_{n+2},x_{n+1})\leq Cd(x_{n+1},x_n)$. در این صورت دنبالهٔ (x_n)
« ریاضی ۸۵ »

۱) در X بیکران است. ۲) در X کوشی است.

۳) در X همگراست. ۴) در X واگراست.

۶۰. کدام گزارهٔ زیر درست است؟
« ریاضی ۸۵ »

۱) هر دنبالهٔ کراندار در فضایی متریک، زیردنباله‌ای همگرا دارد.

۲) هر نقطهٔ یک مجموعهٔ بسته و کراندار در فضایی متریک، نقطه‌ای انباشتگی است.

۳) هر مجموعهٔ بسته و کراندار در فضایی متریک را می‌توان در مجموعه‌ای فشرده جای داد.

۴) هر مجموعهٔ فشرده در فضایی متریک، بسته و کراندار است.

۶۱. فرض کنیم $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ تابعی کراندار و $C\subseteq\mathbb{R}^k$ مجموعه‌ای کراندار باشد و $A=\{x+f(x):x\in C\}$. در این صورت
« ریاضی ۸۵ »

۱) $\overline{A}$ فشرده است. ۲) A فشرده است.

۳) $\overline{A}=A$. ۴) $\overline{A}$ فشرده نیست ولی کراندار است.

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای فصل ۱

۱. **گزینهٔ «۱».**

در حقیقت از نابرابری‌های داده شده نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $\varepsilon > 0$، $0 \leq x - y \leq \varepsilon$. اکنون با توجه به مثال ۲.۰.۱ داریم $x - y = 0$ یا $x = y$.

روش دوم به ازای $\varepsilon \to 0^+$ نابرابری‌های داده شده به صورت $y \leq x \leq y$ درمی‌آیند و از این‌رو، $x = y$.

۲. **گزینهٔ «۲».**

با توجه به $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ می‌بینیم که

$$\lfloor x \rfloor \leq x/2 \Leftrightarrow 2\lfloor x \rfloor \leq x \;\Leftrightarrow\; \lfloor x \rfloor \leq x - \lfloor x \rfloor \;\Leftrightarrow\; \lfloor x \rfloor < 1 \;\Leftrightarrow\; x < 1$$

۳. **گزینهٔ «۴».**

اگر در این گزینه n را برابر با ۸ اختیار کنیم عدد ۵ حاصل می‌شود که عددی گویاست.

● **تذکر. (الف)** اگر k ، n، α و β عددهایی طبیعی و α و β نسبت به هم اول باشند و $n = (\alpha/\beta)^k$، آنگاه $\beta = 1$. در حقیقت

$$n = (\alpha/\beta)^k \;\Rightarrow\; n\beta^k = \alpha^k \;\Rightarrow\; \beta | \alpha \;\Rightarrow\; \beta = 1$$

(ب) چون n و $n+1$ نسبت به هم اول‌اند، $n(n+1)$ مجذور کامل است اگر و تنها اگر هر دو عدد n و $n+1$ مجذور کامل باشند و این هم ممکن نیست، زیرا تفاضل دو مجذور کامل (در $\mathbb{N}$) ۱ نمی‌شود. پس $\sqrt{n(n+1)}$ همواره گنگ است.

(پ) اگر n فرد باشد، آنگاه n و $n+2$ نسبت به هم اول‌اند و استدلالی مانند (ب) نشان می‌دهد که $\sqrt{n(n+2)}$ عددی گنگ است. اگر n زوج باشد و $n = 2k$، آنگاه $\sqrt{n(n+2)} = 2\sqrt{k(k+1)}$ که باز هم گنگ است. پس عدد $\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+2}$ نیز همواره گنگ است.

(ت) اگر $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ برابر با عدد گویای p باشد، آنگاه $n + \sqrt{n} = p^2$. این برابری نشان می‌دهد که p باید عددی طبیعی باشد (چرا ؟). با فرض $n = k^2$ می‌بینیم که $k(k+1) = p^2$ و در (الف) هم دیدیم که این ممکن نیست. پس $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ نیز همواره گنگ است.

۴. گزینهٔ «۳».

می‌بینیم که $\frac{1-5n}{n+1} = -5 + \frac{6}{n+1}$. بنابراین،

$$\sup A = -5+3 = -2 \ , \ \inf A = -5 \ \Rightarrow \ \sup A + \sup(-A) = \sup A - \inf A = 3$$

۵. گزینه‌های «۱» و «۴».

با توجه به مثال ۱۱۴.۱ گزاره‌های (۲) و (۳) درست هستند. با توجه به نابرابری $C.B.S$ می‌دانیم که

$$x \text{ و } y \text{ متناسب‌اند} \ \Leftrightarrow \ \| x \| \cdot \| y \| = | x \cdot y |$$

از سوی دیگر، به آسانی دیده می‌شود که:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \ \Leftrightarrow \ x \cdot y = 0$$

۶. گزینهٔ «۱».

در حقیقت فرض کنیم اتفاقاً $b < a$. اگر عدد دلخواه x به گونه‌ای باشد که $b < x < a$، بنابر فرض باید داشته باشیم $a \leq x$ و این هم تناقض است.

۷. گزینهٔ «۲».

به ازای هر دو عدد حقیقی x و y داریم

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$$

بنابراین،

$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{1}{2}(a + b + \frac{a+b}{ab})^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{ab})^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2}$$

در اینجا از این نکته استفاده کرده‌ایم که $a + b = 1 \ \Rightarrow \ ab \leq 1/4$. همچنین، می‌بینیم که به ازای $a = b = 1/2$ عبارت بالا برابر می‌شود که ۲۵/۲.

۸. گزینهٔ «۲».

اگر قرار دهیم $B = \{a^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}$ و $C = \{b^{1/m} : m \in \mathbb{N}\}$، آنگاه $\sup B = 1$ و $\sup C = b$ (چرا ؟). پس

$$\sup A = \sup B + \sup C = 1 + b$$

۹. گزینهٔ «۳».

با فرض $B = \{2x : 0 < x < 1\}$ و $\mathbb{C} = \{-\sqrt{2}y : -1 < y < 2\}$، می‌بینیم که $\sup B = 2$ و $\sup C = \sqrt{2}$. پس

$$\sup A = \sup B + \sup C = 2 + \sqrt{2}$$

۱۰. گزینهٔ «۱».

با فرض $z=x+iy$ و با توجه به $a\neq b$ می‌بینیم که

$$|x+(y+a)i|=|x+(y+b)i| \Rightarrow x^{2}+(y+a)^{2}=x^{2}+(y+b)^{2}$$
$$\Rightarrow 2y(a-b)=b^{2}-a^{2} \Rightarrow 2y=-(a+b)$$
$$\Rightarrow z-\overline{z}=2iy=-(a+b)i$$

۱۱. گزینهٔ «۴».

اگر قرار دهیم $M=\max\{|a|,|b|\}$، آنگاه

$$a<x<b \Rightarrow -M\leq -|a|\leq a<x<b\leq |b|\leq M$$
$$\Rightarrow -M<x<M \Rightarrow \left|x\right|<M$$

۱۲. گزینهٔ «۳».

روش یکم اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند می‌دانیم که $2|a||b|\leq a^{2}+b^{2}$. پس $nx\leq \frac{1}{2}(1+n^{2}x^{2})$ یا $\frac{nx}{1+n^{2}x^{2}}\leq\frac{1}{2}$. از سوی دیگر، به ازای $x=1/n$ داریم $\frac{nx}{1+n^{2}x^{2}}=1/2$ و از این‌رو، سوپرموم برابر است با $1/2$.

روش دوم اگر قرار دهیم $f(x)=\frac{nx}{1+n^{2}x^{2}}$، با استفاده از مشتق می‌بینیم که f در $1/n$ به ماکسیموم خود که برابر است با $1/2$ می‌رسد.

۱۳. گزینهٔ «۱».

می‌دانیم که $0\leq kx-\lfloor kx\rfloor<1$ و از این‌رو، $0\leq f(x)<1/k$.

۱۴. گزینهٔ «۲».

داریم $f(x)+g(x)=1$. پس $\sup(f+g)=1$. از سوی دیگر، $\sup f=\sup g=1$.

۱۵. گزینهٔ «۱».

آشکارا داریم $A=\{0\}$.

۱۶. گزینهٔ «۳».

نخست می‌بینیم که

$$\varphi(x_{1},n_{1})=\varphi(x_{2},n_{2}) \Rightarrow x_{1}+n_{1}=x_{2}+n_{2} \Rightarrow |x_{1}-x_{2}|=|n_{1}-n_{2}|$$

چون $0\leq|x_{1}-x_{2}|<1$، برابری اخیر هنگامی امکان‌پذیر است که $n_{1}=n_{2}$. در نتیجه،

$x_۱ = x_۲$ و از این‌رو $(x_۱, n_۱) = (x_۲, n_۲)$. این نشان می‌دهد که φ یک‌به‌یک است. از سوی دیگر، به ازای هر $y \in [۱,\infty[$ داریم $y = \lfloor y \rfloor + (y)$ که در آن $\lfloor y \rfloor \geq ۱$ و $۰ \leq (y) < ۱$. با انتخاب $\lfloor y \rfloor = n$ و $(y) = x$ داریم $\varphi(x,n) = y$. پس φ پوشاست.

۱۷. گزینهٔ «۱».

با فرض $z = x + iy$ و محاسبهٔ قدرمطلق دو طرف رابطهٔ مفروض، می‌بینیم که $x = \pm ۱/۲$. اگر $x = ۱/۲$، آنگاه $\overline{z} = z$ و از این‌رو، z حقیقی است که موردنظر نیست. اگر $x = -۱/۲$، آنگاه $\overline{z} = -z$ و از این‌رو، z موهومی محض می‌شود که با $x = -۱/۲$ در تناقض است.

۱۸. گزینهٔ «۳».

چون در اینجا $|f|$ تابعی زوج است کافی است خود را به بازهٔ $[۰,۱]$ محدود کنیم. اکنون تست ۱۲ را می‌یابیم.

۱۹. گزینهٔ «۳».

به آسانی دیده می‌شود که $E =]۰,۲[$.

۲۰. گزینهٔ «۲».

درحقیقت اگر قرار می‌دهیم $x = n\pi + \frac{\pi}{۲}$ که در آن $n \in \mathbb{Z}$، آنگاه $x\sin x = (-۱)^n(n\pi + \frac{\pi}{۲})$. این نشان می‌دهد که مجموعهٔ گزینهٔ (۲) نه از بالا کراندار است نه از پایین.

۲۱. گزینهٔ «۱».

در حقیقت،

$$\sup a_n = \sup_{k\geq ۱}(-۱)^{۲k}\left(۱ + \frac{۱}{۲k}\right) = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \ ,$$

$$\inf a_n = \inf_{k\geq ۱}(-۱)^{۲k-۱}\left(۱ + \frac{۱}{۲k-۱}\right) = -\sup_{k\geq ۱}\left(۱ + \frac{۱}{۲k-۱}\right) = -۲$$

۲۲. گزینهٔ «۱».

بنابر قضیهٔ گلفاند – اشنایدر (تذکر ۷۸.۱ را ببینید) عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ عددی متعالی و از این‌رو، گنگ است. از این گذشته، داریم

$$(۲^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۲^۲ = ۴$$

۲۳. گزینهٔ «۴».

مسألهٔ حل شدهٔ ۷ در پایان فصل را ببینید.

۲۴. گزینهٔ «۴».

قـرار مـی‌دهـیم $B=\{\frac{(-1)^n}{n\sqrt{2}} : n\in\mathbb{N}\}$ و $C=\{\frac{(-1)^m}{(2m-1)\sqrt{3}} : m\in\mathbb{N}\}$. در ایـن صورت $A=B-C$. از سوی دیگر،

$$\sup B=\sup\{\frac{1}{2n\sqrt{2}} : n\in\mathbb{N}\}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\inf C=\inf\{\frac{-1}{(4m-3)\sqrt{3}} : m\in\mathbb{N}\}$$

$$=-\sup\{\frac{1}{(4m-3)\sqrt{3}} : m\in\mathbb{N}\}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\sup A=\sup B+\sup(-C)=\sup B-\inf C=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۲۵. گزینهٔ «۱».

در حقیقت، روشن است که با فرض $x_n=\sqrt[n]{n}$ داریم $x_1<x_2<x_3$. از سـوی دیگـر، بـا توجه به ۱۶.۳ (الف)،

$$n\geq 3\ \Rightarrow\ (1+\frac{1}{n})^n<3\leq n$$

$$\Rightarrow (n+1)^n<n^{n+1}\Rightarrow \sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}\ \Rightarrow\ x_3>x_4>\ldots$$

۲۶. گزینهٔ «۲».

اگر عضو عمومی A را u_n بنامیم، آنگاه با تشخیص حالت‌هـای « زوج » و « فـرد » بـرای n می‌بینیم که u_n به یکی از صورت‌های

$$\frac{3}{4k}\ ,\ -4-\frac{3}{4k-2}\ ,\ 4+\frac{3}{4k-1}\ ,\ -\frac{3}{4k-3}$$

(که در آنها $k\in\mathbb{N}$) است. بنابراین،

$$\sup A=\sup(4+\frac{3}{4k-1})=5\quad ,\quad \inf A=\inf(-4-\frac{3}{4k-2})=-\frac{11}{2}$$

۲۷. گزینهٔ «۲».

قرار می‌دهیم $\alpha=\sup A=\inf B$. روشن است که در این صورت

$$a\in A,B\in B\ \Rightarrow\ a\leq\alpha\ ,\ \alpha\leq b\ \Rightarrow\ a\leq b$$

از سوی دیگر، با توجه به ویژگی‌های $\sup$ و $\inf$، اگر $\varepsilon>0$، آنگاه

$$\exists a\in A\ ,\ b\in B : \alpha-\varepsilon/2\leq a\ ,\ b\leq\alpha+\varepsilon/2\ \Rightarrow\ b-a\leq\varepsilon$$

۲۸. گزینهٔ «۱».

اگر در صفحهٔ مختلط دایرهٔ یکه را رسم کنیم، آنگاه رأس یکم و دوم این هشت ضلعی عبارت‌اند از $(۱,۰)$ و $(\sqrt{۲}/۲,\sqrt{۲}/۲)$. اکنون مساحت مثلثی که رأس‌های آن عبارت‌اند از این دو نقطه و مبدأ، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

(فرمول آشنا در هندسهٔ تحلیلی مقدماتی). مساحت خواسته شده هشت برابر، یعنی $۲\sqrt{۲}$ است.

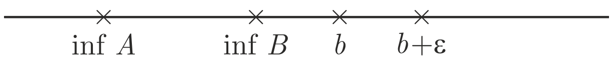
۲۹. گزینهٔ «۲».

اگر $\|\cdot\|$ نرمی بر $\mathbb{R}^۲$ (یعنی تابعی معین بر $\mathbb{R}^۲$ با ویژگی‌های (پ)، (ت) و (ث) در قضیهٔ ۱.۱۱۱) باشد، آنگاه گوی یکهٔ بسته، مجموعه‌ای محدب خواهد بود. اکنون اگر نقطه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ متعلق به این گوی را در نظر بگیریم می‌بینیم که نقطهٔ $(۱/۲,۱/۲)$ متعلق به پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه هست ولی به گوی تعلق ندارد زیرا

$$\|(۱/۲,۱/۲)\| = (۱/\sqrt{۲}+۱/\sqrt{۲})^۲ = ۲ > ۱$$

۳۰. گزینهٔ «۴».

گزارهٔ داده شده را p و گزارهٔ دیگر را q می‌نامیم. در این صورت نمودار



نشان می‌دهد که $p \Rightarrow q$. برعکس، ثابت می‌کنیم که $q \Rightarrow p$. فرض کنیم $b \in B$ و $\varepsilon > ۰$. بنابر فرض،

$$\exists\, a \in A : a < b + \varepsilon$$

پس $\inf A < b + \varepsilon$. چون عدد $\varepsilon > ۰$ دلخواه است،داریم $\inf A \leq b$. چون عنصر $b \in B$ دلخواه است. نتیجه می‌گیریم که $\inf A \leq \inf B$.

● **تذکر.** (یک) در گزینهٔ (۱) آشکار داریم $q \Rightarrow p$. مجموعه‌های $A =]۰,۱[$ و $B = [۰,۱]$ نشان می‌دهند که $p \not\Rightarrow q$.

(دو) همان استدلال بالا برای گزینهٔ (۲) نیز برقرار است.

(سه) در گزینهٔ (۳) آشکارا داریم $p \Rightarrow q$. مجموعه‌های $A = \{۱\}$ و $B = \{۰,۱\}$ نشان می‌دهند که $q \not\Rightarrow p$.

۳۱. گزینهٔ «۲».

در حقیقت، با فرض $a \in A$ و $b \in B$ می‌بینیم که

$$\inf_x f(x,b) \le f(a,b) \le \sup_y f(a,y) \Rightarrow \sup_b \inf_x f(x,b) \le \sup_y f(a,y)$$
$$\Rightarrow \sup_b \inf_x f(x,b) \le \inf_a \sup_y f(a,y)$$

و این همان نابرابری گزینهٔ (۲) است.

۳۲. گزینهٔ «۴».

در حقیقت، اگر قرار دهیم

$$B = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{۴}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \ , \ C = \left\{\frac{۱}{m+۱} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

آنگاه $A = B - C$ و از این رو، با توجه به قضیهٔ ۳۱.۱ داریم

$$\sup A = \sup B - \inf C \quad , \quad \inf A = \inf B - \sup C$$

از سوی دیگر، یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$\inf B = -۱ \ , \ \sup B = ۱ \ , \ \inf C = ۰ \ , \ \sup C = \frac{۱}{۲}$$

پس $\sup A = ۱$ و $\inf A = -\frac{۳}{۲}$.

۳۳. گزینهٔ «۴».

در حقیقت، داریم $\sup B = \inf A$. از سوی دیگر،

$$۰ < a < ۱ \quad , \quad a + (۱ - a) = ۱ \Rightarrow a(۱-a) \le \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{a(۱-a)} \ge ۴$$

بنابراین، $\inf A = ۴$.

۳۴. گزینهٔ «۱».

قضیهٔ ۳۱.۱ (الف) را ببینید.

۳۵. گزینهٔ «۲».

در حقیقیت، اگر قرار دهیم

$$B = \left\{\frac{۱}{n^۲} : n \in \mathbb{N}\right\} \ , \ C = \left\{\frac{۱}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} \ , \ D = CU(-C)$$

آنگاه آشکارا داریم $A = B + D$. از سوی دیگر،

$$\inf D = \inf(\inf C, -\sup C) = \inf(۰, -۱) = -۱ \ ,$$
$$\sup D = \sup(\sup C, -\inf C) = \sup(۱, -۰) = ۱$$

بنابراین،

$$\inf A = \inf B + \inf D = ۰ - ۱ = -۱$$

- به طور مشابهی می‌بینیم که

$$\sup A = \sup B + \sup D = ۱ + ۱ = ۲$$

یک استدلال ساده نشان می‌دهد که $۲ \notin A$ (چرا ؟) .

۳۶. **گزینهٔ «۲».**

نخست می‌بینیم که عدد ۲ / ۷ یک کران پایین A است زیرا

$$\frac{۳m + ۲n}{۵m + ۷n} \geq \frac{۲}{۷} \ \Leftrightarrow \ ۲۱m + ۱۴n \geq ۱۰m + ۱۴n \ \Leftrightarrow \ m \geq ۰$$

از سوی دیگر، اگر m را «لحظه‌ای» ثابت نگه داریم، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۳m + ۲n}{۵m + ۷n} = \frac{۲}{۷}$$

پس $\inf A = ۲ / ۷$

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ۲

۱. **گزینهٔ «۳».**

اگر در صفحهٔ Oxy خط $x+y=0$ را رسم کنیم، متمم آن آشکارا مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^2$ است. این مجموعه در $\mathbb{R}^3$ باز نیست، زیرا هیچ گوی باز $\mathbb{R}^3$ را نمی‌توان در آن «جای داد ».

۲. **گزینهٔ «۳».**

اگر E باز باشد، آنگاه $\mathring{E}=E$.

۳. **گزینهٔ «۴».**

اگر قرار دهیم $U=\mathring{B}$، آنگاه U مجموعه‌ای باز است و با توجه به مثال ۲۳.۲ داریم

$$\overline{A}\cap\mathring{B}=\overline{A}\cap U\subseteq\overline{A\cap U}\subseteq\overline{A\cap B}$$

۴. **گزینهٔ «۲».**

با توجه به قضیهٔ ۱۰۴.۲ گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) هم‌ارزند. البته در فضاهای $\mathbb{R}^k$ یا $\mathbb{C}^k$، مجموعهٔ A فشرده است اگر و فقط اگر A بسته و کراندار باشد.

۵. **گزینهٔ «۲».**

مجموعهٔ $U=]1/2,3/2[$ در $\mathbb{R}$ باز است. پس مجموعهٔ $U\cap Y=\{1\}$ نیز در Y باز است (قضیهٔ ۴۷.۲ را ببینید).

۶. **گزینهٔ «۲».**

در حقیقت با توجه به جمله‌های این دنباله، یعنی

$$\cos 1,\cos 2,\cos 3,\ldots,\cos 90,\ldots,\cos 179,\cos 180,\cos 181,\ldots,\cos 360,\ldots$$

می‌بینیم که عددهای متمایز $\cos 1$، ...، $\cos 180$ و $\cos 360=1$ متناوباً تکرار می‌شوند. پس مجموعهٔ حدهای زیردنباله‌های دنبالهٔ مفروض، ۱۸۱ عضو دارد.

۷. **گزینهٔ «۱».**

با توجه به $F_\alpha\setminus G_\alpha=F_\alpha\cap G_\alpha^c$، $F_\alpha\setminus G_\alpha$ مجموعه‌ای بسته است و از این‌رو، $\bigcap_\alpha(F_\alpha\setminus G_\alpha)$ نیز بسته است.

۸. **گزینهٔ «۱».**

از یک سو در فضاهای متریک، هر مجموعهٔ تک عضوی مجموعه‌ای بسته است و از سوی دیگر داریم $\{n\}=\mathbb{N}\cap]n-1/2,n+1/2[$. پس $\{n\}$ در $\mathbb{N}$ باز است.

۹. **گزینهٔ «۴».**

برای مثال، در فضای متریک $E=]0,1]$ (مجهز به متریک معمولی) دنبالهٔ $(1/n)$ کوشی است ولی همگرا نیست.

۱۰. **گزینهٔ «۲».**

در حقیقت $A\setminus B$ بسته است (زیرا $A\setminus B = A\cap B^c$) و $A\setminus B\subseteq A$.

۱۱. **گزینهٔ «۲».**

فرع ۵۹.۲ یا قضیهٔ ۶۰.۲ را ببینید.

۱۲. **گزینهٔ «۳».**

می‌دانیم که $\overline{A}=A\cup A'$. برای یافتن نقاط انباشتگی، به‌طور شهودی باید نقاطی را در فضا بیابیم که نقاط A دور آنها « انباشته می‌شوند ». به این ترتیب

$$A'=\{1/m : m\in\mathbb{N}\}\cup\{1/n^2 : n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}=\{1/m : m\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$$

۱۳. **گزینهٔ «۲».**

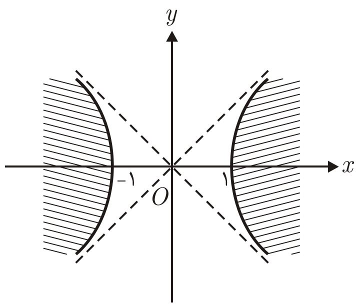
با توجه به ویژگی‌های $\sup$ همواره داریم $\sup A\in\overline{A}$.

۱۴. **گزینهٔ «۱».**

دنبالهٔ (x_n) نمی‌تواند زیردنبالهٔ همگرا داشته باشد (زیرا هیچ‌یک از زیردنباله‌های آن کوشی نیست). پس X فشرده نیست.

۱۵. **گزینهٔ «۲».**

مجموعهٔ A ناحیهٔ هاشورخورده در شکل زیر است. A آشکارا بسته است ولی کراندار نیست.



۱۶. **گزینهٔ «۱».**

مثال ۶.۲ (پنج) را ببینید.

۱۷. **گزینهٔ «۳».**

قضیهٔ ۱۰۶.۲ را ببینید.

۱۸. گزینهٔ «۳».

در فضای متریک گسسته، دنبالهٔ (x_n) کوشی است اگر و تنها اگر از اندیسی به بعد همهٔ جمله‌ها برابر باشند (مثال ۱۱۳.۲ (دو) را ببینید). بنابراین، دنبالهٔ $(1/n)$ در فضای گسستهٔ $\mathbb{R}$ کوشی نیست و از این‌رو، واگراست.

۱۹. گزینه «۱».

A یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر $\mathbb{R}$ است و از این‌رو، $\mathring{A} = \phi$ (مثال ۳۰.۲ (دو) را ببینید).

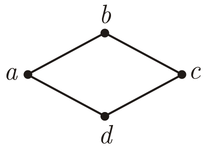
۲۰. گزینهٔ «۴».

به‌طور شهودی، نقطهٔ انباشتگی نقطه‌ای از فضاست که نقاط بیشماری از مجموعه دور آن «انباشته می‌شوند». با فرض $n = 2m$ و $m \to \infty$، می‌بینیم که

$$\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}, \frac{2^m}{2^n + 2^m}\right) \to (0,0) \ \Rightarrow\ (0,0) \in A'$$

۲۱. گزینهٔ «۲».

شکل زیر را در $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید:



A عبارت است از اجتماع دو پاره‌خط ab و ad و B عبارت است از اجتماع دو پاره‌خط cb و cd. روشن است که مجموعهٔ $A \cap B = \{b, d\}$ ناهمبند است.

۲۲. گزینهٔ «۳».

گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) صورت‌های مختلف برای بیان مرز A هستند (درس مربوط را ببینید).

۲۳. گزینهٔ «۱».

به آسانی دیده می‌شود که $A =]0,1[$ و $B = \{0\}$.

۲۴. گزینهٔ «۴».

در حقیقت X یک فضای متریک گسسته است.

۲۵. گزینهٔ «۳».

قضیهٔ ۶ (ب) در پیوست را ببینید.

۲۶. گزینهٔ «۱».

این یک دنبالهٔ حقیقی کراندار است و از این‌رو، با توجه به قضیهٔ ۱۰۶.۲ زیردنبالهٔ همگرا دارد.

۲۷. گزینهٔ «۲».

$[۰,۱]$ در $\mathbb{R}$ بسته است پس در Y نیز بسته است. از سوی دیگر داریم $]-۱/۲,۳/۲[\cap Y=[۰,۱]$ و از این‌رو، $[۰,۱]$ در Y باز است.

۲۸. گزینهٔ «۲».

با توجه به مفهوم شهودی نقطهٔ انباشتگی، یک استدلال ساده نشان می‌دهد که $A'=\{۱/n : n\in\mathbb{N}\}\{۰\}$.

۲۹. گزینهٔ «۳».

زیرا به ازای $x=۱$ و $y=-۱$ داریم $d(x,y)=۰$، در حالی‌که $x\neq y$.

۳۰. گزینهٔ «۱».

چون $\overline{A}$ بسته است، کافی است ثابت کنیم که هر نقطهٔ $\overline{A}$ یک نقطهٔ انباشتگی آن است. اگر $x\in\overline{A}$ نقطهٔ انباشتگی نباشد، آنگاه x در زیرفضای $\overline{A}$ نقطهٔ تنهاست و از این‌رو، $\{x\}$ در زیرفضای $\overline{A}$ همزمان باز و بسته است و این ناقض همبندی $\overline{A}$ است.

۳۱. گزینهٔ «۲».

فرض کنیم

$$C=\{\frac{n+۱}{n}: n\in N, n\geq ۲\}\cup\{۱\}\ ,\ D=\{-\frac{n+۱}{n}: n\in N, n\geq ۲\}\cup\{-۱\}$$

با توجه به مثال ۹۶.۲ (دو)، C و D فشرده و بنابراین، بسته‌اند. در نتیجه، $B=C\cup D$ نیز بسته است.

۳۲. گزینهٔ «۳».

در حقیقت داریم $A\subseteq A\cup B\subseteq\overline{A}$. اکنون کافی است قضیهٔ ۷۶.۲ را به کار ببریم.

۳۳. گزینهٔ «۴».

باید مجموعهٔ همهٔ $(x_۱,x_۲)$هایی را بیابیم که در نابرابری $\max\{|x_۱|,|x_۲|\}<۱$ صدق می‌کنند. روشن است که

$$\begin{aligned}\max\{|x_۱|,|x_۲|\}<۱ &\Leftrightarrow |x_۱|<۱\ ,\ |x_۲|<۱\\ &\Leftrightarrow -۱<x_۱<۱\ ,\ -۱<x_۲<۱\end{aligned}$$

۳۴. گزینهٔ «۴».

کافی است (تنها در ذهن) جای A را برخط حقیقی مشخص کنیم.

۳۵. گزینهٔ «۱».

مسألهٔ حل شدهٔ ۱۸ را ببینید.

● **تذکر.** مثال نقض برای گزینهٔ (۲): گزینهٔ (۲) می‌گوید هر فضای متریک همبند حتماً تفکیک‌پذیر است. این ممکن نیست. برای مثال ثابت می‌شود که اگر X مجموعه‌ای نامتناهی و E مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی کراندارِ معین بر X باشد و به ازای هر $f,g\in E$ قرار دهیم

$$d(f,g)=\sup\{|\,f(x)-g(x)\,|:x\in X\}$$

آنگاه E یک فضای متریک همبند هست ولی تفکیک‌پذیر نیست.

مثال نقض برای گزینهٔ (۳) : $[0,1]$ فشرده است ولی شمارش‌ناپذیر است.

مثال نقض برای گزینهٔ (۴) : $]0,1]$ همبند است ولی کامل نیست، زیرا دنبالهٔ کوشی $(1/n)$ در این فضا همگرا نیست.

۳۶. گزینهٔ «۳».

در حقیقت این گزینه می‌گوید هر دنبالهٔ همگرا در $X\setminus A$ به نقطه‌ای از $X\setminus A$ همگراست. با توجه به قضیهٔ ۹۹.۲، $X\setminus A$ بسته و از این‌رو، A باز است.

۳۷. گزینهٔ «۳».

اگر $x_n\to x$، آنگاه با توجه به $d(y_n,x)\le d(y_n,x_n)+d(x_n,x)$ می‌بینیم که $d(y_n,x)\to 0$ یا $y_n\to x$.

● **تذکر.** مثال نقض برای گزینهٔ (۱) : $x_n=y_n=(-1)^n$.

مثال نقض برای گزینهٔ (۲) : $x_n=y_n=1$.

۳۸. گزینهٔ «۲».

قضیهٔ ۱۰۶.۲ را ببینید.

۳۹. گزینهٔ «۴».

قضیهٔ ۲۵.۲ (ب) را ببینید.

۴۰. گزینهٔ «۲».

در حقیقت اگر A کراندار باشد و برای مثال $A\subseteq[a,b]$، آنگاه $\mathbb{R}\setminus A$ بازه نیست و از این‌رو، نمی‌تواند همبند باشد (و این هم خلاف فرض است).

۴۱. گزینهٔ «۲».

زیرا $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای بسته است (مثال ۱۵.۲ (چهار) را ببینید).

۴۲. گزینهٔ «۱».

در حقیقت به ازای هر $j\in I$ داریم $\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq A_j$ و از این‌رو، $\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}\subseteq\overline{A}_j$. پس

$$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}\subseteq\bigcap_{j\in I}\overline{A}_j.$$

● **تذکر.** مثال نقض برای گزینهٔ (۲) : $\mathbb{Q}=\{x_n : n\geq ۱\}$ و $A_n=\{x_n\}$.

مثال نقض برای گزینهٔ (۳) : به ازای $n\in\mathbb{N}$، $A_n=]۰,۱/n[$.

مثال نقض برای گزینهٔ (۴) : $\mathbb{Q}=\{x_n : n\geq ۱\}$ و $A_n=\{x_n\}$.

۴۳. **گزینهٔ «۲».**

در حقیقت $\operatorname{int}(\partial\mathbb{Q})=\operatorname{int}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

۴۴. **گزینهٔ «۲».**

زیرا این مجموعه‌ای متناهی است.

● **تذکر.** مجموعهٔ گزینهٔ «۱» بسته نیست (ولی کراندار است). مجموعهٔ گزینهٔ «۳» بسته نیست (ولی کراندار است). مجموعهٔ گزینهٔ «۴» بسته است ولی کراندار نیست.

۴۵. **گزینهٔ «۳».**

اگر قرار دهیم $B=A\setminus S$، آنگاه A و B همزمان با ز و بسته‌اند و گزینهٔ (۳) می‌گوید $B\neq B$ و این هم تناقض است.

۴۶. **گزینهٔ «۱».**

برای مثال در $\mathbb{R}$ مجهز به متریک معمولی، به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ مجموعهٔ $A_i=]۰,۱+۱/i[$ را در نظر بگیرید.

۴۷. **گزینهٔ «۱».**

اگر X یک فضای متریک گسسته باشد، به ازای هر $x\in X$ مجموعهٔ $\{x\}$ مجموعه‌ای باز است و از این‌رو، x یک نقطهٔ تنهاست. به سخن دیگر، در فضای متریک گسسته نقطهٔ انباشتگی نداریم.

۴۸. **گزینهٔ «۴».**

در حقیقت می‌بینیم که

$$\begin{aligned} d(m,۱)<۱/۲ &\Leftrightarrow \left|\frac{۱}{m}-۱\right|<۱/۲ \Leftrightarrow ۱/۲<\frac{۱}{m}<۳/۲ \\ &\Leftrightarrow ۲/۳<m<۲ \Leftrightarrow m=۱ \end{aligned}$$

۴۹. **گزینهٔ «۲».**

قضیهٔ ۷۶.۲ را ببینید.

۵۰. **گزینهٔ «۴».**

این مجموعه، اجتماعی متناهی از مجموعه‌های فشرده است.

۵۱. گزینهٔ «۲».

در حقیقت $(\circ,۱)$ تنها نقطهٔ انباشتگی E است که متعلق به E نیست.

۵۲. گزینهٔ «۱».

مسألهٔ حل شدهٔ ۱۸ را ببینید.

۵۳. گزینهٔ «۱».

برای مثال، در $\mathbb{R}$ فرض کنیم $A=]\circ,۱[$. در این صورت $\partial A=\{\circ,۱\}$ و از این‌رو، $(\partial A)^\circ=\phi$.

۵۴. گزینهٔ «۳».

این مجموعه آشکارا کمانی ــ همبند است (تعریف ۴۹.۴ را ببینید) و از این‌رو، مجموعه‌ای همبند است (قضیهٔ ۵۰.۴ را ببینید).

۵۵. گزینهٔ «۲».

در حقیقت از فرض نتیجه می‌شود که A بسته است. بنابراین، اگر $\overline{A}=X$، آنگاه باید $A=X$ و این خلاف فرض مسأله است.

۵۶. گزینهٔ «۴».

فرض کنیم $A=]۱,۲[$. در $\mathbb{R}^۲$ آشکارا داریم $\overline{A}=[۱,۲]$ و از این‌رو، $\mathring{\overline{A}}=\phi$ (زیرا $[۱,۲]$ شامل هیچ گوی باز $\mathbb{R}^۲$ نیست) و این دقیقاً یعنی A در $\mathbb{R}^۲$ هیچ‌جا چگال است (تعریف ۱۵ در پیوست را ببینید).

۵۷. گزینهٔ «۲».

در حقیقت اگر قرار دهیم

$$U=\{x\in\mathbb{R}:۲<x^۲<۳\}\ ,\ F=\{x\in\mathbb{R}:۲\le x^۲\le ۳\}$$

آنگاه U در $\mathbb{R}$ باز و F در $\mathbb{R}$ بسته است. از سوی دیگر، آشکارا داریم

$$E=U\cap\mathbb{Q}\ ,\ E=F\cap\mathbb{Q}$$

این نشان می‌دهد که E در $\mathbb{Q}$ همزمان باز و بسته است. کرانداریِ E بدیهی است.

۵۸. گزینهٔ «۴».

فرض کنیم $X=\mathbb{R}$، $K_۱=[\circ,۱]$، $K_۲=[\circ,۱]\cup\{۲\}$ و $K_۳=\{\circ,۱,۱/۲,\ldots\}$. در این صورت به ترتیب داریم $A_۱=\phi$، $A_۲=\{۲\}$ و $A_۳=\{۱,۱/۲,\ldots\}$.

۵۹. گزینهٔ «۲».

مسألهٔ حل شدهٔ ۲۵ را ببینید.

۶۰. **گزینهٔ «۴».**

قضیهٔ ۵۵.۲ نشان می‌دهد که در فضاهای متریک، هر مجموعهٔ فشرده، بسته است. از سوی دیگر، اگر x نقطه‌ای دلخواه در فضای متریک E و K مجموعه‌ای فشرده در آن باشد، آنگاه

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x;n)$$

(چرا ؟) اکنون با توجه به فشردگی K، به ازای عددی مانند $N \in \mathbb{N}$ داریم $K \subseteq B(x;N)$. این نشان می‌دهد که K کراندار است.

۶۱. **گزینهٔ «۱».**

چون f و C کراندار هستند، عددی مانند $M > 0$ هست به‌طوری‌که به ازای هر $x \in \mathbb{R}^k$ داریم $\| f(x) \| \leq M$ و به ازای هر $x \in C$، $\| x \| \leq M$. پس

$$\| a \| \leq 2M \quad , \quad (a \in A)$$

این نشان می‌دهد که A کراندار است و از این‌رو، $\overline{A}$ نیز کراندار است. بنابراین، $\overline{A}$ فشرده است (فرع ۶۲.۲).

۶۲. **گزینهٔ «۳».**

گزینهٔ (۱) درست است (قضیهٔ ۳۶.۲ (ب) را ببینید). گزینهٔ (۲) درست است. در حقیقت داریم $\overline{A} = \mathbb{R}$ و از این‌رو،

$$\partial A \setminus A = \partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R} \setminus A$$

گزینهٔ (۳) نادرست است. در حقیقت، طرف چپ، مجموعه‌ای بسته است در حالی‌که طرف راست (یعنی $\mathbb{Q}^c$) نه باز است نه بسته. گزینهٔ (۴) درست است، زیرا از $\partial A \cap A = \phi$ و $\mathbb{Q} \subseteq A$ نتیجه می‌شود که هیچ عدد گویایی در ∂A وجود ندارد و از این‌رو، $(\partial A)^\circ = \phi$.

۶۳. **گزینهٔ «۴».**

در فضای متریک گسسته، همهٔ زیرمجموعه‌ها هم بازند هم بسته. تعداد کل زیرمجموعه‌های A برابر است با $16 = 2^4$.

۶۴. **گزینهٔ «۴».**

مجموعهٔ A بسته نیست زیرا a و b دو نقطهٔ انباشتگی A هستند ولی به A تعلق ندارند. مجموعهٔ A باز نیست، زیرا هیچ گوی $\mathbb{R}^2$ را نمی‌توان در آن جای داد.

۶۵. **گزینهٔ «۳».**

در حقیقت داریم $A \cap \overline{A} = A$.