به نام خدا

مقدمه مولف

کتاب حاضر حاصل چندین سال تدریس درس ساختمان‌های گسسته (ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات) در دانشگاه و مؤسسات آموزش عالی است. این کتاب چندین بار ویرایش شده است و سعی شده همه مطالب مورد نیاز دانشجویان در این کتاب فراهم شود. این کتاب مرجع مناسبی برای دانشجویان مهندسی کامپیوتر، مهندسی فناوری اطلاعات و علوم کامپیوتر و ریاضی می‌باشد.

کتاب در ۱۰ فصل تنظیم شده است و در انتهای هر فصل تست‌های کنکورهای رسمی و تست‌های تألیفی با پاسخ تشریحی گردآوری شده‌اند، طبیعی است که دانشجو ابتدا باید مطالب فصل را با دقت مطالعه کند و سپس تست‌ها را پاسخ دهد. به برخی تست‌ها جواب کوتاه داده شده است زیرا در متن کتاب توضیحات کاملی آمده است.

در منابع مختلف برخی قراردادها و تعاریف متفاوت است. مثلاً در برخی اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$ و در بعضی منابع اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۰,۱,۲,...\}$ است. اعداد صحیح مثبت در برخی منابع $\mathbb{Z}^+=\{۰,۱,۲,...\}$ و در بعضی منابع $\mathbb{Z}^+=\{۱,۲,۳,...\}$ است. یا ترکیب روابط در برخی منابع مشابه ترکیب توابع تعریف می‌شود. یعنی

$$(a,b)\in R\,,\,(b,c)\in S\to(a,c)\in SoR$$

و در برخی منابع برعکس تعریف می‌شود یعنی

$$(a,b)\in R\,,\,(b,c)\in S\to(a,c)\in RoS$$

در پایان کتاب تست‌های مهندسی کامپیوتر و IT و علوم کامپیوتر و ریاضی آزمون ورودی سال‌های اخیر با پاسخ تشریحی آمده است. هر چند سعی شده است مطالب بدون نقص باشند ولی وجود برخی اشکالات کوچک طبیعی است که پیشاپیش پوزش می‌طلبم و تقاضا می‌کنم در صورت مشاهده هر نوع اشکال و یا داشتن هر گونه پیشنهاد، اینجانب را مطلع سازید. دوستانی در مراحل مختلف، تایپ، ویرایش و ... بنده را یاری رساندند و زحمات زیادی کشیدند که از همه این عزیزان کمال سپاس را داریم.

هادی یوسفی
@youseficlass
۰۹۱۲۱۷۸۸۵۳۴

فهرست مطالب

فصل ۲ اصول اولیه شمارش

۱- اصل جمع و ضرب

حتماً تاکنون برای شما پیش آمده است که بخواهید تعداد راه‌های انجام یک کار خاص را بدست آورید. مثلاً به چند حالت می‌توان از بین ده دانشجوی یک کلاس سه نفر را برای یک تیم ورزشی انتخاب کرد. یا مثلاً فرض کنید شما تشنه هستید و به یک سوپر مارکت مراجعه می‌کنید که سه نوع نوشابه و چهار نوع آبمیوه و دو نوع دوغ دارد، شما می‌خواهید یک نوشیدنی انتخاب کنید، به چند حالت می‌توانید این عمل را انجام دهید؟ واضح است که تعداد حالات رفع تشنگی شما برابر $۳+۴+۲=۹$ می‌باشد. در واقع برای رسیدن به جواب، ما از اصل جمع استفاده کردیم. یا فرض کنید شما هم تشنه هستید و هم گرسنه و می‌خواهید از بین سه نوع نوشابه و دو نوع ساندویچ، یک نوشابه و یک ساندویچ انتخاب کنید، تعداد حالات این مسئله برابر $۳×۲=۶$ است:

(ساندویچ ۱ و نوشابه ۱) (ساندویچ ۲ و نوشابه ۱) (ساندویچ ۱ و نوشابه ۲) (ساندویچ ۲ و نوشابه ۲) (ساندویچ ۱ و نوشابه ۳) (ساندویچ ۲ و نوشابه ۳)

که از اصل ضرب استفاده کردیم.

اصل جمع (The Rule of sum): اگر تعداد راه‌های انجام عملی برابر m و تعداد راه‌های انجام عمل دیگری برابر n باشد و این دو عمل با هم قابل انجام نباشند، حال اگر بخواهیم یکی از این دو عمل را انجام دهیم $m+n$ حالت وجود دارد.

مثال ۱: یک کتابخانه دارای ۱۰ کتاب متفاوت در زمینه ریاضی گسسته و ۲۰ کتاب متفاوت در زمینه احتمال است، اگر بخواهیم یک کتاب انتخاب کرده بخوانیم طبق اصل جمع $۱۰+۲۰=۳۰$ انتخاب داریم. ■

می‌توان اصل جمع را اینطور بیان کرد که فرض کنید برای انجام کار A مجبور هستیم یکی از کارهای A_1 یا A_2 یا .. A_k را انجام دهیم به طوری که هیچ دو کاری اشتراک نداشته باشند (یعنی نتوان آن دو را با هم انجام داد) اگر کار A_1 به n_1 طریق، کار A_2 به n_2 طریق و ... و کار A_k به n_k طریق قابل انجام باشند آنگاه کار A به $n_1+n_2+...+n_k$ حالت قابل انجام است.

مثال ۲: فرض کنید برای رفتن از شهر x به شهر y، ۳ راه زمینی، ۲ راه هوایی و ۱ راه دریایی وجود دارد، به چند طریق می‌توان از x به y رفت؟

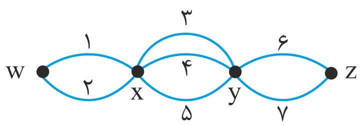
پاسخ: در اینجا هدف یعنی کار A، رفتن از شهر x به y است. کار A_1 رفتن از x به y از طریق زمین است که $n_1=3$ حالت دارد. کار A_2 رفتن از x به y از طریق هوا است که $n_2=2$ حالت دارد و کار A_3 رفتن دریایی از x به y است که $n_3=1$ حالت دارد پس جواب سوال $3+2+1=6$ حالت است.

اصل ضرب (The Rule of Product): اگر عملی m حالت و عمل دیگری به ازای هر بار تکرار عمل اول، n حالت داشته باشد، آنگاه این دو عمل با هم $m\times n$ حالت دارند. یا می‌توان این طور گفت: اگر برای انجام کار A، انجام همهٔ کارهای A_1 و A_2 و ... و A_k به ترتیب و پشت سرهم لازم باشد به طوری که A_1 به n_1 طریق، A_2 به n_2 طریق و ... و کار A_k به n_k طریق قابل انجام باشد آنگاه کار A به $n_1\times n_2\times...\times n_k$ طریق قابل انجام است.

مثال ۳: یک سکه ۲ حالت دارد (ش، خ) و یک تاس ۶ حالت دارد (۱، ۲، ..، ۶). حال اگر یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب کنیم $2\times6=12$ حالت فرود می‌آیند:

(۱ و ش) (۲ و ش) ... (۶ و ش) (۱ و خ) (۲ و خ) ... (۶ و خ)

مثال ۴: در شکل مقابل جمعاً ۷ جاده با شماره‌های ۱ تا ۷ وجود دارد به چند حالت می‌توان از شهر w به z رفت؟



پاسخ: برای رفتن از w به z باید سه عمل پشت سرهم انجام شود: رفتن از w به x به ۲ حالت، رفتن از x به y به ۳ حالت و رفتن از y به z به ۲ حالت. پس رفتن از w به z به $2\times3\times2=12$ حالت قابل انجام است که این ۱۲ حالت عبارتند از:

۱۳۶ و ۱۳۷ و ۱۴۶ و ۱۴۷ و ۱۵۶ و ۱۵۷ و ۲۳۶ و ۲۳۷ و ۲۴۶ و ۲۴۷ و ۲۵۶ و ۲۵۷

مثال ۵: فرض کنید شمارهٔ پلاک خودروها از چپ به راست، از ۲ حرف الفبای انگلیسی و ۴ رقم تشکیل شده است مثل ab۲۰۴۹. حروف بزرگ با کوچک یکسان هستند. چند شمارهٔ پلاک مختلف وجود دارد اگر

الف) هیچ حرف و رقمی تکرار نشود. ب) تکرار حرف یا رقم مجاز باشد.

پاسخ: الف) ۲۶ حرف الفبای انگلیسی و ۱۰ رقم وجود دارد پس اولین مکان از چپ دارای ۲۶ حالت (a تا z) و دومین مکان دارای ۲۵ حالت (تکرار مجاز نیست و نباید کاراکتری که در مکان اول گذاشته‌ایم را مجدداً استفاده کنیم) می‌باشد. همچنین ۴ مکان سمت راست دارای $10\times9\times8\times7$ حالت هستند پس کل حالات $26\times25\times10\times9\times8\times7=3276000$ می‌باشد.

ب) تکرار مجاز است و جواب برابر $26\times26\times10\times10\times10\times10=6760000$ می‌باشد.

مثال ۶: با حروف A و B و C و D و E چند کلمهٔ ۳ حرفی (با معنی یا بی‌معنی) می‌توان ساخت به شرطی که

الف) تکرار مجاز باشد. ب) تکرار مجاز نباشد.

پاسخ: الف) می‌خواهیم کلمهٔ ۳ حرفی بسازیم پس ۳ جایگاه داریم که هر جایگاه می‌تواند هر یک از ۵ حرف A و B و C و D و E باشد:

$$\underset{5}{\underline{\text{جایگاه اول}}}\times\underset{5}{\underline{\text{جایگاه دوم}}}\times\underset{5}{\underline{\text{جایگاه سوم}}}=5^3=125$$

ب) جایگاه اول ۵ حالت دارد. جایگاه دوم ۴ حالت دارد زیرا نباید حرفی که در جایگاه اول گذاشته‌ایم را در جایگاه دوم قرار دهیم و به همین ترتیب جایگاه سوم ۳ حالت دارد پس طبق اصل ضرب جواب $5\times4\times3=60$ می‌باشد که تعدادی از جواب‌ها عبارتند از:

ABC, ABD, ABE, BAC, BAD, BAE,...

مثال ۷: با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت به شرطی که

الف) تکرار مجاز نباشد. ب) تکرار مجاز باشد.

پاسخ: الف) برخی از این اعداد عبارتند از: ۲۳۰ و ۲۰۳ و ۱۰۴ و ۱۲۳ و ۲۱۳ و ... . رقم صدگان ۴ حالت دارد (۱ و ۲ و ۳ و ۴) زیرا نباید صفر باشد. هر رقمی که برای صدگان انتخاب کنیم آنگاه برای دهگان نباید آن رقم انتخاب شود ولی صفر می‌تواند انتخاب شود پس دهگان ۴ حالت دارد و به همین ترتیب یکان دارای ۳ حالت است:

$$\underset{4}{\underline{\text{صدگان}}}\times\underset{4}{\underline{\text{دهگان}}}\times\underset{3}{\underline{\text{یکان}}}=48$$

ب) صدگان ۴ حالت و سایر ارقام ۵ حالت دارند:

$$\underset{4}{\underline{\text{صدگان}}}\times\underset{5}{\underline{\text{دهگان}}}\times\underset{5}{\underline{\text{یکان}}}=100$$

برخی از اعداد مطلوب عبارتند از: ۲۳۰ و ۲۰۳ و ۲۰۲ و ۲۲۰ و ۲۲۲ و ۴۴۰ و ...

مثال ۸: به چند حالت می‌توان ۴ خانهٔ $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } \\ \hline \end{array}$ را با ۳ رنگ چنان رنگ زد طوری که خانه‌های مجاور، هم رنگ نباشند؟

پاسخ: خانه ۱ را می‌توان به هر ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد پس این خانه ۳ حالت دارد. هر رنگی که برای خانهٔ ۱ استفاده شود نمی‌توان برای خانهٔ ۲ بکار برد پس خانه ۲ دارای ۲ حالت است. هر رنگی که برای خانه ۲ استفاده شده را نمی‌توان برای خانه ۳ بکار برد ولی می‌توان رنگ خانهٔ ۱ را به خانه ۳ نسبت داد پس خانهٔ ۳ دارای ۲ حالت است و به همین ترتیب خانهٔ ۴ نیز دارای ۲ حالت است پس طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با: $24 = 2\times2\times2\times3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$

۲- جایگشت‌ها (Permutations)

فرض کنید می‌خواهیم همهٔ ترتیب‌های مختلف حروف a و b و c را بیابیم:

cba و cab و bca و bac و acb و abc

تعداد این ترتیب‌ها برابر ۶ تاست که به این‌ها جایگشت‌ها یا تبدیلات حروف a و b و c گویند. به طور کلی تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با:

$$\frac{\text{جایگاه ۱}}{n}\times\frac{\text{جایگاه ۲}}{(n-1)}\times\dots\times\frac{\text{جایگاه n}}{1}$$

که حاصلضرب $n(n-1)(n-2)\dots1$ را با $n!$ (n فاکتوریل) نشان می‌دهیم. پس تعداد جایگشت سه شی متمایز برابر $3!=3\times2\times1=6$ می‌باشد. لازم به ذکر است $0!=1$ و $n!=n\times(n-1)!$.

حال فرض کنید می‌خواهیم از حروف a و b و c و d و e سه حرف متمایز انتخاب کنیم و سپس همهٔ ترتیب‌های آن‌ها را بیابیم. در واقع سه جایگاه داریم که اولی ۵ حالت، دومی ۴ حالت و آخری ۳ حالت دارد و طبق اصل ضرب داریم:

$$\frac{\text{جایگاه ۱}}{5}\times\frac{\text{جایگاه ۲}}{4}\times\frac{\text{جایگاه ۳}}{3}=60$$

که برخی از این جایگشت‌ها عبارتند از:

$abc, acb, \dots, abd, adb, \dots, ace, \dots, cde, ced, \dots$

جایگشت بدون تکرار: تعداد جایگشت‌های r شی از n شی یعنی می‌خواهیم از بین n شی متمایز، r شی متمایز $(1\le r\le n)$ انتخاب کرده و سپس همهٔ ترتیب‌های این r شی را بشماریم که طبق اصل ضرب تعداد این جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{\text{جایگاه ۱}}{n}\times\frac{\text{جایگاه ۲}}{(n-1)}\times\frac{\text{جایگاه ۳}}{(n-2)}\cdots\frac{\text{جایگاه r}}{(n-r+1)}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

که این رابطه را با $P(n,r)$ یا $(n)_r$ نشان می‌دهیم و به آن جایگشت r از n گوییم. پس:

$$(n)_r = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۹: تعداد اعداد ۳ رقمی با ارقام متمایز که با ارقـام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ مـی‌تـوان نوشـت، برابـر $P(۵,۳)$ است زیرا از ۵ رقم باید ۳ رقم متمایز انتخاب کنیم و ترتیب‌های این ۳ رقم را بشماریم:

$$P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۵\times۴\times۳ = ۶۰$$

مثال ۱۰: در یک آسانسور در یک ساختمان ۷ طبقه، ۴ نفر حضور دارند. اگر قرار باشد در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود، این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند پیاده شوند؟

پاسخ: از ۷ طبقه باید ۴ طبقه انتخاب شود و در این ۴ طبقه ۴ نفر پیـاده شـوند کـه ترتیـب پیـاده شدن این افراد مهم است پس جواب جایگشت ۴ شی متمایز از ۷ شی متمایز است:

$$P(۷,۴) = \frac{۷!}{(۷-۴)!} = \frac{۷!}{۳!} = ۷\times۶\times۵\times۴ = ۸۴۰$$

جایگشت با تکـرار: n نـوع شـی متفـاوت وجـود دارد (از هـر نـوع حـداقل r تـا وجـود دارد)، می‌خواهیم r شی (تکرار مجاز است) انتخاب کرده و همهٔ ترتیب‌های این r شی را بشماریم. پس r تا جایگـاه وجـود دارد کـه هـر جایگـاه n تـا انتخـاب دارد و طبـق اصـل ضـرب تعـداد حـالات برابـر $\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{\text{r بار}} = n^r$ است.

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم تعداد همهٔ اعداد ۲ رقمی که با ۱ و ۲ و ۳ می‌تـوان سـاخت (تکـرار مجاز) را بیابیم. هر رقم ۳ حالت دارد پس تعداد ایـن اعـداد $۳\times۳=۹$ مـی‌باشـد کـه ایـن ۹ عـدد عبارتند از:

۳۳ و ۲۲ و ۱۱ و ۳۲ و ۲۳ و ۳۱ و ۱۳ و ۲۱ و ۱۲

و یا تعداد تمام کلمات r حرفی (چه با معنی چه بی‌معنی) که با حروف الفبای انگلیسی می‌توان نوشت برابر ۲۶^r می‌باشد.

جایگشت با وجود اشیاء تکراری: فرض کنید می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های n شـی را بیـابیم که برخی اشیاء تکراری هستند یعنی $n_۱$ شی نوع ۱، $n_۲$ شی نوع ۲ و ... و n_r شی از نوع r وجـود دارد که $n_۱+n_۲+..+n_r=n$. تعداد جایگشت‌های این n شی برابر $\frac{n!}{n_۱!n_۲!....n_k!}$ است.

مثال ۱۱: تعداد جایگشت‌های حروف BALL را بیابید.

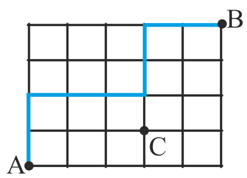
پاسخ: اگر دو حرف L با هم متفاوت باشند، تعداد جایگشت $۴!=۲۴$ است ولی چون دو حرف L یکسان هستند، تعداد جایگشت برابر $\frac{۴!}{۲!}=۱۲$ می‌باشد که این ۱۲ جایگشت عبارتند از:

ABLL,ALBL,ALLB,BALL,BLAL,BLLA,LABL,LALB,LBAL,LBLA,LLAB,LLBA

بنابراین در این نوع مسائل باید جایگشت همهٔ اشیاء را شمارش کنید و سپس به جایگشت اشیاء تکراری تقسیم کنید.

مثال ۱۲: با حروف MISSISSIPPI چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان نوشت، در واقع این ۱۱ حرف چند تا جایگشت یا ترتیب متفاوت دارند؟ در چند جایگشت همهٔ Sها کنار هم هستند؟

پاسخ: اگر هر ۱۱ حرف متفاوت می‌بودند جواب !۱۱ می‌شد ولی چون حروف تکراری وجود دارد جواب برابر $\frac{۱۱!}{۱!\,۴!\,۴!\,۲!}=۳۴۶۵۰$ می‌باشد. برای شمارش جایگشت‌هایی که Sها کنار هم هستند، کافی است هر ۴ تا S را یک شی در نظر گرفته به همراه ۷ حرف دیگر، جمعاً ۸ شی وجود دارد که !۸ جایگشت دارد ولی چون ۴ تا حرف I و ۲ تا حرف P تکراری هستند جواب برابر $\frac{۸!}{۴!۲!}=۸۴۰$ می‌باشد.



مثال ۱۳: الف) در شکل ۵×۴ مقابل به چند حالت می‌توان از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفت به شرطی که فقط به سمت راست (R) و به سمت بالا (U) مجاز به حرکت باشیم و در هر حرکت فقط یک خانه جابجا شویم؟ یک نمونه از مسیرهای مجاز نشان داده شده است.

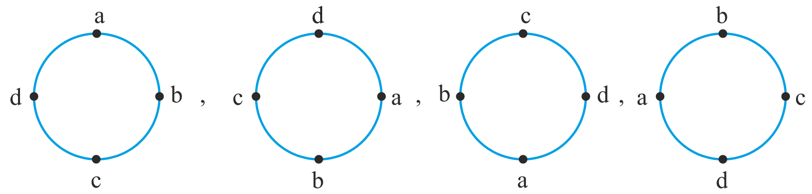
ب) چندتا از این مسیرها از C عبور نمی‌کند؟

پاسخ: الف) هر مسیر از A به B را می‌توان با یک دنبالهٔ ۹ حرفی که شامل ۵ حرف R و ۴ حرف U است نشان داد. مثلاً دنبالهٔ متناظر با مسیر مشخص شده در شکل UURRRUURR می‌باشد. در واقع بین مسیرهای مجاز و رشته‌های ۹ حرفی که شامل ۵ حرف R و ۴ حرف U هستند تناظر یک به یک وجود دارد و تعداد این رشته‌ها برابر $\frac{۹!}{۵!۴!}=۱۲۶$ می‌باشد.

ب) تعداد مسیرهایی که از C عبور می‌کند را از کل مسیرها کم می‌کنیم:

$$(A \to B)-(A \to C)\times(C \to B)=\frac{۹!}{۵!۴!}-\frac{۴!}{۳!۱!}\times\frac{۵!}{۲!۳!}=۱۲۶-۴۰=۸۶$$

جایگشت دایره‌ای: فرض کنید n نفر می‌خواهند دور یک میزگرد بنشینند. دور میز چرخش افراد، حالت جدید نیست. یعنی اگر افراد دور میز را بچرخانیم حالت جدید ساخته نمی‌شود. مثلاً فرض کنید ۴ نفر به نام‌های a و b و c و d دور میز می‌نشینند. هر ۴ جایگشت زیر یکسان هستند:



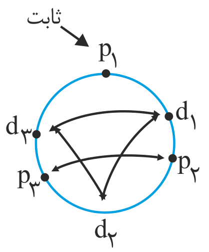
در حالیکه این جایگشت‌ها اگر در یک ردیف (به صورت خطی) باشند، متفاوت هستند:

$abcd, dabc, cdab, bcda$

به طور کلی n شی متفاوت در یک ردیف دارای $n!$ جایگشت هستند ولی دور میز این تعداد را باید به n تقسیم کنیم زیرا هر n حالت دور میزگرد یکسان هستند (از چرخش یکدیگر، حاصل می‌شوند) پس تعداد جایگشت n شی متمایز دور میزگرد برابر $\frac{n!}{n}=(n-۱)!$ است. در واقع می‌توان برای شمارش تعداد جایگشت دایره‌ای، یک شی را ثابت فرض کرد و $n-۱$ شی دیگر را جابجا کرد که تعداد حالات $(n-۱)!$ بدست می‌آید.

مثال ۱۴: ۳ پسر و ۳ دختر به چند حالت می‌توانند دور یک میزگرد قرار گیرند طوری که

الف) پسرها کنار هم باشند. ب) یک در میان قرار گیرند.



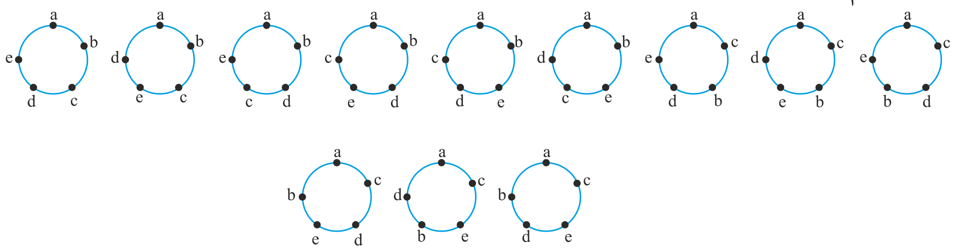
پاسخ: الف) پسرها را یک شی در نظر می‌گیریم که به همراه ۳ دختر، تشکیل ۴ شی متمایز را می‌دهند که دور میز $۳!$ جایگشت دارند و پسرها با یکدیگر نیز $۳!$ جایگشت دارند و طبق اصل ضرب، کل حالات برابر $۳!\times۳!=۳۶$ است.

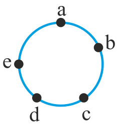
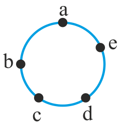
ب) یک نفر (فرقی نمی‌کند پسر یا دختر) مثلاً یک پسر را ثابت فرض کنید. سپس دخترها با هم $۳!$ و دو پسر باقی مانده باهم $۲!$ جابجایی دارند پس تعداد کل حالات $۳!\times۲!=۱۲$ می‌باشد:

مثال ۱۵: فرض کنید می‌خواهید با ۵ مهرهٔ متمایز (e, d, c, b, a) یک دستبند بسازید، تعداد دستبندهای متفاوتی که می‌توان ساخت چند تاست؟

پاسخ: دستبند همان دایره است با این شرط اضافی که پشت و روی دستبند فرقی ندارند. یعنی تعداد دستبندهایی که با n مهرهٔ متمایز می‌توان ساخت برابر $\frac{(n-۱)!}{۲}$ است. پس جواب این سوال

$۱۲=\frac{(۵-۱)!}{۲}$ می‌باشد که این ۱۲ دستبند عبارتند از:



توجه کنید حالتی مثل  با  یکسان است زیرا یکی را پشت و رو کنید دیگری بدست می‌آید و دستبند همان دستبند است.

۳- ترکیب‌ها (Combinations)

- **ترکیب بدون تکرار:** n تا شی متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r تا شی متمایز $(۰\le r\le n)$ انتخاب کنیم و برای ما ترتیب مهم نیست یعنی نمی‌خواهیم اشیایی که انتخاب کردیم را با هم جابجا کنیم. یادمان هست تعداد جایگشت r شی متمایز از n شی متمایز برابر $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ بود، حال که نمی‌خواهیم r شی که انتخاب شده‌اند را با هم جابجا کنیم باید تعداد جایگشت‌ها را به $r!$ تقسیم کنیم زیرا r شی متمایز دارای $r!$ جایگشت هستند که اکنون بی‌اثر است پس تعداد حالات انتخاب r شی متمایز از بین n شی متمایز برابر است با:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{۱}{r!}P(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم از بین ۴ شی متمایز a و b و c و d دو شی انتخاب کنیم $۶=\frac{۴!}{۲!۲!}=\binom{۴}{۲}$ حالت وجود دارد که عبارتند از:

$\{a,b\}\{a,c\}\{a,d\}\{b,c\}\{b,d\}\{c,d\}$

توجه کنید اگر می‌خواستیم جایگشت‌های ۲ شی از ۴ شی را بدست آوریم، تعداد حالات $P(۴,۲)=۱۲$ می‌شد چون مثلاً ab و ba دو حالت متفاوت می‌بودند.

توجه: درستی تساوی‌های زیر قابل بررسی است:

$$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱\ ,\ \binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n\ ,\ \binom{n}{r}=۰\ \text{if}\ ۰\le n<r$$

مثال ۱۶: الف) در یک آزمون ۱۰ سوال وجود دارد. به چند حالت می‌توان بـه ۷ سـوال جـواب داد؟ ترتیب پاسخ دادن به سوالات اهمیتی ندارد.

ب) اگر مجبور باشیم به ۳ سوال از ۵ سوال اول و به ۴ سـوال از ۵ سـوال آخـر پاسـخ دهـیم، چنـد حالت وجود دارد؟

ج) اگر مجبور باشیم به ۷ سوال از ۱۰ سوال پاسخ دهیم طوری که حداقل بـه ۳ سـوال از ۵ سـوال اول پاسخ دهیم، چند حالت وجود دارد؟

پاسخ: الف) باید از ۱۰ سوال تعداد ۷ سـوال انتخـاب شـود کـه $\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$ حالت دارد.

ب) به $\binom{۵}{۳}$ حالت، ۳ سوال از ۵ سوال اول انتخاب می‌کنیم و بـه $\binom{۵}{۴}$ حالـت، ۴ سـوال از ۵ سـوال آخر انتخاب می‌شود پس طبق اصل ضرب تعداد کل حالات $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}=۵۰$ است.

ج) حداقل به ۳ سوال از ۵ سوال اول باید پاسخ داده شود که حالات مختلف دارد:

۱) به ۳ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۴ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}=۵۰$$

۲) به ۴ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۳ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}=۵۰$$

۳) به ۵ سوال از ۵ سوال اول و در نتیجه به ۲ سوال از ۵ سوال آخر پاسخ داده شود:

$$\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲}=۱۰$$

پس طبق اصل جمع جواب برابر $۱۱۰=۱۰+۵۰+۵۰$ می‌باشد.

مثال ۱۷: الف) به چند حالت می‌توان ۲۰ نفر را به ۴ تیم متفاوت ۵ نفره تقسیم کرد؟

ب) اگر تیم‌ها یکسان باشند، چند حالت، امکان‌پذیر است؟

پاسخ: الف) فرض کنید اسم تیم‌ها A و B و C و D باشد. برای تیم A باید ۵ نفر انتخاب کـرد کـه $\binom{۲۰}{۵}$ حالت دارد سپس از بین ۱۵ نفر باقی‌مانده باید ۵ نفر بـرای تـیم B انتخـاب کـرد کـه $\binom{۱۵}{۵}$

حالت دارد و برای تیم C تعداد حالات $\binom{10}{5}$ و برای تیم D تعداد حالات $\binom{5}{5}$ است و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{20}{5}\binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}=\left(\frac{20!}{5!15!}\right)\left(\frac{15!}{5!10!}\right)\left(\frac{10!}{5!5!}\right)\left(\frac{5!}{5!0!}\right)=\frac{20!}{5!5!5!5!}$$

ب) چون ۴ تا تیم یکسان هستند باید جواب قسمت الف را به جایگشت تیم‌ها یعنی به !۴ تقسیم کنیم پس جواب برابر است با:

$$\frac{1}{4!}\frac{20!}{5!5!5!5!}$$

مثال ۱۸: با حروف MISSISSIPPI چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان نوشت طوری که دارای هیچ دو تا S کنار هم نباشند؟

پاسخ: توجه کنید نمی‌توان کل حالات را بدست آورد و منهای حالاتی کرد که هر ۴ تا S کنار هم هستند (در مثال ۱۲ حالاتی که Sها کنار هم هستند را شمرده‌ایم). برای شمارشِ تعداد حالاتِ مسائلی که می‌خواهیم تعدادی شی کنار هم نباشند، ابتدا آن اشیاء را نادیده می‌گیریم پس در این مسئله ابتدا Sها را نادیده می‌گیریم و جایگشت سایر اشیاء را می‌یابیم یعنی جایگشت حروف $\uparrow M\uparrow I\uparrow I\uparrow I\uparrow I\uparrow P\uparrow P\uparrow$ را می‌یابیم که $\frac{7!}{4!2!}$ حالت دارد، حال باید از ۸ فضای بین و قبل و بعد این حروف، ۴ فضا انتخاب کنیم و ۴ تا S را قرار دهیم که $\binom{8}{4}$ حالت دارد پس کل حالات $\frac{7!}{4!2!}\times\binom{8}{4}=7350$ می‌باشد.

مثال ۱۹: چند دسته از اعداد صحیح (a,b,c) وجود دارد طوری که

الف) $1\le a<b<c\le 6$ ب) $1\le a\le b\le c\le 6$

پاسخ: الف) تعدادی از جواب‌ها عبارتند از $(1,2,3)$ و $(1,4,5)$ و $(2,3,6)$ و ... .

در واقع می‌خواهیم از بین اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶، سه عدد متفاوت a و b و c انتخاب کنیم و این سه عدد را به یک حالت صعودی $(a<b<c)$ بچینیم. یعنی نمی‌خواهیم همهٔ جایگشت‌های این سه عدد را بیابیم. پس این مسئله ترکیب بدون تکرار ۳ شی از ۶ شی است پس تعداد حالات مطلوب $\binom{6}{3}=20$ می‌باشد. به طور کلی تعداد دسته‌های صحیح $(x_1,x_2,..,x_r)$ که $1\le x_1<x_2<...<x_r\le n$ ترکیب بدون تکرار r شی از n شی است که برابر $\binom{n}{r}$ است.

ب) تعدادی از جواب‌ها عبارتند از $(۱,۲,۳)$ و $(۱,۱,۲)$ و $(۳,۴,۶)$ و $(۲,۲,۲)$ و $(۳,۴,۴)$ و … .

این مسئله نیز ترکیب است زیرا a و b و c را نمی‌خواهیم جابجا کنیم و فقط به یک حالت صعودی می‌خواهیم بچینیم. ولی این مسئله ترکیب با تکرار است زیرا a و b و c می‌توانند مساوی باشند. می‌دانیم اگر $a \le b$ آنگاه $a < b + ۱$. با این تکنیک می‌توان تساوی بین a و b و c را حذف کرده و سپس از فرمول ترکیب بدون تکرار استفاده کنیم:

$$۱ \le a \le b \le c \le ۶ \rightarrow ۱ \le \underbrace{a}_{A} < \underbrace{b+۱}_{B} < \underbrace{c+۲}_{C} \le ۸ \rightarrow ۱ \le A < B < C \le ۸$$

یعنی می‌خواهیم از بین ۸ شی متفاوت (۱ تا ۸) سه شی متفاوت (A و B و C) انتخاب کنیم که $\binom{۸}{۳} = ۵۶$ حالت دارد.

■

ترکیب با تکرار: n نوع شی متفاوت وجود دارد (از هر نوع حداقل r تا وجود دارد) می‌خواهیم r شی (تکرار مجاز است) انتخاب کنیم و ترتیب اشیاء برای ما مهم نیست یعنی اشیایی که انتخاب می‌کنیم را فقط به یک حالت (مثلاً صعودی) می‌خواهیم بچینیم.

در واقع می‌خواهیم تعداد دسته‌های صحیح $(x_۱, x_۲, ..., x_r)$ را بیابیم که $۱ \le x_۱ \le x_۲ \le ... \le x_r \le n$ که می‌توان این نامساوی‌ها را به نامساوی زیر تبدیل کرد:

$$۱ \le x_۱ < x_۲ + ۱ < x_۳ + ۲ < ... < x_r + r - ۱ \le n + r - ۱$$

و تعداد جواب‌های این نامساوی برابر $\binom{n+r-۱}{r}$ است.

مثال ۲۰: یک گل فروش سه نوع گل a و b و c دارد. به چند حالت می‌توان یک دسته گل شامل ۴ شاخه گل تهیه کرد؟

پاسخ: ۴ شاخه باید از ۳ نوع گل انتخاب شود. در این انتخاب تکرار مجاز است و همچنین هر انتخابی فقط یک حالت دارد و ترتیب برای ما مهم نیست مثلاً دسته گل شامل aabc فرقی با abac یا baac ندارد. پس باید از ۳ نوع گل متفاوت، ۴ شاخه (با تکرار) انتخاب کنیم که $\binom{۳+۴-۱}{۴} = ۱۵$ حالت دارد. جالب است بدانید بین جواب‌های این سؤال و تعداد جایگشت‌های ۴ تا "x" و ۲ تا "|" تناظر یک به یک وجود دارد که جدول زیر ۱۵ جواب این سوال را به همراه تناظر مربوطه نشان می‌دهد. در تناظر مربوطه، تعداد xهای قبل از خط عمودی اول، تعداد aها است. تعداد xهای بین دو خط تعداد bهاست و تعداد xهای بعد از خطِ دوم، تعداد cهاست.

تناظر مربوطه	حالت‌های انتخاب
$x\mid\mid xxx$	$\{a,c,c,c\}$
$\mid x\mid xxx$	$\{b,c,c,c\}$
$xx\mid xx\mid$	$\{a,a,b,b\}$
$\mid xx\mid xx$	$\{b,b,c,c\}$
$xx\mid\mid xx$	$\{a,a,c,c\}$
$xxxx\mid\mid$	$\{a,a,a,a\}$
$\mid xxxx\mid$	$\{b,b,b,b\}$
$\mid\mid xxxx$	$\{c,c,c,c\}$

تناظر مربوطه	حالت‌های انتخاب
$xx\mid x\mid x$	$\{a,a,b,c\}$
$x\mid xx\mid x$	$\{a,b,b,c\}$
$x\mid x\mid xx$	$\{a,b,c,c\}$
$xxx\mid x\mid$	$\{a,a,a,b\}$
$xxx\mid\mid x$	$\{a,a,a,c\}$
$x\mid xxx\mid$	$\{a,b,b,b\}$
$\mid xxx\mid x$	$\{b,b,b,c\}$

نتیجه: ترکیب با تکرار r شی از n شی را می‌توان متناظر کرد با جایگشت‌های r تا "x" و $n-1$ تا "|" که تعداد این جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=\binom{n+r-1}{r}$$

مثال ۲۱: به چند حالت می‌توان ۴ عدد از دنبالهٔ ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱- و ۲- و ۳- انتخاب کرد که حاصلضرب آنها مثبت باشد با این شرط که **الف)** تکرار مجاز نباشد؟ **ب)** تکرار مجاز باشد؟

پاسخ: الف) برای آنکه ضرب ۴ عدد، مثبت باشد، حالات مختلف وجود دارد:

- هر ۴ عدد مثبت باشند که $\binom{4}{4}=1$ حالت دارد
- هر ۴ عدد منفی باشند که $\binom{3}{4}=0$ حالت دارد
- ۲ عدد مثبت $\binom{4}{2}=6$ و ۲ عدد منفی $\binom{3}{2}=3$ که می‌شود $6\times 3=18$ حالت.

پس کل حالات ممکن، برابر $1+0+18=19$ می‌باشد.

ب) ترکیب با تکرار است یعنی مجازیم عدد تکراری انتخاب کنیم.

- هر ۴ عدد مثبت باشند که $\binom{4+4-1}{4}=35$ حالت دارد.
- هر ۴ عدد منفی باشند که $\binom{3+4-1}{4}=15$ حالت دارد.
- ۲ عدد مثبت و ۲ عدد منفی باشند که $\binom{3+2-1}{2}\times\binom{4+2-1}{2}=60$ حالت دارد.

پس تعداد کل حالات برابر $35+15+60=110$ می‌باشد.

مثال ۲۲: به چند حالت می‌توان ۵ سیب (یکسان) را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

پاسخ: **روش ۱)** ۳ نفر را a و b و c می‌نامیم. چند حالت توزیع عبارتند از:

حالت ۱) $a=۲, b=۲, c=۱$ حالت ۲) $a=۵, b=۰, c=۰$

حالت ۳) $a=۰, b=۵, c=۰$ حالت ۴) $a=۲, b=۳, c=۰$

حالت ۱ به این معنی است که a دو بار و b دو بار و c یک بار انتخاب شده است. حالت ۲ به این معنی است که a پنج بار و b و c هیچ بار انتخاب شده‌اند. بنابراین تعداد حالات این سوال، برابر است با تعداد حالات انتخاب با تکرار ۵ شی از بین a و b و c که برابر است با $\binom{۳+۵-۱}{۵}=\binom{۷}{۵}=۲۱$.

روش ۲) هر جواب این مسئله را می‌توان متناظر کرد با جایگشتی از ۵ حرف "x" و دو خط "|".

مثلاً حالت ۱ معادل $\underbrace{x}_{\text{تعداد c}}|\underbrace{xx}_{\text{تعداد b}}|\underbrace{xx}_{\text{تعداد a}}$ است. و یا حالت ۲ معادل $\underbrace{\quad}_{\text{تعداد c}}|\underbrace{\quad}_{\text{تعداد b}}|\underbrace{xxxxx}_{\text{تعداد a}}$ است. و یا حالت ۳ معادل $\underbrace{\quad}_{\text{تعداد c}}|\underbrace{xxxxx}_{\text{تعداد b}}|\underbrace{\quad}_{\text{تعداد a}}$ است و یا حالت ۴ معادل $\underbrace{\quad}_{\text{تعداد c}}|\underbrace{xxx}_{\text{تعداد b}}|\underbrace{xx}_{\text{تعداد a}}$ است.

پس تعداد حالات این مسئله برابر تعداد جایگشت ۵ حرف "x" و دو تا "|" است که برابر $\binom{۷}{۵}=\frac{۷!}{۵!۲!}=۲۱$ است.

نتیجه: تعداد حالات توزیع r شی یکسان در n جعبه متمایز برابر است با تعداد انتخاب (ترکیب) با تکرار r شی از n نوع شی و برابر است با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $x_۱+x_۲+...+x_n=r \quad (x_۱,x_۲,..,x_n \geq ۰)$ که برابر است با

$$\binom{r+n-۱}{r}=\binom{r+n-۱}{n-۱}$$

مثال ۲۳: به چند حالت می‌توان ۸ سیب (یکسان) را بین ۳ نفر توزیع کرد طوری که به هر نفر حداقل یک سیب داده شود؟

پاسخ: ابتدا به هر نفر یک سیب می‌دهیم (چون سیب‌ها یکسان هستند این کار فقط یک حالت دارد) سپس ۵ سیب باقی مانده را بین ۳ نفر توزیع می‌کنیم که $۲۱=\binom{۵+۳-۱}{۳-۱}$ حالت دارد. و جواب نهایی $۱\times۲۱=۲۱$ می‌باشد.

نتیجه: تعداد حالات توزیع n شی یکسان در k جعبهٔ متمایز به شرطی که جعبه‌ای خالی نماند یعنی در هر جعبه حداقل یک شی قرار گیرد $(n \geq k)$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. زیرا باید از n شی ابتدا k شی برداشته و در k جعبه قرار دهیم و سپس $n-k$ شی را در k جعبه توزیع کنیم که $\binom{n-k+k-1}{k-1}$ حالت دارد.

مثال ۲۴: تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط $x_i \geq 2$ و $i = 1,2,3$ چندتاست؟

پاسخ: مثل این است که می‌خواهیم ۱۰ سیب (یکسان) را بین ۳ نفر توزیع کنیم و هر نفر حداقل ۲ سیب می‌خواهد پس ابتدا نفری ۲ سیب می‌دهیم و ۴ سیب باقی‌مانده را بین ۳ نفر توزیع می‌کنیم که $\binom{4+3-1}{3-1} = 15$ حالت دارد. البته می‌توان در معادله تغییراتی دهیم که همهٔ متغیرها از صفر شروع شوند:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 2) = 4$$

$$x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 2 \rightarrow x_1 - 2 \geq,\ x_2 - 2 \geq 0,\ x_3 - 2 \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{matrix} X_1 + X_2 + X_3 = 4 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{matrix} \rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = 15$$

مثال ۲۵: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ $(i = 1,2,3,\ x_i \geq 0)$ چندتاست؟

پاسخ: روش ۱: این نامعادله را می‌توان به ۵ معادله تبدیل کرد و تعداد جواب‌های هر یک را شمرد و جمع کرد:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \rightarrow \binom{0+3-1}{3-1} = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \rightarrow \binom{2+3-1}{3-1} = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = 15$$

پس تعداد جواب‌ها برابر $35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1$ است.

روش ۲: اگر یک متغیر $x_۴$ به سمت چپ نامعادله اضافه کنیم آنگاه می‌توان، نامساوی را به تساوی تبدیل کرد (چرا؟) یعنی نامعادلهٔ داده شده با معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴$ یکسان است و این معادله $\binom{۴+۴-۱}{۴-۱} = ۳۵$ جواب صحیح نامنفی دارد.

مثال ۲۶: تعداد جواب‌های طبیعی (صحیح بزرگتر از صفر) نامعادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ < ۱۰$ $(i = ۱,۲,۳ \,,\, x_i \geq ۱)$ چندتاست؟

پاسخ:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ < ۱۰ \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۹ \rightarrow (x_۱ - ۱) + (x_۲ - ۱) + (x_۳ - ۱) \leq ۶$$

حال تعریف می‌کنیم $X_i = x_i - ۱$ $(i = ۱,۲,۳)$ پس $X_i \geq ۰$ در نتیجه:

$$X_۱ + X_۲ + X_۳ \leq ۶ \rightarrow X_۱ + X_۲ + X_۳ + x_۴ = ۶ \rightarrow \binom{۶+۴-۱}{۴-۱} = ۸۴$$

مثال ۲۷: **الف)** چند عدد در مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,..,۱۰۰۰۰\}$ وجود دارد که جمع ارقام آنها، برابر ۶ باشد؟ **ب)** چند عدد طبیعی ۴ رقمی وجود دارد که جمع ارقام آنها، برابر ۶ باشد؟

پاسخ: اعداد مجموعهٔ A همهٔ اعداد حداکثر ۴ رقمی هستند (۱۰۰۰۰ پنج رقمی است ولی جمع ارقامش ۶ نیست و قبل از این عدد، عدد ۹۹۹۹ است که ۴ رقمی است) اگر ارقام را a و b و c و d بنامیم آنگاه باید $a + b + c + d = ۶$. هر جواب صحیح نامنفی $(a,b,c,d \geq ۰)$ از این معادله، یک جواب مسئله است. مثلاً $a = ۰$ و $b = ۲$ و $c = ۰$ و $d = ۴$ یعنی عدد ۲۰۴ و یا $a = ۳$ و $b = ۲$ و $c = ۱$ و $d = ۰$ یعنی عدد ۳۲۱۰. تعداد جواب‌های این معادله $\binom{۶+۴-۱}{۴-۱} = ۸۴$ است.

ب) جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $a + b + c + d = ۶$ با شرط $a \geq ۱$ موردنظر است (دقت کنید اگر $a = ۰$ آنگاه عدد ۴ رقمی نیست) پس باید ابتدا از ۶ یک واحد کم کنیم و به a بدهیم و سپس ۵ واحد باقی‌مانده را بین ۴ نفر (d,c,b,a) توزیع کنیم که $\binom{۵+۴-۱}{۴-۱} = ۵۶$ حالت دارد.

۴- توزیع شی در جعبه

همانطور که دیدیم تعداد حالات توزیع n شی یکسان در k جعبه متفاوت برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است و اگر بخواهیم جعبه‌ای خالی نماند $(n \geq k)$ تعداد حالات برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است. حال می‌خواهیم بررسی کنیم تعداد حالات توزیع n شی متفاوت در k جعبه متفاوت چگونه بدست می‌آید.

مثال ۲۸: به چند حالت می‌توان ۳ شی متمایز (c,b,a) را در ۲ جعبهٔ متمایز (۱ و ۲) توزیع کرد؟
پاسخ: هر شی ۲ حالت دارد زیرا هر شی یا در جعبه ۱ یا در جعبه ۲ باید قرار گیرد پس تعداد حالات، برابر $8 = 2^3 = 2\times2\times2$ می‌باشد که این ۸ حالت، عبارتند از:

(جعبه۲ و جعبه۱) : $(-,abc),(abc,-),(a,bc),(bc,a),(b,ac),(ac,b),(c,ab),(ab,c)$

نتیجه: تعداد حالات توزیع n شی متفاوت در k جعبهٔ متفاوت برابر k^n است.

مثال ۲۹: به چند حالت می‌توان ۳ شی متمایز (c,b,a) را در ۵ جعبه متمایز $(5,4,3,2,1)$ توزیع کرد طوری که در هر جعبه، حداکثر یک شی قرار گیرد؟
پاسخ: شی a را به ۵ حالت می‌توان در یکی از جعبه‌ها قرار داد. شی b به ۴ حالت می‌تواند در یکی از جعبه‌های باقی‌مانده قرار گیرد و شی c به ۳ حالت پس کل حالات $5\times4\times3=\frac{5!}{2!}=\frac{5!}{(5-3)!}$ است.

نتیجه: تعداد حالات توزیع n شی متفاوت در k جعبه متفاوت طوری که در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد $(n\le k)$ برابر است با:

$$k(k-1)(k-2)...(k-n+1)=\frac{k!}{(k-n)!}=P(k,n)$$

توجه: تعداد حالات توزیع n شی متفاوت در k جعبه متفاوت در واقع یعنی تعداد توابع از n عضو به k عضو. حال اگر قرار باشد در هر جعبه حداکثر یک شی قرار گیرد $(n\le k)$، تابع یک به یک است و اگر قرار باشد در هر جعبه حداقل یک شی قرار گیرد $(n\ge k)$ تابع پوشاست. مفهوم تابع و شمارش تابع پوشا را در فصل ۶ خواهیم دید.

۵- بسط دوجمله‌ای و چندجمله‌ای

بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ که n طبیعی است طبق قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن برابر است با:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

به عنوان مثال به چند نمونه توجه کنید:

$$(x+y)^1=x+y$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$(x+y)^{3}=x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}+y^{3}$

$(x+y)^{4}=x^{4}+4x^{3}y+6x^{2}y^{2}+4xy^{3}+y^{4}$

واضح است که بسط $(x+y)^n$ دارای $n+1$ جمله است و جملهٔ $x^{n_1}y^{n_2}$ به شرطی جمله‌ای از این بسط است که $n_1+n_2=n$ (در واقع تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله $\binom{n+2-1}{2-1}=n+1$ است که تعداد جملات بسط را نشان می‌دهد) پس جملات این بسط به شکل $x^{n_1}y^{n-n_1}$ هستند و ضریب این جمله $\binom{n}{n-n_1}=\binom{n}{n_1}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ است.

اگر در بسط دوجمله‌ای قرار دهیم $x=y=1$ آنگاه به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n}}$$

و اگر قرار دهیم $x=1$ و $y=-1$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots(-1)^{n}\binom{n}{n}=0}$$

که نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots}$$

و به همین ترتیب می‌توان با قرار دادن مقادیر مختلف به جای x و y فرمول‌های جدیدی را نتیجه گرفت مثلاً اگر $x=1$ و $y=2$ فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^{2}+\ldots+\binom{n}{n}2^{n}=3^{n}\rightarrow\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}=3^{n}}$$

در ادامه می‌خواهیم نکاتی راجع به بسط k جمله‌ای $(x_1+x_2+..+x_k)^n$ ارائه دهیم.

مثال ۳۰: عبارت $(x_1+x_2+x_3)^2$ را بسط دهید.

پاسخ:
$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)=x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_1+x_2^2+x_2x_3$

$+x_3x_1+x_3x_2+x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

همانطور که ملاحظه می‌شود این بسط دارای ۶ جمله است و ضریب مثلاً جملهٔ x_1^2 برابر ۱ یا ضریب x_1x_3 برابر ۲ است.

قضیه: تعداد جملات بسط $(x_1+x_2+..+x_k)^n$ برابر $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

اثبات: هر جملهٔ این بسط به شکل $\boxed{(\text{ضریب})x_1^{n_1}x_2^{n_2}..x_k^{n_k}}$ است که $n_1+n_2+..+n_k=n$ و هر جواب صحیح نامنفی این معادله، یک جمله از بسط را نشان می‌دهد و تعداد جواب‌های این معادله $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

قضیه: در بسط $(x_1+x_2+...+x_k)^n$ ضریب جملهٔ $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ که $n_1+n_2+..+n_k=n$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

اثبات: در واقع عبارت $(x_1+x_2+...x_k)^n$ یعنی:

$$\underbrace{\overbrace{(x_1+x_2+..+x_k)}^{\text{پرانتز ۱}}\overbrace{(x_1+x_2+...+x_k)}^{\text{پرانتز ۲}}...\overbrace{(x_1+x_2+...+x_k)}^{\text{پرانتز } n}}_{n \text{ بار}}$$

حال ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ به این معنی است که این جمله چندبار از ضرب فوق حاصل می‌شود. برای ساخت این جمله باید از n_1 پرانتز، x_1 انتخاب شود که $\binom{n}{n_1}$ حالت دارد حال از $n-n_1$ پرانتز باقی‌مانده باید n_2 بار x_2 انتخاب شود که $\binom{n-n_1}{n_2}$ حالت دارد و به همین ترتیب:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}...\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

مثال ۳۱: در عبارت $(a+b+c)^7$ ضریب $a^2b^3c^2$ چند است؟

پاسخ: با توجه به قضیهٔ فوق، ضریب برابر است با:

$$\frac{7!}{2!3!2!}=210$$

مثال ۳۲: در عبارت $(2a-b+3c)^7$ ضریب $a^2b^3c^2$ چند است؟

پاسخ: با توجه به اینکه a و b و c خودشان دارای ضریب هستند باید این ضرایب را در فرمول، تأثیر دهیم و جواب برابر است با:

$$\frac{7!}{2!3!2!}\times(2)^2(-1)^3(3)^2=-7560$$

مسائل حل شده

۱) با ارقام ۰ تا ۵ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت به شرطی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ: الف) صدگان ۵ انتخاب (۱ تا ۵) و دهگان و یکان ۶ انتخاب (۰ تا ۵):

صدگان دهگان یکان
۵ × ۶ × ۶ = ۱۸۰

ب) صدگان ۵ انتخاب، دهگان ۵ انتخاب (چون رقمی که برای صدگان انتخاب شده برای دهگان مجاز نیست ولی صفر مجاز است) و یکان ۴ انتخاب:

صدگان دهگان یکان
۵ × ۵ × ۴ = ۱۰۰

۲) با ارقام ۰ تا ۵ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت با این فرض که تکرار ارقام مجاز نیست، به طوری که:

الف) عدد فرد باشد. ب) عدد زوج باشد. ج) عدد مضرب ۵ باشد.

د) بزرگتر از ۳۰۰ باشد. هـ) حداقل شامل یک رقم زوج باشد. و) مضرب ۳ باشد.

پاسخ: الف) رقم یکان می‌تواند ۱ یا ۳ یا ۵ باشد یعنی ۳ انتخاب. هر انتخابی که برای یکان انجام شود، رقم صدگان ۴ انتخاب دارد (صفر مجاز نیست) و رقم دهگان نیز ۴ انتخاب دارد:

صدگان/۴ × دهگان/۴ × یکان/۳ = ۴۸

ب) روش اول: رقم یکان می‌تواند ۰ یا ۲ یا ۴ باشد. ولی اگر یکان صفر باشد یا نباشد در انتخاب صدگان تاثیر می‌گذارد، بنابراین دو حالت بررسی می‌کنیم: اعداد زوجی که یکان آنها صفر است و اعداد زوجی که یکان آنها صفر نیست، طبق این دو حالت جواب برابر ۵۲ = ۳۲ + ۲۰ می‌باشد.

صدگان/۵ × دهگان/۴ × یکان صفر/۱ = ۲۰ صدگان/۴ × دهگان/۴ × یکان ۲ یا ۴/۲ = ۳۲

روش دوم: کل اعداد ۳ رقمی بدون تکرار با توجه به مثال قبل، برابر ۱۰۰ می‌باشد که طبق قسمت الف ۴۸ عدد فرد هستندپس ۵۲ = ۴۸ − ۱۰۰ عدد زوج وجود دارد.

ج) دو حالت بررسی می‌کنیم، طبق این دو حالت جواب ۳۶ = ۱۶ + ۲۰ می‌باشد.

$$۱۶ = \underset{۱}{\underline{\text{یکان ۵}}} \times \underset{۴}{\underline{\text{دهگان}}} \times \underset{۴}{\underline{\text{صدگان}}} \qquad ۲۰ = \underset{۱}{\underline{\text{یکان صفر}}} \times \underset{۴}{\underline{\text{دهگان}}} \times \underset{۵}{\underline{\text{صدگان}}}$$

د) صدگان باید ۳ یا ۴ یا ۵ باشد پس تعداد حالات ۶۰ = ۴ × ۵ × ۳ می‌باشد.

هـ) اعدادی که اصلاً رقم زوج ندارند (شامل ۱، ۳، ۵ هستند) برابر ۶ = ۱ × ۲ × ۳ می‌باشد پس تعداد اعدادی که حداقل یک رقم زوج دارند ۹۴ = ۶ − ۱۰۰ می‌باشد.

و) عددی مضرب ۳ است که مجموع ارقام آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بنابراین تمام ۳ رقم‌هایی که مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است را انتخاب می‌کنیم و با آنها عدد می‌سازیم:

(۱, ۳, ۵), (۱, ۲, ۳), (۲, ۳, ۴), (۳, ۴, ۵)

با هر یک از این دسته‌ها ۶ = !۳ عدد می‌توان ساخت و کلاً ۲۴ = ۶ × ۴ عدد می‌توان ساخت.

۴ دسته دیگر نیز وجود دارد کافیست بجای ۳، صفر قرار دهید:

(۱, ۰, ۵), (۱, ۲, ۰), (۲, ۰, ۴), (۰, ۴, ۵)

با هر یک از این دسته‌ها ۴ = ۱ × ۲ × ۲ عدد می‌توان ساخت پس ۱۶ = ۴ × ۴ عدد می‌توان ساخت بنابراین تعداد کل اعداد مطلوب برابر ۴۰ = ۱۶ + ۲۴ می‌باشد.

۳) با ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره چند چهار ضلعی می‌توان ساخت؟

پاسخ: تعداد چهار ضلعی‌ها یعنی تعداد انتخاب‌های ۴ نقطه از این ۱۰ نقطه و چون ترتیب رئوس این ۴ ضلعی اهمیت ندارد پس:

$$\binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۶!۴!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷}{۴ \times ۳ \times ۲} = ۲۱۰$$

۴) از بین ۴ مرد و ۳ زن می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم. چند طریق وجود دارد اگر:

الف) محدودیتی نباشد. ب) همگی مرد باشند.

ج) حداقل یک مرد باشد. د) مردها بیشتر باشند.

هـ) رئیس گروه مرد باشد. و) شخص a حتماً انتخاب شود.

ز) شخص a انتخاب نشود. (یکی از این ۷ نفر به اسم a است)

پاسخ: الف) از بین ۷ نفر می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم:

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۴!۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۳ \times ۲} = ۳۵$$

ب) باید از بین ۴ مرد ۳ مرد انتخاب کنیم: $\binom{۴}{۳} = ۴$

ج) روش اول:

صفر زن و ۳ مرد + یک زن و ۲ مرد + ۲ زن و یک مرد = حداقل یک مرد

$$=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}=۴\times۳+۶\times۳+۴\times۱=۳۴$$

روش دوم:

همگی زن − کل حالات = حداقل یک مرد $=\binom{۷}{۳}-\binom{۳}{۳}=۳۵-۱=۳۴$

د)

هیچ زن و ۳ مرد + ۱ زن و ۲ مرد = مردها بیشتر $=\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}=۲۲$

هـ) روش اول:

۳ × (هیچ زن و ۳ مرد) + ۲ × (یک زن و ۲ مرد) + ۲ زن و یک مرد = رئیس گروه مرد

$$=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}\times۲+\binom{۴}{۳}\binom{۳}{۰}\times۳=۱۲+۳۶+۱۲=۶۰$$

روش دوم: یک نفر مرد به عنوان رئیس انتخاب می‌کنیم و ۲ نفر باقیمانده را از بین ۶ نفر آدم باقیمانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۲}=۴\times۱۵=۶۰$$

و) شخص a را انتخاب می‌کنیم که یک حالت دارد و ۲ نفر دیگر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$۱\times\binom{۶}{۲}=۱۵$$

ز) شخص a را نادیده می‌گیریم و ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳}=۲۰$$

۵) روابط a تا f فرمول‌های مهمی هستند، هر یک را اثبات کنید.

a) $\binom{n-۱}{k}+\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{n}{k}$ قاعده پاسکال

قاعده واندرموند

b) $\binom{m}{k}\binom{n}{۰}+\binom{m}{k-۱}\binom{n}{۱}+\binom{m}{k-۲}\binom{n}{۲}+\dots+\binom{m}{۰}\binom{n}{k}=\sum_{i=۰}^{k}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{m+n}{k}$

$$c)\ \binom{n}{۰}^۲+\binom{n}{۱}^۲+\binom{n}{۲}^۲+\dots+\binom{n}{n}^۲=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲=\binom{۲n}{n}$$

$$d)\ \binom{n}{n}+\binom{n+۱}{n}+\binom{n+۲}{n}+\dots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+۱}{n+۱}$$

$$e)\ \sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}=n۲^{n-۱}$$

$$f)\ \sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}^۲=n\binom{۲n-۱}{n-۱}$$

پاسخ: a) با روش ترکیباتی (اثبات از طریق شمارش) اثبات می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم از بین n نفر k نفر انتخاب کنیم، تعداد حالات $\binom{n}{k}$ است. حال از طرفی این انتخاب ۲ حالت دارد (یکی از n نفر به اسم a است)

۱- شخص a انتخاب شده است که $\binom{n-۱}{k-۱}$ حالت دارد.

۲- شخص a انتخاب نشده است که $\binom{n-۱}{k}$ حالت دارد. پس: $\binom{n}{k}=\binom{n-۱}{k-۱}+\binom{n-۱}{k}$.

b) می‌خواهیم از بین m مـرد و n زن، k نفـر انتخـاب کنـیم کـه $\binom{m+n}{k}$ حالـت دارد. از طرفـی حالات مختلف عبارتند از:

k زن و هیچ مرد + ... + ۲ زن و $(k-۲)$ مرد + ۱ زن و $(k-۱)$ مرد + هیچ زن و k مرد

$$=\binom{m}{k}\binom{n}{۰}+\binom{m}{k-۱}\binom{n}{۱}+\binom{m}{k-۲}\binom{n}{۲}+\dots+\binom{m}{۰}\binom{n}{k}$$

و اثبات کامل است.

c) کافیست در فرمول b، به جای m و k قرار دهید n و می‌دانیم $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$:

$$\binom{n}{n}\binom{n}{۰}+\binom{n}{n-۱}\binom{n}{۱}+\binom{n}{n-۲}\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{۰}\binom{n}{n}$$

$$=\binom{n}{۰}^۲+\binom{n}{۱}^۲+\dots+\binom{n}{n}^۲=\binom{n+n}{n}=\binom{۲n}{n}$$

d) **روش ۱:** اگر به جای $\binom{n}{n}$ قرار دهید $\binom{n+۱}{n+۱}$ آنگاه می‌توان متوالیاً از قاعده پاسکال استفاده کرد:

$$\binom{n+۱}{n+۱}+\binom{n+۱}{n}=\binom{n+۲}{n+۱}\ ,\ \binom{n+۲}{n+۱}+\binom{n+۲}{n}=\binom{n+۳}{n+۱}$$

$$,\dots,\binom{n+k}{n+۱}+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+۱}{n+۱}$$

روش ۲: تعداد حالاتی که یک رشته $n+k+1$ بیتی شامل $n+1$ یک است برابر $\binom{n+k+1}{n+1}$ می‌باشد. از طرفی آخرین ۱ (یعنی $n+1$امین ۱) می‌تواند در مکان $n+1$ تا $n+k+1$ باشد. پس n مقدار ۱ قبلی در n مکان تا $n+k$ مکان قرار دارند که تعداد حالات $\binom{n}{n}+\dots+\binom{n+k}{n}$ است.

e) فرض کنید می‌خواهیم از بین n نفر، تعداد نامشخصی را انتخاب کنیم ولی یک نفر رئیس باشد. رئیس را به n طریق انتخاب می‌کنیم، $n-1$ نفر باقیمانده هر کدام ۲ حالت دارند: انتخاب شوند یا خیر که 2^{n-1} حالت می‌شود پس کل حالات $n2^{n-1}$ است.

حال به طریق دیگر می‌شماریم، از بین n نفر k نفر را به $\binom{n}{k}$ طریق انتخاب می‌کنیم و از این k نفر به k طریق رئیس انتخاب می‌شود که تعداد حالات $k\binom{n}{k}$ است، و از آنجایی که k می‌تواند ۱ تا n باشد پس کل حالات $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ است که اثبات کامل است.

f) فرض کنید از بین n مرد و n زن می‌خواهیم n نفر انتخاب کنیم به شرطی که رئیس گروه حتماً زن باشد. به دو طریق می‌شماریم:

۱) رئیس را به n طریق می‌توان انتخاب کرد و از بین $2n-1$ نفر باقیمانده به $\binom{2n-1}{n-1}$ طریق می‌توان $n-1$ نفر دیگر را انتخاب کرد که کل حالات $n\binom{2n-1}{n-1}$ می‌باشد.

۲) فرض کنید k نفر زن به $\binom{n}{k}$ طریق و $n-k$ نفر مرد به $\binom{n}{n-k}$ طریق انتخاب شوند و از بین k نفر زن به k طریق رئیس انتخاب می‌شود پس $k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ طریق امکان‌پذیر است و از آنجایی که $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ پس $k\binom{n}{k}^2$ طریق امکان‌پذیر است و چون k می‌تواند ۱ تا n باشد پس کل حالات $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$ می‌باشد.

۶) نشان دهید $\frac{n!}{2^k}$ که $n=2k$ عددی صحیح است.

پاسخ: n شی $(n=2k)$ که دو به دو یکسان هستند را در نظر بگیرید:

$x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_k, x_k$ تعداد جایگشت‌های این n شی برابر $\frac{n!}{2^k} = \frac{n!}{2!2!\dots2!}$ می‌باشد که قطعاً عددی صحیح است (تعداد حالات عددی صحیح است).

۷) می‌خواهیم ۲ کتاب با موضوعات مختلف از بین ۵ کتاب ریاضی، ۳ کتاب کامپیوتر و ۲ کتاب گرافیک انتخاب کنیم، چند حالت وجود دارد؟ (کتاب‌ها همگی متمایزند)

پاسخ: چون گفته شده ۲ کتاب با موضوعات مختلف پس نباید ۲ کتاب را از یک موضوع انتخاب کرد. بنابراین حالات مختلف وجود دارد که عبارتند از:

(یک گرافیک و یک کامپیوتر) + (یک گرافیک و یک ریاضی) + (یک کامپیوتر و یک ریاضی)

$= 5\times3 + 5\times2 + 3\times2 = 31$

۸) با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ چند عدد

الف) ۶ رقمی می‌توان ساخت؟ **ب)** ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

ج) ۴ رقمی می‌توان ساخت؟ د) ۳ رقمی می‌توان ساخت؟

پاسخ: الف) اگر ۶ رقم متمایز می‌بودند جواب !۶ می‌بود ولی ۳ رقم ۲ دارای !۳ جایگشت هستند که حالت جدید ایجاد نمی‌کند. به همین ترتیب ارقام ۱ دارای !۲ جایگشت بی‌تاثیر هستند پس

جواب $\frac{6!}{1!\,3!\,2!} = 60$

ب) ابتدا حالات مختلف ۵ رقمی را از ۶ رقم داده شده انتخاب می‌کنیم و با هر دسته تعداد اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$(1,1,2,2,2) \rightarrow \frac{5!}{2!\,3!} = 10\ ,\ (1,2,2,2,3) \rightarrow \frac{5!}{1!\,3!\,1!} = 20\ ,\ (1,1,2,2,3) \rightarrow \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

بنابراین جواب $60 = 10 + 20 + 30$ می‌باشد.

ج)
$$(1,1,2,2) \rightarrow \frac{4!}{2!\,2!} = 6\ ,\ (1,1,2,3) \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12\ ,\ (1,2,2,2) \rightarrow \frac{4!}{3!} = 4$$

$$(1,2,2,3) \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12\ ,\ (2,2,2,3) \rightarrow \frac{4!}{3!} = 4$$

جواب $= 6 + 12 + 4 + 12 + 4 = 38$

د)
$$(1,1,2) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3\ ,\ (1,1,3) \rightarrow 3\ ,\ (1,2,2) \rightarrow 3$$

$$(1,2,3) \rightarrow 6\ ,\ (2,2,2) \rightarrow 1\ ,\ (2,2,3) \rightarrow 3$$

جواب $= 3 + 3 + 3 + 6 + 1 + 3 = 19$

۹) با ارقام ۲,۲,۲,۱,۱,۰,۰,۰ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

پاسخ: **روش اول:** اعداد مطلوب اعدادی هستند که یا با ۱ شروع شوند یا با ۲:

$$\text{اعدادی که با ۱ شروع می‌شوند} = \frac{۷!}{۳!\,۱!\,۳!} = ۱۴۰ \quad \text{(یک رقم ۱ خانه اول می‌گذاریم)}$$

$$\text{اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند} = \frac{۷!}{۲!\,۲!\,۳!} = ۲۱۰ \quad \text{(یک رقم ۲ خانه اول می‌گذاریم)}$$

$$\text{اعداد مطلوب} = ۱۴۰ + ۲۱۰ = ۳۵۰$$

روش دوم:

$$\text{اعداد مطلوب} = \text{کل حالات} - \text{اعدادی که با صفر شروع می‌شوند}$$

$$= \frac{۸!}{۳!\,۲!\,۳!} - \frac{۷!}{۲!\,۲!\,۳!} = ۵۶۰ - ۲۱۰ = ۳۵۰$$

روش سوم: اگر ارقام را متمایز فرض کنیم کل حالات عبارت است از:

$$\overline{۵} \times \overline{۷} \times \overline{۶} \times \overline{۵} \times \overline{۴} \times \overline{۳} \times \overline{۲} \times \overline{۱} = ۵ \times ۷!$$

(رقم اول نمی‌تواند صفر باشد و ۵ انتخاب دارد)

و چون رقم تکراری وجود دارد پس:

$$\text{اعداد مطلوب} = \frac{۵ \times ۷!}{۳!\,۲!\,۳!} = ۳۵۰$$

روش چهارم: از ارقام داده شده، ۵ رقم غیرصفر و ۳ رقم صفر است پس انتظار داریم از کل اعداد ۸ رقمی $\frac{۵}{۸}$ اعداد با غیرصفر و $\frac{۳}{۸}$ اعداد با صفر شروع شوند پس:

$$\text{اعداد مطلوب} = \frac{۵}{۸} \times \text{کل حالات} = \frac{۵}{۸} \times \frac{۸!}{۳!\,۲!\,۳!} = ۳۵۰$$

۱۰) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر چند تاست؟ $(x_i \geq ۰)$

$$x_۱^۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹$$

پاسخ: در این معادله $x_۱$ می‌تواند ۰ ، ۱ یا ۲ باشد:

$$x_۱ = ۰ \rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹ \Rightarrow \binom{۹+۳-۱}{۳-۱} = ۵۵$$

$$x_۱ = ۱ \rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \Rightarrow \binom{۸+۳-۱}{۳-۱} = ۴۵$$

$$x_1 = 2 \to x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$\text{جواب} = 55 + 45 + 3 = 103$$

۱۱) دستگاه مقابل چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

پاسخ: معادله دوم را در معادله اول جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

تعداد جواب‌های معادله اول $15 = \binom{4+3-1}{3-1}$ و تعداد جواب‌های معادله دوم $4 = \binom{3+2-1}{2-1}$ می‌باشد پس جواب این مسئله $15 \times 4 = 60$ می‌باشد.

۱۲) نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \le 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

پاسخ: روش اول: نامعادله فوق، را می‌توان ۱۱ معادله زیر در نظر گرفت:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ , \ldots , \ x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

تعداد جواب‌های هر یک از این معادلات را می‌یابیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\binom{0+3-1}{3-1} + \binom{1+3-1}{3-1} + \ldots + \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{12}{2}$$

و طبق مسئله ۵ قسمت d حاصل جمع فوق برابر $\binom{13}{3}$ می‌باشد.

روش دوم: اگر متغیر x_4 را اضافه کنیم، نامعادله تبدیل به معادله می‌شود:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

و تعداد جواب‌های این معادله $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ می‌باشد.

۱۳) چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در تقسیم به ۵ باقیمانده ۲ داشته باشد؟

پاسخ: اعدادی که در تقسیم به ۵ باقیماندهٔ ۲ دارند به فرم $x = 5k + 2$ هستند پس $100 \le 5k + 2 \le 999$ (گفته شده ۳ رقمی) حال مقادیر صحیح k را می‌یابیم. طرفین نامساوی را منهای ۲ کرده و به ۵ تقسیم می‌کنیم پس $\frac{98}{5} \le k \le \frac{997}{5}$ در نتیجه $19/\ldots \le k \le 199/\ldots$ پس $20 \le k < 200$ یا $20 \le k \le 199$ که تعداد اعداد صحیح برای k برابر $200 - 20 = 180$ می‌باشد.

۱۴) ۵ نفر قرار است سخنرانی کنند. چند حالت امکان‌پذیر است اگر:

الف) محدودیتی نباشد. ب) شخص B بلافاصله بعد از A سخنرانی کند. ج) شخص B بعد از A سخنرانی کند.

پاسخ: الف) $5!=120$

ب) A و B یک شخص فرض می‌شوند و تعداد حالات $4!=24$ می‌باشد.

ج) در نیمی از حالات A بعد از B و در نیمی از حالات B بعد از A است پس جواب $60=\frac{5!}{2}$

۱۵) ۴ پسر و ۳ دختر می‌خواهند در یک ردیف که شامل ۷ صندلی است بنشینند. چند طریق امکان‌پذیر است اگر:

الف) محدودیتی نباشد. ب) پسرها کنار هم باشند. ج) دخترها کنار هم باشند. د) هم پسرها کنار هم و هم دخترها کنار هم باشند. هـ) یک در میان بنشینند. و) دو شخص a و b کنار هم نباشند. ز) هیچ یک از دخترها کنار هم نباشند.

پاسخ: الف) ۷ شی متمایز دارای $7!$ جایگشت هستند.

ب) پسرها را یک شی در نظر می‌گیریم. این دسته پسر با ۳ دختر، جمعاً ۴ شی هستند که دارای $4!$ جایگشت هستند. به ازای هر جایگشت، پسرها با خودشان $4!$ جایگشت دارند بنابراین تعداد حالات $4!\times 4!$ می‌باشد و

ج) مشابه قسمت ب جواب $5!\times 3!$ می‌باشد.

د) $p_1p_2p_3p_4$ $d_1d_2d_3$ پسرها با هم $4!$، دخترها با هم $3!$ و دستهٔ پسرها با دخترها $2!$ جابجایی دارند. پس جواب $3!\times 4!\times 2!$ است.

هـ) صندلی اول حتماً باید پسر باشد چون تعداد پسرها بیشتر است: $P_1\ d_1\ P_2\ d_2\ P_3\ d_3\ P_4$
پسرها با هم جابجا می‌شوند به $4!$ حالت و دخترها نیز به $3!$ حالت پس جواب این قسمت $4!\times 3!$ می‌باشد.

و) روش اول:

حالاتی که a و b کنار هم هستند − کل حالات = تعداد حالات مطلوب

$$=7!-6!\times 2!=6!(7-2)=5\times 6!$$

روش دوم: a و b را نادیده می‌گیریم، تعداد جایگشت‌های ۵ نفر دیگر $5!$ می‌باشد. ۵ نفر هر حالتی که قرار بگیرند، بین آنها ۶ فضای خالی است که باید ۲ فضا انتخاب کنیم $\left(\binom{6}{2}\right)$ و در آن ۲ فضا a و b را قرار دهیم و چون a و b جابجایی دارند در $2!$ ضرب کنیم:

$$\downarrow c\downarrow d\downarrow e\downarrow f\downarrow g\downarrow \qquad 5!\times\binom{6}{2}\times 2!=5!\times 6\times 5=6!\times 5$$

ز) این قسمت را نمی‌توان مشابه روش اول قسمت قبل حل کرد و باید از روش دوم استفاده کنیم. دخترها را نادیده می‌گیریم، جایگشت پسرها $4!$ می‌باشد. ۵ فضای خالی وجود دارد که به $\binom{5}{3}$ حالت باید ۳ فضا انتخاب کرد و ۳ دختر به $3!$ جایگشت را در آن فضاها قرار داد:

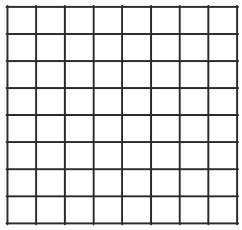
$$\downarrow p_1\downarrow p_2\downarrow p_3\downarrow p_4\downarrow \qquad 4!\times\binom{5}{3}\times 3!$$

۱۶) ۳ پسر و ۳ دختر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف یک در میان بنشینند؟

پاسخ: مشابه قسمت (هـ) مثال قبل؛ ولی حاصل باید در ۲ ضرب شود زیرا صندلی اول می‌تواند دختر یا پسر باشد: $2\times 3!\times 3!$

۱۷) تعداد مربع‌ها و مستطیل‌های صفحه شطرنج (8×8) چند تاست؟

پاسخ: به طور کلی در یک صفحه $n\times n$ تعداد مربع‌ها به شکل زیر محاسبه می‌شود.



تعداد مربع‌های ۱×۱ $= n^2$

تعداد مربع‌های ۲×۲ $= (n-1)^2$

تعداد مربع‌های ۳×۳ $= (n-2)^2$

$\vdots$

تعداد مربع‌های $n\times n$ $= 1^2$

تعداد مربع‌های صفحه $n\times n$ $= 1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

تعداد مربع‌های صفحه 8×8 $= \dfrac{8(8+1)(16+1)}{6} = 204$

برای شمارش تعداد مستطیل‌ها می‌گوییم از برخورد هر دو خط افقی با دو خط عمودی یک مستطیل بوجود می‌آید ۹ خط افقی و ۹ خط عمودی وجود دارد:

تعداد مستطیل‌های صفحه شطرنج $= \binom{9}{2}\times\binom{9}{2}$

نتیجه: تعداد مستطیل‌های صفحه $n\times m$ برابر $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$ می‌باشد.

۱۸) در بسط $(a+x)^5(a+\sqrt{ax}+x)^2$ ضریب a^3x^4 چند است؟

پاسخ:

$$(a+x)^5(a+x+\sqrt{ax})^2 = (a+x)^5\left[(a+x)^2+2\sqrt{ax}\,(a+x)+ax\right]$$

$$= (a+x)^7+2\sqrt{ax}\,(a+x)^6+ax(a+x)^5 \Rightarrow \text{جواب} = \frac{7!}{3!4!}+0+\frac{5!}{2!3!}$$

۱۹) تعداد جملات $(x+y+z)^{10}(w+x+y+z)^2$ چند تاست؟

پاسخ:

$$(x+y+z)^{10}\left[(x+y+z)^2+2w(x+y+z)+w^2\right]$$

$$= (x+y+z)^{12}+2w(x+y+z)^{11}+w^2(x+y+z)^{10}$$

$$\text{جواب} = \binom{12+3-1}{3-1}+\binom{11+3-1}{3-1}+\binom{10+3-1}{3-1}$$

۲۰) معلم ورزش یک دبیرستان می‌خواهد از ۳۶ دانش‌آموز سال اول دبیرستان چهار تیم متفاوت والیبال ۹ نفره تشکیل دهد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

پاسخ: اگر این تیم‌ها را A و B و C و D بنامیم، برای تشکیل تیم A معلم می‌تواند ۹ نفر از ۳۶ نفر را به $\binom{۳۶}{۹}$ طریق انتخاب کند. برای انتخاب ۹ نفر برای تیم‌های B و C و D به ترتیب $\binom{۲۷}{۹}$ و $\binom{۱۸}{۹}$ و $\binom{۹}{۹}$ طریق برای انتخاب وجود دارد. پس:

$$\text{جواب}=\binom{۳۶}{۹}\binom{۲۷}{۹}\binom{۱۸}{۹}\binom{۹}{۹}=\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$$

۲۱) در چه تعداد از آرایش‌های حروف کلمه TALLAHASSEE، A ها کنار هم نیستند؟

پاسخ: با کنار گذاشتن A ها، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!۱!۱!}=۵۰۴۰$$

یکی از آرایش‌های بدون A عبارت است از:

$$\uparrow E\uparrow E\uparrow S\uparrow T\uparrow L\uparrow L\uparrow S\uparrow H\uparrow$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، ۹ فضای خالی وجود دارد که باید ۳ تای آن را انتخاب کرد و در آن A گذاشت که این عمل به $\binom{۹}{۳}=۸۴$ طریق قابل انجام است پس:

$$\text{جواب}=۵۰۴۰\times ۸۴=۴۲۳۳۶۰$$

۲۲) به چند طریق می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را بین چهار کودک توزیع کرد به طوری که به هر کودک حداقل یک سیب برسد؟

پاسخ: به هر کودک یک سیب می‌دهیم، ۳ سیب باقیمانده به $\binom{۳+۴-۱}{۴-۱}=۲۰$ طریق تقسیم می‌شود. شش پرتقال نیز به $\binom{۶+۴-۱}{۴-۱}=۸۴$ طریق تقسیم می‌شود و طبق اصل ضرب:

$$\text{جواب}=۲۰\times ۸۴=۱۶۸۰$$

۲۳) یک کمیته ۶ نفری متشکل از A و B و C و D و E و F را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از بین آنها رئیس، منشی و خزانه‌دار انتخاب کنیم.

الف) به چند حالت می‌توان انجام داد؟

ب) اگر بخواهیم A یا B رئیس باشند چند حالت وجود دارد؟

ج) اگر بخواهیم C یکی از پست‌ها را اشغال کند چند حالت وجود دارد؟

د) اگر بخواهیم A و B حتماً پست داشته باشند چند حالت وجود دارد؟

هـ) چند حالت وجود دارد که A پست می‌گیرد و B پست نمی‌گیرد.

پاسخ:

الف) $6\times5\times4=120$

ب) $\text{رئیس } A + \text{رئیس } B = 5\times4+5\times4=40$

ج) $\text{رئیس } C + \text{منشی } C + \text{خزانه‌دار } C = 20+20+20=60$

می‌توان قسمت ج را اینگونه نیز بیان کرد که شخص C ، ۳ حالت دارد و بقیه بـه ترتیـب ۵ و ۴ حالت پس: $3\times5\times4=60$

د) $\underset{A}{3}\times\underset{B}{2}\times\underset{\text{بقیه}}{4}=24$

هـ) $\underset{A}{3}\times\underset{\text{بقیه}}{4}\times\underset{\text{بقیه}}{3}=36$

۲۴) به چند حالت می‌توان از بین 2n شی متمایز، n جفت تشکیل داد؟

پاسخ: شی اول، $2n-1$ انتخاب دارد که با یک شی دیگر جفت شـود. بـه ایـن ترتیـب ۲ شـی کـم می‌شود، شی دیگر، $2n-3$ انتخاب دارد و به همین ترتیب:

$$(2n-1)(2n-3)\dots3\times1=\frac{(2n)!}{2^n\times n!}$$

۲۵) چند رشته باینری به طول n وجود دارد که دقیقاً k صفر دارد و هیچ دو صفری کنار هم نیستند.

پاسخ: k تا صفر پس $n-k$ تا یک وجود دارد که بین آنهـا $n-k+1$ مکـان هسـت کـه بایـد k مکان انتخاب شود و صفر قرار دهیم: $\binom{n-k+1}{k}$

۲۶) چند رشته باینری به طول $n\geq4$ وجود دارد که شامل دقیقاً ۲ نمونه ۱۰ باشد؟ مـثلاً بـه ازای $n=4$ فقط یک رشته ۱۰۱۰ وجود دارد. یا به ازای $n=5$، ۶ رشته وجود دارد:

۱۰۱۰۱, ۱۰۱۰۰, ۱۰۱۱۰, ۱۰۰۱۰, ۱۱۰۱۰, ۰۱۰۱۰

پاسخ: $\underset{\text{مکان ۳}}{\boxed{}}\,10\,\underset{\text{مکان ۲}}{\boxed{}}\,10\,\underset{\text{مکان ۱}}{\boxed{}}$ $n-4$ بیت را باید در مکان‌هـای ۱ و ۲ و ۳ قـرار دهـیم. در هـر مکان هر تعداد صفر و یک که قرار داده شود ابتدا باید صفرها و سپس یک‌ها چیده شوند، پس فقط تعداد صفر و یک در هر مکان حالت‌های متفاوت ایجاد مـی‌کنـد. اگـر x_i و y_i بـه ترتیـب تعـداد صفرها و یک‌های مکان i $(i=1,2,3)$ باشد آنگاه:

$$x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=n-4\Rightarrow\binom{n-4+6-1}{6-1}=\binom{n+1}{5}$$

۲۷) قطعه برنامه زیر چند بار write را اجرا می‌کند؟

```
for(i = 1 to 20)
   for (j = 1 to i)
      for(k = 1 to j)
         write(*)
```

پاسخ: هر اجرای write متناظر با ۳ تایی (i,j,k) است که $۱ \le k \le j \le i \le ۲۰$ پس $۱ \le k < j+۱ < i+۲ \le ۲۲$ که جواب $\binom{۲۲}{۳}$ است.

۲۸) ۱۰ نفر کنار هم نشسته‌اند به چند حالت می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد طوری که افراد کنار هم انتخاب نشوند؟

پاسخ: افراد را شماره ۱ تا ۱۰ دهید. شماره ۳ نفری که انتخاب می‌شوند $۱ \le a < b < c \le ۱۰$ است ولی اختلاف a و b و c حداقل ۲ است پس $۱ \le a < b-۱ < c-۲ \le ۸$ که جواب $\binom{۸}{۳}$ است.

۲۹) در مستطیل ۴×۳، چند حالت از A به B می‌توان رسید اگر حرکت $\rightarrow \uparrow \nearrow$ مجاز باشد؟

پاسخ: حالات مختلف وجود دارد: ۱- حرکت قطری وجود ندارد مثل RRRRUUU که $\frac{۷!}{۴!۳!} = ۳۵$ حالت هست ۲- یک حرکت قطری (D) وجود دارد مثل DRRRUU که $\frac{۶!}{۱!۳!۲!} = ۶۰$ حالت هست. ۳- دو حرکت قطری وجود دارد مثل DDRRU که $\frac{۵!}{۲!۲!۱!} = ۳۰$ حالت هست.

۴- سه حرکت قطری وجود دارد مثل DDDR که $\frac{۴!}{۳!۱!}$ حالت هست پس

$۱۲۹ = ۴ + ۳۰ + ۶۰ + ۳۵ =$ جواب

۳۰) به چند حالت می‌توان ۱۰ جایزه متفاوت را بین ۴ نفر تقسیم کرد طوریکه دقیقاً به ۲ نفر جایزه‌ای داده نشود؟

پاسخ: $۶۱۳۲ = (۲^{۱۰} - ۲)\binom{۴}{۲}$ (۲ نفر را انتخاب کنید و ۱۰ جایزه را بین ۲ نفر دیگر به $۲^{۱۰}$ حالت توزیع کنید فقط ۲ حالتی که همه جوایز به یک نفر داده شود قبول نیست).

۳۱) به چند حالت می‌توان عدد n را به صورت جمع اعداد طبیعی کمتر مساوی n نوشت؟ چند تا از این حالات، متقارن هستند؟

پاسخ: مثلاً عدد ۴ را به ۸ صورت می‌توان نوشت:

$۴\ ,\ ۲+۲\ ,\ ۱+۱+۱+۱\ ,\ ۱+۲+۱\ ,\ ۳+۱\ ,\ ۱+۳\ ,\ ۲+۱+۱\ ,\ ۱+۱+۲$

که ۴ تای اول آن متقارن است. ثابت کنید که $۲^{n-۱}$ حالت می‌توان n را نوشت که تعداد $۲^{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor}$ آنها متقارن هستند.

[سؤال‌های طبقه‌بندی شده‌ی فصل دوم]

۱- چند عدد چهار رقمی می‌توان به وسیله ارقام ۰ تا ۹ ایجاد نمود، به شرط این که آخرین رقم (کوچکترین رقم) صفر باشد و تکرار رقم مجاز نباشد؟ (آزاد ۸۲)

۱) ۵۶۰ ۲) ۱۰۰۸ ۳) ۵۰۴ ۴) ۷۲۹

۲- چهار کتاب مختلف ریاضیات، شش کتاب مختلف فیزیک و دو کتاب مختلف شیمی قرار است که در کتابخانه‌ای گذاشته شوند، اگر کتاب‌های ریاضی باید در کنار یکدیگر گذاشته شوند، چند راه مختلف برای چیدن کتاب‌ها وجود دارد؟ (آزاد ۸۲)

۱) $۹!\times۴!$ ۲) $۴!\times۶!\times۲!\times۳!$ ۳) $\frac{(۹!)^۲}{۴!\times۳!}$ ۴) $۹!\times۴!\times۲!\times۶!$

۳- عبارت $a-b*c+d-e/g/h$ با فرض اعمال اولویت عملگرها را به چند طریق می‌توان به درستی «پرانتزگذاری» کرد به طوری که مقدار عبارت حاصل به ازای همه مقادیر a تا h با مقدار اصلی برابر شود؟ فرض بر آن است که دور یک متغیر تنها در عبارت پرانتز گذاشته نمی‌شود. یک عبارت پرانتزگذاری شده باید صفر یا تعداد زوجی پرانتز داشته باشد. مثلاً $((a+b)+c)$ و $a+(b+c)$ و $a+b+c$ سه عبارت پرانتزگذاری شده درست برای $a+b+c$ است ولی $(a)+b+c$ درست نیست. (*IT* ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) ۱۲۸

۴- می‌خواهیم جدولی ۵×۵ از حروف انگلیسی به جز حرف A به صورت زیر ایجاد کنیم. ابتدا یک کلمه معنادار یا بی‌معنا را که حروف تکراری در آن وجود ندارد از چپ به راست با شروع از ردیف اول این جدول می‌نویسیم (در صورتی که کلمه طولانی باشد ممکن است در چند ردیف جدول نوشته شود). سپس، حروف باقیمانده را به ترتیب الفبای انگلیسی در خانه‌های جدول قرار می‌دهیم. تعداد جدول‌های ممکن را بیابید.

(IT دولتی ۸۶)

۱) $۲۵!$ ۲) $\sum_{i=۱}^{۲۵}\binom{۲۵}{i}$ ۳) $۲۴\times۲۵!$ ۴) $\sum_{i=۱}^{۲۶}\binom{۲۶}{i}$

۵- در فضای ۳ بعدی اقلیدسی، چند مسیر متمایز از $(۱,۰,۵)$ به $(۸,۱,۷)$ وجود دارد که هر حرکت یکی از انواع زیر باشد؟ (آزاد ۹۰-*IT*)

$(A):(x,y,z)\to(x+۱,y,z)$

$(B):(x,y,z)\to(x,y+۱,z)$

$(C):(x,y,z)\to(x,y,z+۱)$

۱) $۱۰!$ ۲) ۳۶۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۶- به چند طریق ۶ پسر و ۶ دختر می‌توانند دور یک میز دایره شکل با ۱۲ صندلی بنشینند؛ به طوری که یک در میان پسر و دختر نشسته باشند؟ (فرض بر این است که صندلی‌ها یکسانند و فقط موقعیت افراد نسبت به هم اهمیت دارد) (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) $(۶!)^۲$ ۲) $۶!۵!$ ۳) $\frac{۱۲!}{(۶!)^۲}$ ۴) $\frac{۱۲!}{۶!}$

۷- اعضای یک خانواده ۶ نفره، متشکل از پدر و مادر، دو پسر و دو دختر به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند به طوری که دو پسر در دو طرف مادرشان قرار گیرند؟ (علوم کامپیوتر ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۱۲۵

۸- در مجموعه الفبای انگلیسی (۲۶ حرف) تعداد کلمات ۶ حرفی که ۴ حرف آنها بی‌صدا و ۲ حرف صدادار است (تعداد حروف صدادار ۵ تا می‌باشد) برابر است با: (حروف نمی‌توانند تکراری باشند). (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $۶! \times ۵^۲ \times ۲^۴$ ۲) $۶!\binom{۲۱}{۴}\binom{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۶!}{۴!۲!}\binom{۲۱}{۴}\binom{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۶!}{۴!۲!}\binom{۲۱}{۲}\binom{۵}{۴}$

۹- به چند طریق می‌توان از یک سکه ۱ ریالی، یک سکه ۲ ریالی، یک سکه ۵ ریالی، یک سکه ۱۰ ریالی و ۴ سکه ۲۰ ریالی، ۴ سکه انتخاب نمود؟ (علوم کامپیوتر ۸۸)

۱) $\binom{۸}{۴}$ ۲) $\frac{۸!}{۴!}$ ۳) $۲^۵$ ۴) $۲^۴$

۱۰- تعداد چهارتایی‌های مرتب (x,y,z,t) که در رابطه $-۱ < x < y \le z \le t \le ۹$ صدق می‌کنند چیست؟ (آزاد ۹۰ – علوم کامپیوتر)

۱) ۴۹۵ ۲) ۴۳۰ ۳) ۷۹۵ ۴) ۷۳۰

۱۱- مجموعه‌ای داریم از پنج کتاب متمایز کامپیوتر، سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز هنر، به چند صورت می‌توانیم این کتاب‌ها را در یک قفسه قرار دهیم طوری که دو کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار نگیرند؟ (آزاد ۸۶- مهندسی کامپیوتر)

۱) $۹!$ ۲) $۸!۲!$ ۳) $۱۰!-۹!۲!$ ۴) $۱۰!-۸!۲!$

۱۲- به چند طریق ۵ نفر مالزیایی متمایز و هشت نفر ژاپنی متمایز می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به شرطی که هیچ دو مالزیایی در کنار یکدیگر ننشینند؟ (آزاد ۸۶- *IT*)

۱) $۸! \times \frac{۸!}{۳!}$ ۲) $۷! \times \frac{۸!}{۳!}$ ۳) $۷! \times \frac{۸!}{۵!۳!}$ ۴) $۸! \times \frac{۸!}{۵!۳!}$

۱۳- فرض کنید ۱۰ نفر در مسابقه دو شرکت می‌کنند و به ۳ نفر جایزه داده می‌شود. به چند طریق می‌توان جوایز را اعطا کرد؟ (آزاد ۷۸)

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۷۲۰

۱۴- فرض کنید ۱۰ نفر در مسابقه دو شرکت می‌کنند و به ۳ نفر جایزه داده می‌شود. دو شرکت‌کننده در این مسابقه را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان جوایز را اعطا کرد، مشروط بر این که این دو دونده جزو سه نفر نخست باشند؟ (آزاد ۷۸ و ۸۰)

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۱۵- به چند طریق می‌توان ۱۲ کتاب را در یک قفسه چید به طوری که ۵ جلد کتاب مشخص هیچ کدام مجاور یکدیگر قرار نگیرند؟ (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) ۴۲ ۲) ۲۱ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

۱۶- در ۱۰ مسابقه فوتبال تعداد حالاتی که ۶ برد، ۲ تساوی و ۲ باخت اتفاق بیافتد برابر است با (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) ۶۳۰ ۲) ۲۵۲۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۶۰

۱۷- به ازای عدد صحیح و مثبت n، تعداد چهارتایی‌های (a,b,c,d) از اعداد صحیح را بیابید به طوری که $۰ \le a \le b \le c \le d \le n$. (*IT* دولتی ۸۵)

۱) $\binom{n}{۴}$ ۲) $۴\binom{n}{۴}$ ۳) $\binom{n+۴}{۴}$ ۴) $۲\binom{n+۱}{۴}$

۱۸- تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعه $A=\{۱,۲,...,۳۰\}$ را که در آنها هیچ دو عنصری با اختلاف کمتر از ۳ وجود ندارند، برابر با کدام است؟ (IT ۸۸)

۱) $\binom{۲۷}{۵}$ ۲) $\binom{۲۲}{۵}$ ۳) $\binom{۲۷}{۱۵}$ ۴) $\binom{۲۲}{۱۵}$

۱۹- یک گل فروش ۶ نوع گل، از هر نوع ۷ شاخه در دست دارد. به چند طریق می‌توان ۶ شاخه گل از او خرید؟ (علوم کامپیوتر ۸۸)

۱) $\binom{۱۱}{۶}$ ۲) $\binom{۱۲}{۵}$ ۳) $\binom{۱۲}{۶}$ ۴) $\binom{۴۲}{۶}$

۲۰- ده دانش‌آموز می‌خواهند روی ۱۵ صندلی در یک ردیف بنشینند. آنها به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که هیچ دو صندلی مجاور خالی نماند؟ (مهندسی کامپیوتر ۹۰)

۱) $۲۵۲ \times ۱۰!$ ۲) $۳۰۰۳ \times ۱۵!$ ۳) $۴۶۲ \times ۱۱!$ ۴) $۴۶۲ \times ۱۰!$

۲۱- تعداد سه تایی‌های مرتب (x,y,z) موجود در مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۸\}^۳$ با خاصیت $\max\{x,y\}<z$ کدام گزینه است؟ (IT ۹۰)

۱) ۵۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۲۰

۲۲- چند عدد صحیح چهاررقمی وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و ترتیب ارقام آن افزایشی (مانند ۱۳۴۷ و ۶۷۸۹) یا کاهشی (مانند ۶۴۲۱ و ۸۷۶۵) می‌باشد؟

(آزاد ۹۰- مهندسی کامپیوتر)

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۶۵۴ ۳) ۳۴۳ ۴) ۵۴۶

۲۳- می‌خواهیم ۱۰۰ دوچرخه نامتمایز را در چهار انباره متمایز ذخیره کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (آزاد ۹۰- مهندسی کامپیوتر)

۱) $\frac{۱۰۳!}{۱۰۰!۳!}$ ۲) $۴^{۱۰۰}$ ۳) $۱۰۰^۴$ ۴) $\frac{۱۰۴!}{۱۰۰!۴!}$

۲۴- به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ مشابه (غیرمتمایز) را در ۱۲ جعبه قرار داد به طوری که هر جعبه بتواند حداکثر ۱۰ توپ را در خود جای دهد؟ (IT آزاد ۸۶)

۱) $\frac{۲۲!}{۱۰!۱۲!}$ ۲) $۱۰^{۱۲}$ ۳) $\frac{۲۱!}{۱۰!۱۱!}$ ۴) $۱۲^{۱۰}$

۲۵- تعداد اعدادی از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰۰۰\}$ را به دست آورید که مجموع ارقام آنها برابر ۷ باشد. (علوم کامپیوتر ۸۰)

۱) ۴۶۲ ۲) ۳۳۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۳۰۰

۲۶- چند عدد ۴ رقمی وجود دارد به طوری که مجموع ارقام آن برابر ۹ شود؟ (علوم کامپیوتر ۸۵)

۱) $\binom{۱۲}{۳}$ ۲) $\binom{۱۱}{۳}$ ۳) $\binom{۱۳}{۴}$ ۴) $\binom{۱۲}{۴}$

۲۷- تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله $x_۱+x_۲+...+x_۶<۱۵$ کدام است؟ (IT دولتی ۸۵)

۱) $\binom{۱۴}{۷}$ ۲) $\binom{۲۰}{۵}$ ۳) $\binom{۱۴}{۶}$ ۴) $\binom{۲۰}{۶}$

۲۸- به چند طریق می‌توان ۲۱ مهره غیرهمانند را در سه جعبه غیرهمانند توزیع کرد به طوری که در جعبه اول تعداد زوجی از مهره‌ها و در جعبهٔ دوم تعداد فردی از مهره‌ها قرار گیرند؟

(IT دولتی ۸۴)

۱) $\frac{۱}{۴}(۳^{۲۱}+۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(۳^{۲۱}+۱)$ ۳) $\frac{۱}{۴}(۳^{۲۱}-۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(۳^{۲۱}-۱)$

۲۹- مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,100\}$ **مفروض است.** (سراسری ۷۶)

a) به چند طریق مختلف می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود؛ به طوری که مجموع آنها عددی زوج باشد؟

b) به چند طریق مختلف می‌توان دو عدد صحیح از مجموعه A انتخاب نمود؛ به طوری که مجموع آنها عددی فرد باشد؟

۱) a) ۲۵۰۰، b) ۲۵۰۰
۲) a) ۲۵۰۰، b) ۲۴۵۰
۳) a) ۲۴۵۰، b) ۲۴۵۰
۴) a) ۲۴۵۰، b) ۲۵۰۰

۳۰- ضریب a^3bc **در عبارت** $(2a+b+5c)^5$ **برابر است با:** (علوم کامپیوتر ۸۴)

۱) ۴۰
۲) ۸۰
۳) ۴۰۰
۴) ۸۰۰

۳۱- مطلوبست تعیین ضریب جمله xyz^2 **در عبارت** $(w+x+y+z)^4$

(آزاد ۹۰- مهندسی کامپیوتر)

۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۶
۴) ۴۸

۳۲- ضریب x^n **در معادله** $(1+x)^{2n}$ **برابر است با:** (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}^2$
۲) $2\binom{2n-1}{n-1}$
۳) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$
۴) $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{n-k}$

۳۳- ضریب x^8 **در عبارت** $x^2(2x^{-1}-x^2)^6$ **کدام است؟** (علوم کامپیوتر ۸۷)

۱) ۱۵-
۲) ۱۵
۳) ۶۰-
۴) ۶۰

۳۴- مجموع تمام ضرایب در بسط عبارت $(3x-3y+2z+5w)^4$ **کدام است؟**

(علوم کامپیوتر ۸۸)

۱) 0
۲) 7^4
۳) 2^4+5^4
۴) $3^4+(-3)^4+2^4+5^4$

۳۵- حاصل عبارت $\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}2^i$ **کدام است؟** (آزاد ۹۰ – علوم کامپیوتر)

۱) 2^n+2
۲) 3^n+1
۳) 4^n
۴) 5^n-1

۳۶- فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. مقدار عبارت $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\binom{n}{i}$ برابر است با:

(علوم کامپیوتر ۸۴)

۱) $2^{n+1}-1$ ۲) 3^n ۳) $2^{n+1}+1$ ۴) 4^n-3^n+2

۳۷- سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا چهارمین شیر در دهمین پرتاب ظاهر گردد. در این صورت تعداد حالات ممکن برای این منظور چیست؟ (آزاد ۹۰- علوم کامپیوتر)

۱) $\binom{10}{4}$ ۲) $\binom{9}{3}$

۳) $\binom{10}{4}-\binom{9}{3}+\binom{8}{2}-7$ ۴) $\binom{8}{2}$

۳۸- سه کیسه داریم شامل توپ‌های غیرقابل تمایز قرمز، آبی و سبز (توپ‌های هم‌رنگ قابل تمایز نیستند) و هر کیسه شامل حداقل ۱۰ توپ به یکی از ۳ رنگ می‌باشد. به چند طریق می‌توان ۱۰ توپ انتخاب کرد طوریکه دقیقاً یک توپ قرمز انتخاب شود؟ (آزاد ۸۹- *IT*)

۱) ۵۵ ۲) 2^9 ۳) ۱۰ ۴) ۶۶

۳۹- در کدام یک از n ضلعی‌های منتظم، تعداد قطرها ۳ برابر تعداد اضلاع است؟

(علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) شش ضلعی ۲) هفت ضلعی ۳) هشت ضلعی ۴) نه ضلعی

۴۰- تعداد ماتریس‌های 5×6 با درایه‌های صفر و یک که هر سطر آن شامل تعداد زوج درایه یک است، چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ۸۵)

۱) 2^{29} ۲) 2^{28} ۳) 2^{25} ۴) 2^{24}

۴۱- از مجموعه $\{1,2,3,\ldots,29\}$ به چند طریق می‌توان ۳ عدد انتخاب نمود که مجموعشان بر ۳ تقسیم‌پذیر باشد؟ (علوم کامپیوتر ۸۶)

۱) ۱۲۲۱ ۲) ۱۲۲۲ ۳) ۱۲۲۳ ۴) ۱۲۲۴

۴۲- تعداد دنباله‌های ۴ رقمی که می‌توان با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ساخت بطوریکه حاوی تعداد فردی ۱ باشد برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۹)

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۵۶

۴۳- تعداد سه تایی‌های مرتب (x,y,z) موجود در مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۸\}^۳$ با خاصیت $\max\{x,y\}<z$ کدام گزینه است؟ **(۹۰ – IT)**

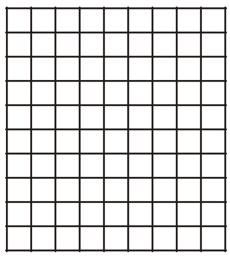
۱) ۵۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۲۰

۴۴- معادله زیر در مجموعه اعداد فرد طبیعی چند جواب دارد؟ **(مهندسی کامپیوتر – ۹۱)**

$$x_۱+x_۲+...+x_k=n \quad , \quad k\overset{۲}{\equiv}n$$

۱) $\binom{\frac{n-k}{۲}-۱}{k-۱}$ ۲) $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ ۳) $\binom{\frac{n+k}{۲}-۱}{k-۱}$ ۴) $\binom{\frac{n+k}{۲}+k-۱}{k-۱}$

۴۵- یک مستطیل ۹×۱۰ مطابق شکل زیر داریم. تعداد مربع‌های ۴×۴ در آن، کدام است؟ **(علوم کامپیوتر – ۹۱)**



۱) ۳۰
۲) ۳۶
۳) ۴۲
۴) ۴۸

۴۶- موجودی یک مغازهٔ میوه فروشی شامل ۵ نوع میوه به شرح زیر است: از هر یک از میوه‌های سیب و پرتقال به تعداد دلخواه موجود است. اما تعداد میوه‌های موز، انبه و آناناس محدود و به ترتیب برابر ۲۰، ۴ و ۱ می‌باشد. کیسه‌ای را که در اختیار داریم قرار است با ۵۰ میوه پر کنیم با این شرط که تعداد سیب‌ها، پرتقال‌ها و موزهای داخل کیسه به ترتیب، مضرب‌هایی از ۲، ۵ و ۱۰ باشد. انجام این کار به چند طریق ممکن است؟ **(علوم کامپیوتر – ۹۱)**

۱) ۶۰ ۲) ۹۲ ۳) ۱۲۳ ۴) ۱۴۴

۴۷- چه تعداد ۵ تایی مرتب (a,b,c,d,e) از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که $۱\le a\le b\le c-۱\le d-۲\le e\le ۹$؟ **(علوم کامپیوتر – ۹۱)**

۱) $\binom{۹}{۵}$ ۲) $\binom{۱۱}{۵}$ ۳) $\binom{۱۳}{۵}$ ۴) $\binom{۱۵}{۵}$

۴۸- به چند طریق می‌توان ۸ رخ متمایز با شماره‌های ۱ تا ۸ را درون یک صفحه‌ی شطرنج ۸×۸ که خانه‌های آن از ۱ تا ۶۴ شماره‌گذاری شده‌اند چید طوری که هیچ دو رخی

یکدیگر را تهدید نکنند. (دو رخ یکدیگر را تهدید می‌کنند، اگر در یک سطر یا در یک ستون قرار گرفته باشند) (مهندسی کامپیوتر - ۹۲)

۱) 8^8 ۲) $8!$ ۳) $2\times 8!$ ۴) $(8!)^2$

۴۹- به چند طریق می‌توان از $(0,0)$ به (۱۸ و ۲۹) رسید بطوریکه کمترین گام‌ها را برداریم و گام‌ها در جهت (۲و۱) یا (۱و۳) باشند؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) $\binom{12}{6}$ ۲) $\binom{12}{5}$ ۳) $\binom{13}{5}$ ۴) $\binom{13}{6}$

۵۰- کلیهٔ اعداد ۳ رقمی با رقم‌های متمایز انتخاب شده از مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5\}$ را با هم جمع می‌کنیم. حاصل جمع کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۲)

۱) ۱۳۳۲۰ ۲) ۱۹۹۸۰ ۳) ۱۳۹۸۶ ۴) ۱۹۹۸۶۰

۵۱- چند عدد صحیح ۴ رقمی وجود دارد که در آنها هر رقم از ارقام سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد؟

(مهندسی کامپیوتر – ۹۳)

۱) ۷۱۴ ۲) ۷۱۵ ۳) ۴۹۵ ۴) ۴۹۴

۵۲- ضریب x^{10} در بسط دو جمله‌ای $(x+\frac{1}{x})^{100}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر – ۹۳)

۱) $\binom{100}{10}$ ۲) $\binom{100}{15}$ ۳) $\binom{100}{35}$ ۴) $\binom{100}{55}$

۵۳- یک مهره در صفحه شطرنج 8×4 در هر گام ۱ خانه به سمت راست یا ۱ خانه به سمت بالا می‌رود. تعداد راه‌های رسیدن از خانه سمت چپ پایین به خانه سمت راست بالا به طوری که هیچ دو گام متوالی رو به بالا طی نشوند، چند تاست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) ۵۶ ۲) ۷۰ ۳) ۱۲۶ ۴) ۳۶۰

۵۴- تعداد راه‌های توزیع ۱۱ توپ یکسان در ۳ جعبه یکسان به طوری که در هر جعبه حداقل ۲ توپ قرار گیرد، چندتاست؟ (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) ۴۵ ۲) ۲۱ ۳) ۱۵ ۴) ۵

۵۵- دو نهال چنار، دو نهال سرو و دو نهال سپیدار را به چند طریق می‌توان به نحو متقارن، گرداگرد یک میدان کاشت؟ (در اینجا، نهال‌های همنوع یکسان هستند و وضعیت نسبی نهال‌ها مورد نظر است.) (علوم کامپیوتر – ۹۴)

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۵۶- در چند جایگشت از حروف a و b و c و d و e دو حرف a و b مجاور نیستند؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

۵۷- کدام‌یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) $\binom{20}{10}=\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}^2$ ۲) $10\binom{100}{9}=100\binom{99}{8}$

۳) $\binom{10}{4}=\binom{9}{3}+\binom{9}{4}$ ۴) $\binom{30}{5}=\sum_{k=0}^{5}\binom{20}{5-k}\binom{10}{k}$

۵۸- به چند طریق می‌توان ۱۰ کتاب متفاوت را در ۴ طبقه کتابخانه قرار داد؟ (می‌توان برخی طبقات را خالی گذاشت همچنین ترتیب کتاب‌ها در هر طبقه اهمیت دارد.) (ریاضی – ۹۴)

۱) $\frac{13!}{3!}$ ۲) $(10)^4$ ۳) 4^{10} ۴) $\frac{13!}{3!10!}$

۵۹- ضریب عبارت $(xyz)^{12}$ در بسط $(2x^4+y^3+x^2z^6)^8$ کدام است؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) ۴۲۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۱۶۸۰

۶۰- در یک مهمانی قرار است از ۸ مهمان حاضر عکس یادگاری گرفته شود. اگر حاضرین به صورت خطی قرار گیرند و از بین این ۸ نفر سه نفر A و B و C باشند که از این سه نفر هیچ دوتایی حاضر نباشند کنار هم قرار بگیرند به چند طریق می‌توان عکس یادگاری گرفت؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) $20\times 6!$ ۲) $35\times 6!$ ۳) $41\times 6!$ ۴) $55\times 6!$

۶۱- با ارقام ۱تا ۶ چند عدد شش رقمی با رقم‌های متمایز می‌توان ساخت که مجموع رقم‌های اول و ششم و مجموع رقم‌های دوم و پنجم با هم برابر باشد؟ (ریاضی – ۹۴)

۱) 6×2^3 ۲) 7×2^4 ۳) 7×2^3 ۴) 6×2^4

۶۲- ده سکه با ارزش‌های به ترتیب ۳ تا ۱۲ داده شده است. چند مجموع مختلف بیشتر از صفر با این سکه‌ها می‌توان ساخت؟ (*IT* – ۹۵)

۱) ۶۶ ۲) ۷۱ ۳) ۷۴ ۴) ۷۸

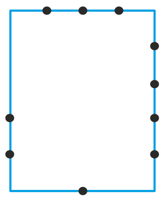
۶۳- فرض کنید $p(n,r)$ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شی (متمایز) است، مقدار n چقدر باشد تا $p(n,3)=3p(n,2)$؟ (علوم کامپیوتر – ۹۵)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶۴- **تعداد جایگشت‌های نمادهای ۱,۲,۳,۴,۵,۶ که در آنها ۱ بلافاصله قبل از ۲ ظاهر شود، اما ۳ بلافاصله پس از ۲ ظاهر نشود برابر است با:** (علوم کامپیوتر – ۹۵)

۱) ۲۴ ۲) ۹۶ ۳) ۳۸۴ ۴) ۶۰۰

۶۵- **از ده نقطه‌ای که روی اضلاع مربع (شکل زیر) مشخص شده‌اند، به چند طریق می‌توانیم ۳ نقطه انتخاب کنیم که تشکیل یک مثلث بدهند؟ (رئوس یک مثلث باشند)**(علوم کامپیوتر – ۹۵)



۱) ۵۰
۲) ۷۲
۳) ۱۱۵
۴) ۱۶۵

۶۶- **به ازای کدام مقدار n، دو معادله زیر،در مجموعه اعداد صحیح مثبت تعداد جواب‌های یکسانی دارند؟** (علوم کامپیوتر – ۹۵)

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{13} = n$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{94} = n$$

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۰۶ ۴) ۱۰۷

۶۷- **دنباله‌ای از اعداد ۱ تا ۹ داده شده است. ابتدا سه عدد اول دنباله را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم؛ سپس اعداد سوم، چهارم و پنجم دنباله را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس اعداد پنجم، ششم و هفتم، و در نهایت اعداد هفتم، هشتم و نهم را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. به ازای چند دنباله‌ی متفاوت اولیه، دنباله‌ی نهایی به صورت مرتب شده است؟** (مهندسی کامپیوتر – ۹۶)

۱) $3\times3!$ ۲) $6!$ ۳) $4\times3!$ ۴) $9!-4\times3!$

۶۸- **اگر در هر بار سفارش توپ از یک فروشگاه اینترنتی، به احتمال $\frac{1}{2}$ توپ قرمز و به احتمال $\frac{1}{2}$ توپ آبی دریافت کنیم، حداقل چند توپ باید سفارش دهیم تا به احتمال ۹۹٪ از هر دو رنگ داشته باشیم؟** (*IT* – ۹۶)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۶۹- **یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یکی از دو اتفاق زیر رخ دهد:** (*IT* – ۹۸)

۱- ده بار متوالی شیر بیاید.

۲- یک بار خط و پس از آن نه بار شیر بیاید.

با چه احتمالی اتفاق اول باعث خاتمهٔ پرتاب می‌شود؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2^9}$ ۳) $\frac{1}{2^{10}}$ ۴) $\frac{1}{10}$

۷۰- به چند طریق می‌توان پشت اعداد یک تا هفت علامت‌های مثبت یا منفی قرار داد، طــوری که مجموع اعداد حاصل منفی شود؟ (مهندسی کامپیوتر – ۹۹)

۱) ۷ ۲) ۳۲ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۷۱- ضریب xyzuv در بسط $(x+y+z+u+v)^5$ چند است؟ (۹۹ – *IT*)

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲۰

[پاسخ سؤال‌های طبقه‌بندی شده‌ی فصل دوم]

۱- گزینه (۳). $۵۰۴ = ۱ \times ۱ \times ۷ \times ۸ \times ۹$ (یکان فقط صفر است و یک حالت دارد، هزارگان ۹ حالت، صدگان ۸ حالت و دهگان ۷ حالت دارد.)

۲- گزینه (۱). کتاب‌های ریاضی یک دسته فرض می‌شوند که همراه ۸ کتاب دیگر، ۹ شی متفاوت هستند که !۹ جایگشت دارند. خود کتاب‌های ریاضی نیز !۴ جایگشت دارند.

۳- گزینه (۳). هر عملگر ۲ حالت دارد (می‌توان برای آن پرانتز در نظر گرفت یا خیر) و چون عبارت شامل ۶ عملگر است پس $۶۴ = ۲^۶$ حالت وجود دارد مثلاً $a+b*c$، ۴ حالت دارد:

$a+b*c\ ,\ a+(b*c)\ ,\ (a+b*c)\ ,\ (a+(b*c))$

البته اگر طبق اولویت پرانتزگذاری شود، جواب داده شده صحیح است که متأسفانه طراح سؤال در صورت سؤال این نکته را رعایت نکرده است!

۴- گزینه (۱). حروف انگلیسی ۲۶ تاست که با حذف A تعداد ۲۵ حرف باقی می‌ماند. هر جایگشتی از این ۲۵ حرف یکی از کلمات مطلوب سؤال است. صورت سؤال کمی پیچیده است ولی در نهایت هر جایگشتی از ۲۵ حرف یک جواب مسئله است.

۵- گزینه (۲). تعداد مسیرهای موجود از نقطهٔ $(x_۱,y_۱,z_۱)$ به نقطهٔ $(x_۲,y_۲,z_۲)$ با نحوه حرکاتی که در صورت سؤال گفته شده برابر است با: $(z_۲ \geq z_۱\ ,\ y_۲ \geq y_۱\ ,\ x_۲ \geq x_۱)$

$$\frac{(x_۲-x_۱+y_۲-y_۱+z_۲-z_۱)!}{(x_۲-x_۱)!\,(y_۲-y_۱)!\,(z_۲-z_۱)!}$$

پس جواب برابر است با:

$$\frac{(۸-۱+۱-۰+۷-۵)!}{(۸-۱)!\,(۱-۰)!\,(۷-۵)!} = \frac{۱۰!}{۷!۱!۲!} = ۳۶۰$$

۶- گزینه (۲). پسرها !۵ حالت دارند (یک پسر ثابت فرض شود) سپس دخترها به !۶ حالت بین پسرها قرار می‌گیرند.

۷- گزینه (۲). دو پسر به همراه مادرشان را یک شی در نظر می‌گیریم که به همراه ۲ دختر و پدر جمعاً ۴ شی می‌شوند. جایگشت دایره‌ای این ۴ شی برابر !۳ است و دو پسر نیز ۲ حالت با هم جابجا می‌شوند پس جواب $۱۲ = !۳ \times ۲$ می‌باشد.

۸- گزینه (۲). به $\binom{۵}{۲}$ حالت ۲ حرف صدادار و به $\binom{۲۱}{۴}$ حالت ۴ حرف بی‌صدا انتخاب کنید و به !۶ حالت کلمه بسازید.

۹- گزینه (۴). سکه‌های ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ ریالی هر یک دو حالت دارند (انتخاب شوند یا خیر) پس تعداد کل حالات $۲^۴$ است. برای درک بهتر انتخاب را ۱ و عدم انتخاب را ۰ در نظر بگیرید. (هر سکه‌ای که از ۱، ۲، ۵ و ۱۰ ریالی انتخاب نشود به این معنی است که ۲۰ ریالی انتخاب شده است.)

سکه‌های ۱، ۲، ۵ و ۱۰ ریالی انتخاب نشده‌اند یعنی ۴ سکه ۲۰ ریالی انتخاب شده است ← ۰۰۰۰

سکه ۱ ریالی و ۳ سکه ۲۰ ریالی ← ۰۰۰۱

سکه‌های ۱ و ۲ و ۵ و ۱۰ ریالی انتخاب شده‌اند ← ۱۱۱۱

۱۰- گزینه (۱).

$$-۱ < x < y \le z \le t \le ۹ \Rightarrow ۰ \le x < y < z+۱ < t+۲ \le ۱۱ \Rightarrow \binom{۱۲}{۴} = ۴۹۵$$

۱۱- گزینه (۳). کل حالات !۱۰ است که در !۲!۹ حالت دو کتاب هنر کنار هم هستند.

۱۲- گزینه (۲). هشت ژاپنی به !۷ حالت می‌نشینند سپس ۵ مالزیایی را به P(۸ و ۵) حالت بین ژاپنی‌ها قرار می‌دهیم که جواب $۷!P(۸,۵) = ۷! \times \frac{۸!}{۳!}$ است.

۱۳- گزینه (۴). با فرض اینکه جوایز متمایز هستند جواب $P(۱۰,۳) = ۷۲۰$ است.

۱۴- گزینه (۲). دو دونده مورد نظر را انتخاب کنید و به ۸ حالت نفر سوم را انتخاب کنید. حال به !۳ حالت به ۳ نفر جایزه دهید، جواب $۳! \times ۸ = ۴۸$ می‌شود.

۱۵- گزینه (۴). بین ۷ کتاب ۸ فضا وجود دارد که به $\binom{۸}{۵} = ۵۶$ حالت باید ۵ کتاب مشخص را قرار داد. در این تست جایگشت کتاب‌ها را در نظر نگرفته‌ایم، در واقع طراح فرض کرده ۷ کتابی که ابتدا چیدیم یکسان هستند و ۵ کتاب مشخص نیز یکسان هستند.

۱۶- گزینه (۴).

$$\binom{۱۰}{۶}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲} = \frac{۱۰!}{۶!۲!۲!} = ۱۲۶۰$$

۱۷- گزینه (۳). به ازای $n=0$ یک جواب $(0,0,0,0)$ وجود دارد که فقط گزینـه ۳ درسـت اسـت.
حل دقیق:

$$0\le a\le b\le c\le d\le n \Rightarrow 0\le a<b+1<c+2<d+3\le n+3 \Rightarrow \binom{n+4}{4}$$

۱۸- گزینه (۲). زیرمجموعه ۵ عضوی را $\{a,b,c,d,e\}$ فـرض کنیـد $1\le a<b<c<d<e\le 30$ و اختلاف عضوها حداقل ۳ است پس از هر عضو نسبت به عضو قبلی اگـر ۲ واحـد کـم کنـیم، حداقل اخـتلاف برابـر ۱ مـی‌شـود یعنـی $1\le a<b-2<c-4<d-6<e-8\le 22$ کـه $\binom{22}{5}$ حالت دارد.

۱۹- گزینه (۱). ترکیب با تکرار ۶ عضو از ۶ نوع شی $\binom{11}{6}=\binom{6+6-1}{6}$ حالت دارد.

۲۰- گزینه (۴). ۵ صندلی را فعلاً حـذف کنیـد. ده دانـش‌آمـوز بـه $10!$ حالـت روی ۱۰ صـندلی می‌نشینند حال ۵ صندلی خالی را در ۱۱ فضایی که بین و قبـل و بعـد دانـش‌آمـوزان ایجـاد شده قرار دهید که $\binom{11}{5}$ حالت دارد و مطمئن هستیم دو صندلی خالی کنار هم نیستند. کل حالات $462\times 10!=10!\times\binom{11}{5}$ می‌باشد.

۲۱- گزینه (۳). ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

$$1)\quad 1\le x\le y<z\le 8 \Rightarrow 1\le x<y+1<z+1\le 9\Rightarrow \binom{9}{3}$$

$$2)\quad 1\le y<x<z\le 8\Rightarrow \binom{8}{3}$$

جواب $=\binom{9}{3}+\binom{8}{3}=140$

۲۲- گزینه (؟). فرض کنید ωxyz عدد ۴ رقمی است ابتدا اعدادی که ارقامشان صعودی اسـت را می‌شماریم. باید $1\le \omega<x<y<z\le 9$ (دقت کنید ω نمی‌تواند صـفر باشـد) تعـداد ایـن اعــداد برابــر $\binom{9}{4}=126$ اســت. حــال اعــدادی کــه ارقامشــان نزولــی اســت بایــد $9\ge \omega>x>y>z\ge 0$ کــه تعــداد ایــن اعــداد $\binom{10}{4}=210$ اســت پــس جــواب $126+210=336$ است.

۲۳- گزینه (۱). تعداد حالات توزیع n شی یکسان در k جعبه متمایز $\binom{n+k-1}{k-1}$ است پس $\frac{103!}{100!3!}=\binom{100+4-1}{4-1}$ جواب است.

۲۴- گزینه (۳). تعداد حالات توزیع ۱۰ شی یکسان در ۱۲ جعبه متمایز برابر است با:
$$\binom{10+12-1}{12-1}=\frac{21!}{10!11!}$$

۲۵- گزینه (۲). اعداد مجموعه حداکثر ۵ رقمی هستند (۱۰۰۰۰۰ شش رقمی است ولی جمع ارقامش ۷ نیست پس تا ۹۹۹۹۹ مدّنظر است). ارقام را a و b و c و d و e می‌نامیم. جواب این سوال تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $a+b+c+d+e=7$ است که برابر $330=\binom{7+5-1}{5-1}$ است.

۲۶- گزینه (۲). مشابه تست قبل ارقام را abcd می‌نامیم ولی $a\neq 0$ پس:
$$a+b+c+d=9 \text{ و } a\geq 1 \Rightarrow A+b+c+d=8 \quad \text{و} \quad A\geq 0 \Rightarrow \binom{8+4-1}{4-1}=\binom{11}{3}$$

۲۷- گزینه (۳). جواب طبیعی $(x_i\geq 1)$ خواسته شده، پس ۶ واحد از ۱۵ کم می‌کنیم و به x_1 تا x_6 می‌دهیم: $X_1+X_2+\ldots+X_6<9$ که معادل $X_1+X_2+\ldots+X_6\leq 8$ است حال x_7 را اضافه می‌کنیم و نامعادله را به تساوی تبدیل می‌کنیم: $X_1+X_2+\ldots+X_6+x_7=8$ که $\binom{14}{6}=\binom{8+7-1}{7-1}$ جواب دارد.

۲۸- گزینه (۱). تعداد حالات توزیع ۲۱ شی متمایز در ۳ جعبه متمایز برابر 3^{21} است که این توزیع ۴ حالت دارد:

۱- (زوج، زوج، فرد) ۲- (زوج،فرد، زوج) ۳- (فرد، زوج، زوج) ۴- (فرد، فرد، فرد). تعداد حالات ۴ از سایر حالات یک واحد کمتر است (زیرا به ازای هر حالت ۱ یا ۲ یا ۳ یک حالت ۴ وجود دارد که کافیست یک مهره از جعبه زوج را به جعبه زوج دیگر منتقل کنید. فقط حالتی که زوج‌ها صفر هستند نمی‌توان چنین کاری کرد). پس اگر تعداد حالت ۱ را برابر x بگیریم تعداد حالت ۴ برابر $x-1$ است پس $x+x+x+x-1=3^{21}$ در نتیجه $x=\frac{1}{4}(3^{21}+1)$.

۲۹- گزینه (۴). a) یا هر دو عدد باید زوج باشند که $\binom{۵۰}{۲}$ حالت دارد یا هر دو فرد که $\binom{۵۰}{۲}$ حالت دارد پس $۲\times\binom{۵۰}{۲}=۲۴۵۰$ حالت جواب است. b) باید یک عدد فرد و یک عدد زوج باشد: $\binom{۵۰}{۱}\binom{۵۰}{۱}=۲۵۰۰$

۳۰- گزینه (۴). ضریب $a^{۳}b^{۱}c^{۱}$ برابر $۲^{۳}\times ۵\times\frac{۵!}{۳!۱!۱!}=۸۰۰$ است.

۳۱- گزینه (۲).

$$w^{۰}x^{۱}y^{۱}z^{۲} \rightarrow \text{ضریب}=\frac{۴!}{۰!۱!۱!۲!}=۱۲$$

۳۲- گزینه (۲ و ۳). توجه کنید توانِ عبارتِ داده شده $۲n$ است پس x^{n} به شکل $۱^{n}x^{n}$ می‌باشد.

$$\text{گزینه ۲}=۲\binom{۲n-۱}{n-۱}=۲\frac{(۲n-۱)!}{(n-۱)!n!}=\frac{۲n\times(۲n-۱)!}{n\times(n-۱)!n!}=\frac{(۲n)!}{n!n!}=\text{ضریب } ۱^{n}x^{n}$$

از طرفی طبق مسئله حل شده ۵ قسمت c ، $\binom{۲n}{n}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^{۲}$ (گزینه ۳).

۳۳- گزینه (۴). باید ضریب $x^{۶}$ در $(۲x^{-۱}-x^{۲})^{۶}$ را بیابیم. $x^{۶}$ از $(۲x^{-۱})^{۲}(-x^{۲})^{۴}$ حاصل می‌شود که ضریبش $۲^{۲}\times(-۱)^{۴}\times\frac{۶!}{۲!۴!}=۶۰$ است.

۳۴- گزینه (۲). برای یافتن جمع ضرایب، کافی است همهٔ متغیرها را برابر ۱ قرار دهیم پس باید $x=y=z=\omega=۱$ که جواب $(۳-۳+۲+۵)^{۴}=۷^{۴}$ است.

۳۵- گزینه (۳). با توجه به بسط نیوتن داریم:

$$\sum_{k=۰}^{n}\sum_{i=۰}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}۲^{i}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\sum_{i=۰}^{k}\binom{k}{i}۲^{i}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(۱+۲)^{k}=(۱+۳)^{n}$$

۳۶- گزینه (۲).

$$\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{i}\binom{i}{j}\binom{n}{i}=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=۰}^{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}۲^{i}=(۱+۲)^{n}=۳^{n}$$

۳۷- گزینه (۲). در ۹ پرتاب اول ۳ شیر آمده است که $\binom{۹}{۳}$ حالت دارد.

۳۸- گزینه (۳). مهم نیست که ۱۰ توپ از کدام کیسه‌ها خارج شوند. یک توپ قرمز باشد پس ۹ توپ دیگر باید سبز و آبی باشند که ۱۰ حالت وجود دارد:

$(۹,۰)(۸,۱)(۷,۲)...(۰,۹) =$ (آبی و سبز)

۳۹- گزینه (۴). با n نقطه، $\binom{n}{۲}$ پاره‌خط وجود دارد که تعداد n تا ضلع و مابقی قطر است:

$$\binom{n}{۲} - n = ۳n \Rightarrow \frac{n-۱}{۲} - ۱ = ۳ \Rightarrow n = ۹$$

۴۰- گزینه (۳). هر سطر ۶ درایه دارد که $۲^۶$ حالت است و در نصف این حالات تعداد یک‌ها زوج است و چون ۵سطر وجود دارد جواب $۲^{۲۵} = \left(\frac{۱}{۲}۲^۶\right)^۵$ است.

۴۱- گزینه (۴). مجموعه را به ۳ کلاس $۳k$ و $۳k+۱$ و $۳k+۲$ افراز می‌کنیم:

$$A(۳k) = \{۳,۶,۹,...,۲۷\}, B(۳k+۱) = \{۱,۴,۷,...,۲۸\}, C(۳k+۲) = \{۲,۵,۸,...,۲۹\}$$

برای آنکه مجموع ۳ عدد مضرب ۳ باشد، ۴ حالت وجود دارد: ۱- هر ۳ عضو A باشند. ۲- هر ۳ عضو B باشند ۳- هر ۳ عضو C باشند ۴- از هر مجموعه یک عضو انتخاب شود:

$$\text{جواب} = \binom{۹}{۳} + \binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۳} + \binom{۹}{۱}\binom{۱۰}{۱}\binom{۱۰}{۱} = ۱۲۲۴$$

۴۲- گزینه (۳). تعداد دنباله‌هایی که یک ۱ دارند برابر $۱۰۸ = ۳^۳ \times \binom{۴}{۱}$ است (از ۴ مکان در دنباله به $\binom{۴}{۱}$ حالت یک مکان برای ۱ انتخاب کنید و سه مکان دیگر را ۲ و ۳ و ۴ به $۳^۳$ حالت قرار دهید). و تعداد دنباله‌هایی که سه تا ۱ دارند برابر $۱۲ = ۳ \times \binom{۴}{۳}$ است پس جواب $۱۲۰ = ۱۲ + ۱۰۸$ می‌باشد.

۴۳- گزینه (۳). در ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

$$۱)\quad ۱ \le x \le y < z \le ۸ \Rightarrow ۱ \le x < y+۱ < z+۱ \le ۹ \Rightarrow \binom{۹}{۳}$$

$$۲)\quad ۱ \le y < x < z \le ۸ \Rightarrow \binom{۸}{۳}$$

$$\text{جواب} = \binom{۹}{۳} + \binom{۸}{۳} = ۱۴۰$$

۴۴- گزینه (۳). **روش اول**. فرض کنید $k = ۳$ و $n = ۳$ آنگاه $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳$ که فقط یک جواب دارد (۱,۱,۱) حال گزینه‌ها:

گزینه ۲: $\binom{۳+۳-۱}{۳-۱} \neq ۱$ بی‌معنی: گزینه ۱

گزینه ۴: $\binom{\frac{۳+۳}{۲}+۳-۱}{۳-۱} \neq ۱$ گزینه ۳: $\binom{\frac{۳+۳}{۲}-۱}{۳-۱} = ۱$

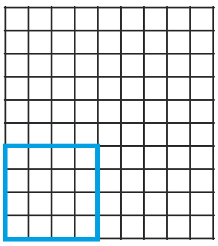
روش دوم. فرض کنید $x_i = ۲y_i + ۱$ (عدد فرد) که $y_i \geq ۰$ است پس می‌توان معادله را به شکل زیر نوشت:

$$۲y_۱ + ۱ + ۲y_۲ + ۱ + \dots + ۲y_k + ۱ = n \rightarrow y_۱ + y_۲ + \dots + y_k = \frac{n-k}{۲}$$

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله مطلوبست که برابر است با:

$$\binom{\frac{n-k}{۲}+k-۱}{k-۱} = \binom{\frac{n+k}{۲}-۱}{k-۱}$$

۴۵- گزینه (۳). در مستطیل ۱۰×۹ مقابل یک مربع ۴×۴ نشان داده شده است. این مربع به ۷ حالت می‌تواند به بالا و به ۶ حالت می‌تواند به سمت راست حرکت کند پس جواب $۷ \times ۶ = ۴۲$ می‌باشد. دقت کنید مربع ۴×۴ می‌تواند با هر حرکت یک سطر به بالا و یک ستون به راست حرکت کند.



۴۶- گزینه (۳). فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و $x_۴$ و $x_۵$ به ترتیب تعداد سیب، پرتقال، موز، انبه و آناناس در کیسه باشد. می‌توان نوشت

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۵۰$$

از طرفی $x_۱ = ۲y_۱$ و $x_۲ = ۵y_۲$ و $x_۳ = ۱۰y_۳$ و با توجه به شرایط سوال می‌توان نوشت:

$$۲y_۱ + ۵y_۲ + ۱۰y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۵۰$$

$$۲y_۱ \geq ۰, ۵y_۲ \geq ۰, ۰ \leq ۱۰y_۳ \leq ۲۰, ۰ \leq x_۴ \leq ۴, ۰ \leq x_۵ \leq ۱$$

یافتن تعداد جواب‌های این معادله با مولد امکان‌پذیر است ولی بسیار زمان‌بر است.

۴۷- گزینه (۳).

$$۱ \leq a \leq b \leq c-۱ \leq d-۲ \leq e \leq ۹ \rightarrow ۱ \leq a < b+۱ < c+۱ < d+۱ < e+۴ \leq ۱۳$$

حال باید ۵ شی متفاوت از بین ۱ تا ۱۳ انتخاب کنیم که $\binom{۱۳}{۵}$ حالت دارد.

۴۸- گزینه (۴). اگر رخ‌ها یکسان باشند !۸ حالت دارد و چون متفاوت هستند !۸×!۸ حالت دارد.

۴۹- گزینه (۳). اگر x و y به ترتیب تعداد گام‌هایی باشند که در جهت (۱,۲) و (۳,۱) حرکت می‌کنیم آنگاه باید $۲x+y=۱۸$ و $x+۳y=۲۹$ در نتیجه $x=۵$ و $y=۸$ پس جواب سوال $\binom{۱۳}{۵}=\frac{۱۳!}{۵!۸!}$ می‌باشد.

۵۰- گزینه (۲). تعداد اعداد ۳ رقمی با ارقام متمایز که رقم صدگان آنها (یا دهگان یا یکان) برابر $۱\le i\le ۵$ است برابر $۱۲=۳×۴$ تاست. پس جمع همه چنین اعدادی برابر است با:

$$(۱+۲+۳+۴+۵)\times(۱۲۰۰+۱۲۰+۱۲)=۱۹۹۸۰$$

۵۱- گزینه (۱). فرض کنید عدد abcd باشد $۹\ge a\ge b\ge c\ge d\ge ۰$ پس:

$$۰\le d<c+۱<b+۲<a+۳\le ۱۲\rightarrow\binom{۱۳}{۴}=۷۱۵$$

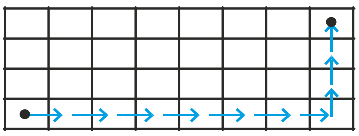
ولی یکی از اعداد شمرده شده ۰۰۰۰ است. پس جواب ۷۱۴ است.

۵۲- گزینه (۴). $a+b=۱۰۰$ و $a-b=۱۰$ و $(x)^a\times\left(\frac{۱}{x}\right)^b=x^{a-b}$ پس $a=۵۵$ و $b=۴۵$.

در نتیجه ضریب $x^{۱۰}$ برابر $\frac{۱۰۰!}{۵۵!۴۵!}$ یعنی $\binom{۱۰۰}{۵۵}$ است.

۵۳- گزینه (۱). اگر حرکت به سمت بالا را با U و حرکت به راست را با R نشان دهیم، جواب سوال برابر تعداد جایگشت‌های ۷ حرف R و ۳ حرف U است که ۲ تا U کنار هم نباشند، که تعداد حالات برابر $\binom{۸}{۳}=۵۶$ می‌باشد. چون ۷ حرف R به یک حالت چیده می‌شوند و از ۸ مکان بین و قبل و بعد Rها باید ۳ مکان انتخاب شود.

دقت کنید صفحه ۴×۸ است ولی برای رسیدن از خانه سمت چپ پایین به خانه سمت راست بالا باید ۷ حرکت R و ۳ حرکت U انجام شود:



۵۴- گزینه (۴). تعداد حالات برابر ۵ تاست که عبارتند از:

$$\{۲,۲,۷\},\{۲,۳,۶\},\{۲,۴,۵\},\{۳,۳,۵\},\{۳,۴,۴\}$$

۵۵- گزینه (۳).

۵۶- گزینه (۴). تعداد حالاتی که a,b مجاور هم هستند برابر $۴۸ = ۲! \times ۴!$ و تعداد کل حالات برابر $۱۲۰ = ۵!$ پس جواب سوال برابر $۷۲ = ۴۸ - ۱۲۰$ می‌باشد.

۵۷- گزینه (۲). با توجه به رابطه $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^۲ = \binom{۲n}{n}$ گزینه ۱ صحیح است (نتیجه رابطه و اندرموند)

با توجه به قاعده پاسکال $\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k-۱} + \binom{n-۱}{k}$ گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به رابطه و اندرموند $\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{n}{r-k}\binom{m}{k}$ گزینه ۴ صحیح است.

بنابراین رابطه گزینه ۲ صحیح نیست.

۵۸- گزینه (۱). اگر x_k تعداد کتاب‌های طبقه kام باشد می‌توان نوشت $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ که این معادله دارای $\binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱}$ جواب است ولی با توجه اینکه ترتیب کتاب‌ها مهم است جواب سوال برابر است با:

$$\binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱} \times ۱۰! = \binom{۱۳}{۳} \times ۱۰! = \frac{۱۳!}{۳!}$$

۵۹- گزینه (۴).

$$(xyz)^{۱۲} \to (x^۴)^۲(y^۳)^۴(x^۲z^۶)^۲ \to \text{جواب} = \frac{۸!}{۲!۴!۲!} \times (۲)^۲ = ۱۶۸۰$$

۶۰- گزینه (۱). A و B و C را نادیده بگیرید و ۵ نفر دیگر را به !۵ حالت قرار دهید. حال از ۶ فضای بین و قبل و بعد این ۵ نفر، ۳ فضا برای A و B و C انتخاب کنید که $\binom{۶}{۳}$ حالت دارد و حال A و B و C با هم به !۳ حالت جابجایی دارند. پس جواب برابر است با:

$$۵! \times \binom{۶}{۳} \times ۳! = ۵! \times \frac{۶!}{۳!} = ۲۰ \times ۶!$$

۶۱- گزینه (۲). به ۷ حالت می‌توان از ۱تا ۶، ۴ رقم انتخاب کرد که جمع ۲ تای آنها با جمع ۲ تای دیگر برابر باشد:

$$(۱,۶ = ۲,۵)(۱,۶ = ۳,۴)(۱,۵ = ۲,۴)(۲,۳ = ۱,۴)(۲,۶ = ۳,۵)(۳,۶ = ۴,۵)(۲,۵ = ۳,۴)$$

حال با هر کدام از این حالات می‌توان $۲^۴$ عدد با شرایط مسئله نوشت (چرا؟) پس جواب سوال ۷×۲^۴ می‌باشد.

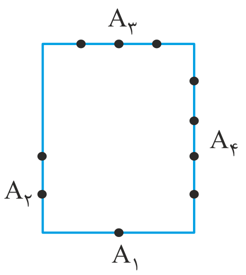
۶۲- گزینه (۲). حاصلجمع ۳ تا ۱۲ برابر $۷۵=\frac{(۳+۱۲)(۱۰)}{۲}$ است پس مجموع‌های ممکن می‌تواند همهٔ اعداد ۳ تا ۷۵ به غیر از ۷۴ و ۷۳ باشد چون از ۷۵ باید یک یا دو واحد کم شود که ۱ و ۲ در مجموعهٔ اعداد نیست. پس تعداد مجموع‌های ممکن برابر ۷۱ است.

۶۳- گزینه (۱). می‌دانیم $p(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ پس

$$\frac{n!}{(n-۳)!}=۳\frac{n!}{(n-۲)!}\Rightarrow n-۲=۳\Rightarrow n=۵$$

۶۴- گزینه (۲). تعداد جایگشت‌هایی که ۱ بلافاصله قبل از ۲ ظاهر شود برابر $۱۲۰=۵!$ می‌باشد و تعداد جایگشت‌هایی که ۱ بلافاصله قبل از ۲ و ۳ بلافاصله پس از ۲ ظاهر شود برابر $۲۴=۴!$ می‌باشد (۱۲۳ یک شی در نظر بگیرید و به همراه ۴ و ۵ و ۶ جایگشت بزنید) پس تعداد جایگشت‌هایی که ۱ بلافاصله قبل از ۲ ظاهر شود اما ۳ بلافاصله پس از ۲ ظاهر نشود برابر $۹۶=۲۴-۱۲۰$ می‌باشد.

۶۵- گزینه (۳). برای تشکیل مثلث یا باید ۳ ضلع انتخاب کنیم و از هر ضلع یک نقطه انتخاب کنیم یا اینکه ۲ ضلع انتخاب کنیم و از یکی از اضلاع یک نقطه و از دیگری ۲ نقطه انتخاب کنیم. تعداد حالاتی که ۳ ضلع انتخاب می‌شوند:



$$(A_۱A_۲A_۳)+(A_۱A_۲A_۴)+(A_۱A_۳A_۴)+(A_۲A_۳A_۴)$$
$$=۱\times۲\times۳+۱\times۲\times۴+۱\times۳\times۴+۲\times۳\times۴=۵۰$$

تعداد حالاتی که ۲ ضلع انتخاب می‌شوند:

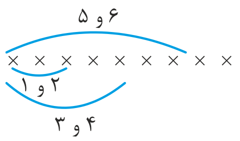
$$(A_۱A_۲)+(A_۱A_۳)+(A_۱A_۴)+(A_۲A_۳)+(A_۲A_۴)+(A_۳A_۴)$$
$$=۱\times\binom{۲}{۲}+۱\times\binom{۳}{۲}+۱\times\binom{۴}{۲}+\left[\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۱}\right]+\left[\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۲}{۲}\binom{۴}{۱}\right]+\left[\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}\right]=۶۵$$

پس کل حالات $۱۱۵=۶۵+۵۰$.

۶۶- گزینه (۳). منظور از مثبت بزرگتر از صفر است و شامل صفر نیست. تعداد جواب‌های صحیح مثبت معادلهٔ $x_۱+x_۲+\dots+x_k=n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ می‌باشد پس

$$\binom{n-۱}{۱۲}=\binom{n-۱}{۹۳}\Rightarrow ۱۲+۹۳=n-۱\Rightarrow n=۱۰۶$$

۶۷- گزینه (۲). اعداد ۱ و ۲ حتماً در ۳ مکان اول، اعداد ۳ و ۴ حتماً در ۵ مکانِ اول، اعداد ۵ و ۶ حتماً در ۷ مکانِ اول باید باشند. اعداد ۱ و ۲ به ۶ حالت در ۳ مکان اول قرار می‌گیرند، اعداد ۳ و ۴ نیز بـه ۶ حالت در ۳ مکانِ باقی‌مانده از ۵ مکان اول قرار می‌گیرند، اعداد ۵ و ۶ نیز به ۶ حالت در ۳ مکان از ۷ مکانِ اول قرار می‌گیرند، در نهایت اعداد ۷ و ۸ و ۹ نیز به ۶ حالت در ۳ مکان باقی‌مانده قرار می‌گیرند پس کل حالات $۶^۴$ می‌باشد.



۶۸- گزینه (۱). فرض کنید n بار توپ سفارش داده‌ایم. اگر هر n بـار قرمـز باشـد $(\frac{۱}{۲})^n$ احتمـال دارد. اگر هر n بار آبی باشد $(\frac{۱}{۲})^n$ احتمال دارد. پس احتمال آنکه در n بار از هر رنگ داشته باشیم برابر $۱-(\frac{۱}{۲})^n-(\frac{۱}{۲})^n$ است بنابراین:

$$۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\geq ۰/۹۹\rightarrow\frac{۱}{۲^{n-۱}}\leq\frac{۱}{۱۰۰}\rightarrow ۲^{n-۱}\geq ۱۰۰$$

$$\rightarrow n-۱\geq ۷\rightarrow n\geq ۸$$

۶۹- گزینه (۳). اگر ده شیر متوالی باعث خاتمه شده است پس یعنی ده پرتـاب اول همگـی شیـر بوده‌اند (چرا؟) که احتمال آن $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ می‌باشد.

۷۰- گزینه (۳). هفت عدد هر یک مثبت یا منفی پس کـل حـالات ۱۲۸ تاسـت کـه در ۸ حالـت حاصل‌جمع صفر می‌شود. حاصل جمع ۱ تا ۷ برابر ۲۸ است که در ۸ حالت مـی‌تـوان کـاری کرد که جمع برخی اعداد ۱۴+ و جمع برخی دیگر ۱۴− که در نتیجه جمع کل صفر شود:

$[(۷,۶,۱),(۲,۳,۴,۵)]$ و $[(۷,۵,۲),(۱,۳,۴,۶)]$ و

$[(۷,۴,۳),(۱,۲,۵,۶)]$ و $[(۷,۲,۴),(۳,۵,۶)]$.

مـثلاً $-۷-۶-۱+۲+۳+۴+۵=۰$ و $+۷+۶+۱-۲-۳-۴-۵=۰$ پـس ۱۲۰ حالـت هست که جمع مثبت و یا منفی می‌شود که در ۶۰ حالت جمع منفی می‌شود.

۷۱- گزینه (۴). برابر است با $\frac{۵!}{۱!۱!۱!۱!۱!}$ یعنی ۱۲۰

[سؤال‌های مهندسی کامپیوتر ۱۴۰۱]

۱- اگر n تاس را به طور همزمان پرتاب کنیم، چند حالت مختلف می‌تواند رخ دهد؟ (دو حالت از پرتاب تاس‌ها مختلف هستند، اگر به ازای حداقل یک عدد i $(1 \le i \le 6)$ ، تعداد تاس‌هایی که وجه بالایی آنها عدد i را نشان می‌دهد، در این دو پرتاب مختلف باشند.)

۱) 6^n ۲) $6n$ ۳) $\binom{6n}{n}$ ۴) $\binom{n+5}{n}$

۲- کدام یک از هم‌ارزی‌های منطقی زیر، (به ترتیب الف و ب) همیشه برقرار است؟

الف) $\neg(\exists x[P(x) \wedge Q(x)]) \equiv \forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

ب) $((p \rightarrow q) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow s) \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow s) \equiv \text{True}$

۱) درست، درست ۲) نادرست، درست
۳) درست، نادرست ۴) نادرست، نادرست

۳- کدام یک از گزاره‌های زیر به ترتیب، درست است؟

الف) مجموعهٔ تمام دنباله‌های اکیداً صعودی از اعداد طبیعی شمارا است.

ب) مجموعهٔ تمام دنباله‌های اکیداً نزولی از اعداد طبیعی شمارا است.

۱) نادرست، نادرست ۲) نادرست، درست
۳) درست، نادرست ۴) درست، درست

۴- جایگشتی از اعداد ۱ تا n که در آن هیچ عدد i در محل iاُم قرار نگرفته باشد، یک پریش نامیده می‌شود. فرض کنید D_n برابر تعداد پریش‌های مختلف اعداد ۱ تا n باشد. کدام رابطهٔ بازگشتی برای D_n به ازای $(n > 2)$ برقرار است؟

۱) $D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-2)D_{n-2}$

۲) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

۳) $D_n = nD_{n-1} - (n-1)D_{n-2}$

۴) $D_n = (n-1)D_{n-1}$

۵- کدام یک از گزاره‌های زیر به ترتیب، درست است؟

الف) به ازای هر عدد طبیعی دلخواه مانند k، اعداد $2k+1$ و $9k+4$ نسبت به هم اول هستند.

ب) معادلهٔ $(n-1)!+1 = n^2$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی تنها یک جواب دارد.

۱) نادرست، نادرست ۲) درست، نادرست
۳) درست، درست ۴) نادرست، درست

۶- **رابطهٔ R را روی مجموعهٔ A در نظر بگیرید. با استفاده از R رابطهٔ S را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:**
$xSy \leftrightarrow xRy \vee yRx$

کدام مورد درخصوص گزاره‌های زیر به ترتیب، درست است؟

الف) اگر R ترایایی باشد، آن‌گاه S نیز لزوماً ترایایی است.

ب) اگر R هم‌ارزی باشد، آن‌گاه S نیز لزوماً هم‌ارزی است.

۱) نادرست، نادرست ۲) درست، نادرست

۳) نادرست، درست ۴) درست، درست

۷- **فرض کنید طول کوتاه‌ترین دور در گراف ساده G برابر ۵ باشد. همچنین فرض کنید درجهٔ تمام رأس‌های G برابر k است. کدام مورد زیر همواره درست است؟**

۱) این گراف حداکثر k^3 رأس دارد. ۲) این گراف حداقل k^2 رأس دارد.

۳) این گراف حداقل k^3 یال دارد. ۴) این گراف دو بخشی است.

[سؤال‌های IT ۱۴۰۱]

۸- **به چند طریق مختلف می‌توان از گوشهٔ پایین سمت چپ یک مستطیل ۶×۴ با دنباله‌ای از حرکات به صورت یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا، به گوشهٔ بالای سمت راست مستطیل رسید، طوری که در طول مسیر حداقل سه بار تغییر جهت داشته باشیم؟**

۱) ۱۷۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۲۰۰

۹- **کدام یک از هم‌ارزی‌های منطقی زیر (به ترتیب الف، ب)، همیشه برقرار است؟**

الف) $(\forall xA(x)) \to (\forall xB(x)) \equiv \forall x(A(x) \to B(x))$

ب) $((a \to b) \vee (c \to b)) \to ((a \wedge c) \to b) \equiv \text{True}$

۱) نادرست، درست ۲) نادرست، نادرست

۳) درست، درست ۴) درست، نادرست

۱۰- **کدام گزینه در خصوص گزاره‌های زیر به ترتیب، درست است؟**

الف) اگر A یک مجموعه ناشمارا و B زیرمجموعه‌ای شمارا از A باشد، آن‌گاه تناظری یک به یک بین A و $A - B$ وجود دارد.

ب) اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $\times$ نشان‌دهنده ضرب دکارتی دو مجموعه باشد، آن‌گاه $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

۱) نادرست، درست ۲) درست، درست

۳) نادرست، نادرست ۴) درست، نادرست

۱۱- چند عدد طبیعی n وجود دارد که n^5+3 بر n^2+1 بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۳ ۲) نامتناهی ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲- فرض کنید R یک رابطه دلخواه روی مجموعه متناهی A باشد. اگر f بستار بازتابی، g بستار تقارن و h بستار ترایایی باشد، چه تعداد از رابطه‌های زیر همواره یک رابطه هم‌ارزی است؟

$$f(g(h(R))), f(h(g(R))), g(f(h(R))), g(h(f(R))), h(f(g(R))), h(g(f(R)))$$

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۶

۱۳- فرض کنید T یک درخت دودویی دلخواه با $n>5$ گره است که هر گره غیربرگ دقیقاً دو فرزند دارد. به ازای هر گره v فرض کنید $d(v)$ برابر فاصله v تا نزدیکترین برگ باشد. برای برگ‌ها این مقدار برابر صفر است. فرض کنید $H=\sum d(v)$ باشد که جمع روی همه گره‌های T است. کدام گزینه درخصوص گزاره‌های زیر، به ترتیب درست است؟

الف) همواره داریم: $H \geq n$

ب) به ازای هر گره v از T داریم: $d(v) \leq \log_2 n$

۱) نادرست، نادرست ۲) نادرست، درست

۳) درست، درست ۴) درست، نادرست

[سؤال‌های علوم کامپیوتر ۱۴۰۱]

۱۴- تعداد کل رشته‌های به طول n با نمادهای ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ به طوری که مجموع تعداد ۰ها و ۱های ظاهر شده زوج باشد چقدر است؟

۱) $\frac{5^n+1}{2}$ ۲) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{5+i}{i}$ ۳) 3^n+1 ۴) $\sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\binom{3+i}{i}$

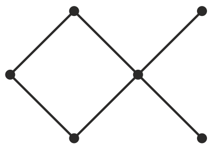
۱۵- با بررسی نتایج یک تحقیق در مورد اینترنت دانش‌آموزان مشخص شد، ۹۶ درصد اینترنت ثابت، ۴۲ درصد اینترنت همراه و ۳۹ درصد هم اینترنت ثابت و هم اینترنت همراه دارند. چند درصد دانش‌آموزان اصلاً اینترنت ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- فرض کنیم چهار کارتن شبیه به هم برای قرار دادن ظروف در اختیار داریم. با این فرض که ممکن است بعضی کارتن‌ها خالی بمانند به چند روش می‌توان نه ظرف مختلف را در این کارتن‌ها قرار دارد؟

۱) ۱۰۷۹۵ ۲) ۱۱۰۵۰ ۳) ۱۱۰۵۱ ۴) ۱۰۷۹۶

۱۷- فرض کنیم $x(G,k)=k(k-۱)^۳ f(k)$ چندجمله‌ای رنگی گراف زیر باشد. در این صورت $f(۴)$ در کدام بازه قرار دارد؟



۱) $[۰,۴)$

۲) $[۴,۸)$

۳) $[۸,۱۲)$

۴) $[۱۲,+\infty)$

۱۸- دو عبارت زیر را در نظر بگیرید (گراف‌ها ساده هستند):

الف) فرض کنیم G یک گراف از مرتبه $n \geq ۱۱$ باشد. در این صورت حداقل یکی از G یا $\bar{G}$ غیرمسطح است.

ب) فرض کنیم G یک گراف همبند مسطح از مرتبه $n < ۱۲$ باشد. در این صورت $\delta(G) \leq ۴$.

کدام یک از این دو عبارت صحیح است؟ (دلتای کوچک به معنی کمترین درجه رأس‌های گراف است.)

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۱۹- شماره دانشجویی زهرا ۶۳۲۸۳۶۳ است. او ارقام شماره دانشجویی و تعداد تکرار هر رقم را می‌داند ولی ترتیب آنها را فراموش کرده است ولی می‌داند که اولین ۶ قبل از اولین ۳ است. چند شماره مختلف با این شرایط می‌توان برای او در نظر گرفت؟ (به عنوان مثال ۲۶۸۳۶۳۳ و ۲۶۶۸۳۳۳ دو تا از حالات مطلوب است.)

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۵۶ ۳) ۱۵۹ ۴) ۱۷۱

۲۰- فرض کنیم A ضریب $x^۲$ و B ضریب $x^۵$ در تابع $\frac{۱+x^۳}{(۱+x)^۳}$ باشد. $A+B$ چقدر است؟

۱) ۱۲- ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۹-

۲۱- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۹ و ... و ۱ و ۰ وجود دارد به طوری که ارقام مجاور یکسان نباشند؟ (اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند صفر باشد.)

۱) ۷۲۹۰ ۲) ۴۵۳۶ ۳) ۵۰۴۰ ۴) ۶۵۶۱

۲۲- چند دنباله به طول ۷ با نمادهای ۱ و ۰ وجود دارد که شامل سه صفر متوالی باشد؟ (مثلاً اگر شامل چهار صفر متوالی باشد، شامل سه صفر متوالی هم خواهد بود.)

۱) ۵۰ ۲) ۴۷ ۳) ۴۸ ۴) ۴۹

۲۳- مردی ۷ دوست دارد. به چند روش او می‌تواند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از این دوستان را در ۷ شب متوالی برای شام دعوت کند به طوری که هر دو نفر از این دوستانش دقیقاً در یک شب با هم دعوت شده باشند؟

۱) $7!$ ۲) $30 \times 7!$ ۳) $15 \times 7!$ ۴) $60 \times 7!$

۲۴- تعداد ارزش‌دهی‌های درست و غلط $(1,0)$ به s, r, p, q که ارزش گزاره زیر را درست (یک) می‌کند، چند است؟

$(p \vee q) \to (r \vee s)$

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۲۵- حداقل چند نفر داشته باشیم تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها در یک ماه و در یک روز هفته (مثلاً خرداد و دوشنبه) به دنیا آمده‌اند؟

۱) ۸۶ ۲) ۱۶۹ ۳) ۲۵۲ ۴) ۲۵۳

۲۶- چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۵ و ۷ وجود دارد که مضرب ۳ باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۶۴

۲۷- به چند طریق می‌توان ۳ عدد متمایز از مجموعه $\{1401, 1402, \ldots, 2022\}$ انتخاب کرد به طوری که حاصل‌ضرب ۳ عدد انتخاب شده، زوج باشد؟

۱) $\binom{622}{3} - \binom{311}{3}$ ۲) $311 \times 621 \times 620$

۳) $\binom{621}{3} - \binom{311}{3}$ ۴) $311 \times 620 \times 619$

۲۸- تعداد توابع $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 10\}$ که $f(2) \le f(5)$ چند است؟

۱) $6^{10} \times 45$ ۲) $10^{6} \times 45$ ۳) $6^{10} \times 55$ ۴) $10^{6} \times 55$

۲۹- یک جدول 8×10 داریم که همه خانه‌های آن در ابتدا سفید است. به چند طریق می‌توان ۳ خانه از آن را سیاه کرد به طوری که هیچ ۲ خانه سیاهی در یک سطر یا در یک ستون واقع نباشد؟

۱) $6^{2}\binom{8}{3}\binom{10}{3}$ ۲) $6\binom{8}{3}\binom{10}{3}$

۳) $\binom{8}{3}\binom{10}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}\binom{8}{3}\binom{10}{3}$

۳۰- تابع مولد دنباله $\forall n \geq ۰ , a_n = ۲n - ۱$ **کدام مورد است؟**

۱) $\frac{۲}{(۱-x)^۲} - \frac{۳}{۱-x}$ ۲) $\frac{۲}{(۱-x)^۲} - \frac{۱}{۱-x}$

۳) $\frac{۲}{(۱-x)^۲} + \frac{۳}{۱-x}$ ۴) $\frac{۲}{(۱-x)^۲} + \frac{۱}{۱-x}$

۳۱- دنباله بازگشتی $\begin{cases} a_۰ = -۱ \\ a_۱ = ۴ \\ a_n = ۴(a_{n-۱} - a_{n-۲}) \quad \forall n \geq ۲ \end{cases}$ **را در نظر بگیرید، بزرگترین توان از ۲ که** $a_{۴۳}$ **را عاد می‌کند چند است؟**

۱) ۴۳ ۲) ۴۴ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

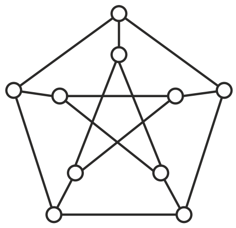
۳۲- کدام دنباله یا دنباله‌ها از دنباله‌های زیر به ازای همه مقادیر حقیقی $a_۰, a_۱$ **همگراست؟**

الف) $(\forall n \geq ۲) \quad ۴a_n = ۴a_{n-۱} - a_{n-۲}$

ب) $(\forall n \geq ۲) \quad ۶a_n = ۷a_{n-۱} - ۲a_{n-۲}$

۱) فقط (الف) ۲) فقط (ب) ۳) هر دو ۴) هیچ‌کدام

۳۳- به چند طریق می‌توان دو رأس از گراف زیر را انتخاب کرد به طوری که دارای رأس همسایه مشترک باشند؟ ترتیب دو رأس انتخاب شده مهم نیست. (دو رأس را همسایه گوییم هرگاه بین آنها یال باشد.)



۱) ۱۵

۲) ۳۰

۳) ۴۵

۴) ۶۰

[پاسخنامه سؤال‌های مهندسی کامپیوتر ۱۴۰۱]

۱- گزینه (۴). پاسخ این سؤال برابر است با تعداد ترکیب با تکرار n تا از ۶ تا ! چون هر انتخاب n تایی با تکرار از اعداد ۱ تا ۶ یک حالت برای این مسئله است. مثلاً یک حالت این است که همهٔ n تاس عدد ۱ ظاهر شود. یک حالت این است که همهٔ n تاس عدد ۲ ظاهر شودو به همین ترتیب. یک حالت این است که مثلاً $n-۱$ تاس عدد ۱ و یک تاس عدد ۲ ظاهر شود. پس پاسخ برابر است با $\binom{۶+n-۱}{n}$. چون می‌دانیم ترکیب با تکرار k شی از n شی برابر است با $\binom{n+k-۱}{k}$.

۲- گزینه (۱). «الف» درست است کافی است نقیض را پخش کنید و از معادل بودن ترکیب شرطی و فصلی استفاده کنید:

$$\neg(\exists x(p(x)\wedge q(x))\equiv \forall x(\neg p(x)\vee \neg q(x))\equiv \forall x(p(x)\to \neg q(x))$$

«ب» درست است. کافی است به روش‌های استنتاج فکر کنیم واز درستی $p\to q$ و $q\wedge r\to s$ و r درستی $p\to s$ را نتیجه بگیریم. به عبارتی از درستی $p\to q$ و $q\wedge r\to s$ و r و p درستی s را نتیجه بگیریم، از درستی p و $p\to q$ درستی q نتیجه می‌شود. از درستی q و r درستی $q\wedge r$ نتیجه می‌شود و از درستی $q\wedge r$ و $q\wedge r\to s$ درستی s نتیجه می‌شود. پس عبارت داده شده در قسمت «ب» تاتولوژی است.

۳- گزینه (۲). (الف) روشهای مختلفی برای اثبات ناشمارا بودن این مجموعه هست. یک روش را با کمک ایدهٔ روش قطری کانتور که برای اثبات ناشمارا بودن اعداد حقیقی بازهٔ $[۰,۱)$ استفاده شد را ارائه می‌دهیم. درواقع فرض می‌کنیم چنین مجموعه‌ای که در قسمت «الف» گفته شده شماراست و به تناقض می‌رسیم. مثلاً فرض کنید این مجموعه را به شکل $<a_۱,a_۲,a_۳,...>$ لیست کرده‌ایم که a_iها مثلاً دنباله‌های اکید صعودی زیر هستند:

$a_۱:۱,۲,۳,۴,...$

$a_۲:۴,۵,۷,۵۰,...$

$a_۳:۱,۲,۳,۱۵,...$

$a_۴:۲,۴,۵,۶,...$

حال از دنبالهٔ $a_۱$ عدد اول را انتخاب کرده و به آن یک واحد اضافه می‌کنیم که ۲ می‌شود. از دنبالهٔ $a_۲$ عدد دوم را انتخاب کرده که ۵ است و به ماکزیمم این عدد و عدد قبلی یعنی ۲

یک واحد اضافه می‌کنیم که ۶ حاصل می‌شود.

از دنباله $a_۳$ عدد سوم یعنی ۳ را انتخاب کرده و به ماکزیمم این عدد و عدد قبلی که ۶ بود یک واحد اضافه می‌کنیم و عدد ۷ حاصل می‌شود.

از دنبالهٔ $a_۴$ عدد چهارم را انتخاب کرده و به ماکزیمم این عدد و عدد قبلی که ۷ بود یک واحد اضافه می‌کنیم و عدد ۸ حاصل می‌شود و به همین ترتیب. حال با این اعداد دنبالهٔ $a_i = <۲,۶,۷,۸,...>$ ساخته می‌شود و این دنباله در لیست قبلیِ $<a_۱,a_۲,a_۳,...>$ نیست زیرا این دنباله برابر هیچ یک از a_nها نیست چون عدد nام این دنباله از عدد nام a_n بزرگتر است به ازای هر n و این تناقض است.

ب) شماراست و شبیه اثبات شمارایی اعداد گویا می‌توان اثبات کرد:

دنباله‌های به طول یک : $۱, ۲, ۳, ۴, ...$

دنباله‌های به طول دو : $<۲,۱>, <۳,۲>, <۴,۳>, <۵,۴>, ...$

دنباله‌های به طول سه : $<۳,۲,۱>, <۴,۳,۲>, <۵,۴,۳>, <۶,۵,۴>, ...$

$\vdots$

حال شبیه اعداد گویا، ابتدا $a_۱ = ۱$ سپس $a_۲ = <۲,۱>$ و سپس $a_۳ = ۲$ و به همین ترتیب این دنباله‌ها لیست می‌شوند.

۴- گزینه (۲). دنباله معروفی است و حتماً اثبات آن را در منابع مختلف دیده‌اید. به غیر از اثبات که به عهدهٔ شما! می‌توان عددگذاری انجام داد. $D_۱ = ۰$ و $D_۲ = ۱$ (چرا؟) و $D_۳ = ۲$ ($<۲,۳,۱>$ و $<۳,۱,۲>$):

$۱)\ D_۳ = ۲D_۲ + D_۱ = ۲$

$۲)\ D_۳ = ۲(D_۲ + D_۱) = ۲$

$۳)\ D_۳ = ۳D_۲ - ۲D_۱ = ۳$ ×

$۴)\ D_۳ = ۲D_۲ = ۲$

حال مقدار $D_۴$ را بررسی می‌کنیم. $D_۴ = ۹$ (بررسی کنید. البته می‌دانیم فرمول غیربازگشتی این مسئله $D_n = n!\left(۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...\frac{(-۱)^n}{n!}\right)$ می‌باشد). حال گزینه‌ها:

$۱)\ D_۴ = ۳D_۳ + ۲D_۲ = ۶ + ۲ = ۸$ ×

$۲)\ D_۴ = ۳(D_۳ + D_۲) = \boxed{۹}$

$۴)\ D_۴ = ۳D_۳ = ۶$ ×

۵- گزینه (۳). الف) درست است فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $۲k+۱$ و $۹k+۴$ برابر x باشد پس $x|۲k+۱$ و $x|۹k+۴$ در نتیجه $x|۹(۲k+۱)$ و $x|۲(۹k+۴)$ یعنی $x|۱۸k+۹$ و $x|۱۸k+۸$ پس $x|(۱۸k+۹)-(۱۸k+۸)$ یعنی $x|۱$ پس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد $x=۱$ می‌باشد در نتیجه $۲k+۱$ و $۹k+۴$ نسبت به هم اول هستند.

ب) معادلهٔ $(n-۱)!+۱=n^۲$ را به شکل $(n-۱)!=(n^۲-۱)$ بازنویسی می‌کنیم و سپس چون $n=۱$ جواب معادله نیست طرفین را به $n-۱$ تقسیم می‌کنیم پس $(n-۲)!=(n+۱)$ حال دو منحنی $(n-۲)!$ و $(n+۱)$ فقط به ازای $n=۵$ تلاقی می‌کنند و بعد از آن یعنی به ازای $n>۵$ منحنی $(n-۲)!$ با رشد بسیار بیشتری نسبت به $n+۱$ حرکت می‌کند چون فاکتوریل از خطی رشد بسیار بیشتری دارد.

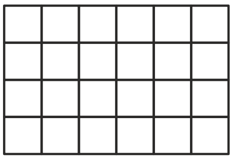
۶- گزینه (۳). برای نقض الف فرض کنید $R=\{(۱,۲)\}$ که ترایایی است حال $S=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$ که ترایایی نیست. توجه کنید چون $۱R۲$ پس $۱S۲$ و همچنین $۲S۱$ زیرا "$۱R۲ \vee ۲R۱ \leftrightarrow ۲S۱$" صحیح است.

قسمت «ب» درست است چون R هم‌ارزی است باعث می‌شود تمام زوج‌های R به S منتقل شود و زوج اضافه‌ای در S تولید نشود چون R مجموعه A را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز می‌کند و اعضای هر کلاس همگی در R با هم رابطه دارند که دقیقاً همین اعضا در S نیز با هم در رابطه خواهند بود.

۷- گزینه (۲). برای درک بهتر سؤال، گراف پترسن را در نظر بگیرید که در آن طول کوتاهترین دور برابر ۵ است و درجه تمامی رئوس $k=۳$ می‌باشد این گراف ۱۰ رأس و ۱۵ یال دارد و دوبخشی نیست که گزینه‌های ۳ و ۴ نقض می‌شوند. می‌توان ثابت کرد گرافی با مشخصات گفته شده حداقل $k^۲$ رأس دارد. اثبات به این شکل است که یک رأس را در نظر بگیرید این رأس k تا همسایه دارد و هر یک از این k همسایه $k-۱$ همسایه مجزای دیگر دارند (مجزا به این خاطر که حداقل طول سیکل ۵ است). پس حداقل تعداد رئوس برابر $۱+k+k(k-۱)=k^۲+۱$ می‌باشد که می‌توان گفت حداقل $k^۲$ که غلط نیست.

[پاسخنامه سؤال‌های IT ۱۴۰۱]

۸- گزینه (۴). تعداد کل مسیرها بدون شرط گفته شده $۲۱۰ = \frac{۱۰!}{۴!۶!}$ می‌باشد که از این تعداد باید تعداد مسیرهایی که ۱ یا ۲ بار تغییر جهت می‌دهند را کم کنیم. فقط ۲ مسیر وجود دارد که یک بار تغییر جهت می‌دهند، اگر حرکت به راست را با R و حرکت به بالا را با U نشان دهیم این دو مسیر عبارتند از:



RRRRRRUUUU , UUUURRRRRR

و تعداد ۸ مسیر وجود دارند که دو تغییر مسیر دارند:

RUUUURRRRR , RRUUUURRRR , RRRUUUURRR , RRRRUUUURR ,
RRRRRUUUUR , URRRRRRUUU , UURRRRRRUU , UUURRRRRRU

پس تعداد مسیرهای مطلوب برابر است با $۲۱۰ - ۲ - ۸ = ۲۰۰$

۹- گزینه (۱). الف) نادرست. برای بررسی یک روش ابتکاری ارائه می‌دهم. فرض کنیم عالَم سخن $\{۱,۲\}$ است آنگاه عبارت سمت چپ معادل $A(۱).A(۲) \to B(۱).B(۲)$ است و عبارت سمت راست معادل $(A(۱) \to B(۱)).(A(۲) \to B(۲))$ است. حال بررسی می‌کنیم این دو هم‌ارز هستند یا خیر. برای راحتی $A(۱)$ و $A(۲)$ و $B(۱)$ و $B(۲)$ را به ترتیب p و q و r و s می‌نامیم و مینترم‌های این دو عبارت را استخراج می‌کنیم. عبارت سمت چپ برابر است با:

$$\begin{aligned} p.q \to r.s &\equiv \overline{p.q} + r.s \equiv \overline{p} + \overline{q} + r.s \\ &\equiv (\overline{p} + \overline{q} + r)(\overline{p} + \overline{q} + s) \equiv \prod M(۱۱۰x\,,۱۱x۰) \\ &\equiv \prod M(۱۲,۱۳,۱۲,۱۴) = \sum m(۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۵) \end{aligned}$$

عبارت سمت راست برابر است با:

$$\begin{aligned} (p \to r).(q \to s) &\equiv (\overline{p} + r)(\overline{q} + s) \equiv \prod M(۱x۰x\,,x۱x۰) \\ &\equiv \prod M(۸,۹,۱۲,۱۳,۴,۵,۱۲,۱۴) \equiv \sum (۰,۱,۲,۳,۶,۷,۱۰,۱۱,۱۵) \end{aligned}$$

که مینترم‌های یکسان ندارند پس معادل نیستند. ولی عبارت سمت راست، عبارت سمت چپ را نتیجه می‌دهد چون مینترم‌هایش زیرمجموعه مینترم‌های عبارت سمت چپ است.

ب) درست. به ازای هر دو حالتِ a یعنی ۰ و ۱ بررسی می‌کنیم اگر a صفر باشد آنگاه $a \to b$ معادلِ ۱ می‌شود و $(a \wedge c) \to b$ نیز یک می‌شود پس کل عبارت داده شده ۱ می‌شود. اگر a یک باشد آنگاه عبارتِ داده شده معادل است با:

$$\big((1 \to b) \vee (c \to b)\big) \to \big((1 \wedge c) \to b\big) \equiv \big(b \vee (\overline{c} \vee b)\big) \to (c \to b)$$
$$\equiv b \to (c \to b) \equiv \overline{b} \vee (\overline{c} \vee b) \equiv (\overline{b} \vee b) \vee c \equiv 1$$

پس به ازای هر حالتِ a عبارتِ داده شده True است یعنی عبارت تاتولوژی است.

۱۰- گزینه (۲). الف) درست. اگر از یک مجموعهٔ ناشمارا یک بخش شمارا را حذف کنیم نتیجه ناشماراست و عدد اصلی آن با مجموعهٔ ناشمارای اصلی برابر است. پس A و $A-B$ هر دو ناشمارا هستند و کاردینالیتی یکسان دارند.

ب) اگر مجموعهٔ A نامتناهی باشد آنگاه کاردینالیتی A و $A \times A$ و $A \times A \times A$ و ... یکسان است پس کاردینالیتی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یکسان و هر دو معادلِ الف یک است.

۱۱- گزینه (۳). واضح است که $n^3(n^2+1) \overset{n^2+1}{\equiv} 0$ و $n(n^2+1) \overset{n^2+1}{\equiv} 0$ پس $n^3(n^2+1) \overset{n^2+1}{\equiv} n(n^2+1)$ یعنی $n^5+n^3 \overset{n^2+1}{\equiv} n^3+n$ با حذف n^3 از طرفین $n^5 \overset{n^2+1}{\equiv} n$. طبق صورت سؤال باید $n^5+3 \overset{n^2+1}{\equiv} 0$ حال چون n^5 و n با هم همنهشت هستند، جای n^5، n قرار می‌دهیم پس $n+3 \overset{n^2+1}{\equiv} 0$ پس باید $n+3 \ge n^2+1$ باشد چون $(n+3)=k(n^2+1)$. پس:

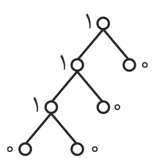
$$n+3 \ge n^2+1 \Rightarrow n^2-n-2 \le 0 \Rightarrow (n-2)(n+1) \le 0 \Rightarrow -1 \le n \le 2$$

تنها اعداد طبیعیِ n که در این نامساوی صدق می‌کنند $n=1,2$ می‌باشند.

البته در برخی منابع اعداد طبیعی $\{0,1,2,...\}$ است که گزینه ۱ صحیح می‌باشد ولی عدد طبیعی معمولاً $\{1,2,3,...\}$ در نظر گرفته می‌شود، که گزینه ۳ صحیح است.

۱۲- پاسخ صحیح وجود ندارد. اگر برای رابطهٔ R ابتدا بستار ترایایی و سپس بستار تقارنی بیابیم، خاصیت ترایایی لزوماً حفظ نمی‌شود. پس در بین ۶ رابطهٔ گفته شده روابط $f\big(g\big(h(R)\big)\big)$ و $g\big(f\big(h(R)\big)\big)$ و $g\big(h\big(f(R)\big)\big)$ لزوماً هم‌ارزی نیستند چون لزوماً ترایایی نیستند ولی سه رابطه دیگر هر سه خاصیتِ بازتابی و تقارنی و ترایایی را دارند پس هم‌ارزی هستند. کلید اولیه سؤال گزینه ۱ بود که سؤال حذف شد.

۱۳- گزینه (۲). الف) نادرست است و می‌توان با درخت مقابل آن را نقض کرد:



$H=3\,,\,n=7$

ب) درست است به ازای هر نود، فاصله‌اش تا نزدیکترین برگ حداکثر $\lg n$ است. این حداکثر برای درختِ تقریباً پر بدست می‌آید.

[پاسخنامه سؤال‌های علوم کامپیوتر ۱۴۰۱]

۱۴- گزینه (۱). به راحتی می‌توان با کوچک کردن مسئله بـه جـواب رسـید مـثلاً بـه ارای $n=۱$ مسئله ۳ جواب دارد یعنی ۳ تا رشته به طول یک وجـود دارد کـه مجمـوع تعـداد صـفرها و یک‌های ظاهر شده زوج باشد $(۴,۳,۲)$. به ازای $n=۱$ گزینه ۱ برابر ۳، گزینـه ۲ برابـر ۵− گزینه ۳ برابر ۴ و گزینه ۴ برابر ۱ می‌باشد که فقط گزینه ۱ می‌تواند درست باشد. تفکـر دوم در این سؤال این است که کل اعداد ۵^n است که حدوداً نصف آنها شرط مسئله را دارند. حل دقیق سؤال به این شکل است که فرض کنید A برابر تعداد رشـته‌هـای مطلـوب سـؤال و B برابر تعداد رشته‌های نامطلوب باشد آنگاه:

$$\begin{cases} A = \text{تعداد رشته‌های به طول } n \text{ که جمع ۰ها و ۱ها زوج است (زوج : ۰,۲,۴,...)} \\ B = \text{تعداد رشته‌های به طول } n \text{ که جمع ۰ها و ۱ها فرد است (فرد : ۱,۳,۵,...)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = ۳^n + \binom{n}{۲}۳^{n-۲}\times ۲^۲ + \binom{n}{۴}۳^{n-۴}\times ۲^۴ + \dots \\ B = \binom{n}{۱}۳^{n-۱}\times ۲ + \binom{n}{۳}۳^{n-۳}\times ۲^۳ + \binom{n}{۵}۳^{n-۵}\times ۲^۵ + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B = (۳+۲)^n \\ A-B = (۳-۲)^n = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۲A = ۵^n + ۱ \Rightarrow A = \frac{۵^n+۱}{۲}$$

۱۵- گزینه (۱).

$$A:۰/۹۶ \quad , \quad B:۰/۴۲ \qquad A\cap B:۰/۳۹$$

$$A\cup B = ۰/۹۶ + ۰/۴۲ - ۰/۳۹ = ۰/۹۹$$

$$\overline{A\cup B} = ۱ - ۰/۹۹ = ۰/۰۱$$

۱۶- گزینه (۳). مسئله توزیع ۹ شی متفاوت در ۴ جعبه یکسان است کـه راه حـل سـریعی بـرای مسئله وجود ندارد. جواب مسئله برابر است با:

$$A+B+C+D = \frac{\text{تعداد توابع پوشا از ۹ به ۴}}{۴!} + \frac{\text{تعداد توابع پوشا از ۹ به ۳}}{۳!} + \frac{\text{تعداد توابع پوشا از ۹ به ۲}}{۲!} + \frac{\text{تعداد توابع پوشا از ۹ به ۱}}{۱!}$$

$$A = \frac{۴^۹ - \binom{۴}{۱}۳^۹ + \binom{۴}{۲}۲^۹ - \binom{۴}{۳}}{۴!} = ۷۷۷۰$$

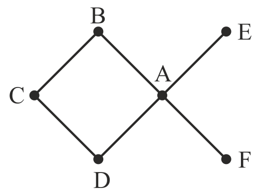
$$B=\frac{۳^{۹}-\binom{۳}{۱}۲^{۹}+\binom{۳}{۲}}{۳!}=۳۰۲۵$$

$$C=\frac{۲^{۹}-۲}{۲۱}=۲۵۵$$

$$D=۱$$

$$A+B+C+D=۷۷۷۰+۳۰۲۵+۲۵۵+۱=۱۱۰۵۱$$

۱۷- گزینه (۲). از رأس A شروع می‌کنیم و دو حالت در نظر می‌گیریم: A و C همرنگ و ناهمرنگ. حالت اول جواب $\underset{A}{k}\underset{B}{(k-۱)}\underset{C}{(۱)}\underset{D}{(k-۱)}\underset{E}{(k-۱)}\underset{F}{(k-۱)}$ و حالت دوم جواب $\underset{A}{k}\underset{B}{(k-۱)}\underset{C}{(k-۲)}\underset{D}{(k-۲)}\underset{E}{(k-۱)}\underset{F}{(k-۱)}$ می‌باشد پس چندجمله‌ای کروماتیک برابر است با جمع این دو که با فاکتورگیری از $k(k-۱)^{۳}$ داریم:



$$k(k-۱)^{۳}\left[(k-۱)+(k-۲)^{۲}\right]\Rightarrow f(k)=(k-۱)+(k-۲)^{۲}\Rightarrow f(۴)=۷$$

۱۸- گزینه (۳). هر دو گزاره صحیح هستند. «الف» فرض کنید G گرافی با حداقل $n=۱۱$ رأس و مسطح است آنگاه $e\le ۳n-۶$ پس $e\le ۲۷$ و گراف مکمل G دارای حداقل $n=۱۱$ رأس و $\frac{۱۱(۱۰)}{۲}-۲۷=۲۸$ یال است که رابطهٔ $e\le ۳n-۶$ برای آن برقرار نیست و مسطح نیست.

«ب» فرض کنید G گرافی همبند و مسطح با ۱۱ رأس باشد اگر $\delta(G)\ge ۵$ آنگاه $e\ge \frac{۵۵}{۲}$ و رابطهٔ $e\le ۳n-۶$ برقرار نخواهد بود که تناقض است. اگر G همبند و مسطح با ۱۰ رأس باشد و $\delta(G)\ge ۵$ آنگاه $e\ge \frac{۵۰}{۲}$ و رابطهٔ $e\le ۳(۱۰)-۶$ نقض می‌شود. به ازای هر تعداد رأس از ۶ رأس تا ۱۱ رأس این اثبات صحیح است. به ازای ۵ رأس نیز که بدیهی است درجهٔ ۵ وجود ندارد.

۱۹- گزینه (۱). اولین ۶ اگر رقم اول باشد $\frac{۶!}{۳!}$ حالت وجود دارد. اولین ۶ اگر رقم دوم باشد آنگاه رقم اول ۲ یا ۸ است و تعداد حالات این حالت $۲\times\frac{۵!}{۳!}$ می‌باشد. اگر اولین ۶ رقم سوم باشد

ارقام اول و دوم ۲ و ۸ هستند که ۲ حالت و سایر ارقام $\frac{۴!}{۳!}$ حالت دارند. اولـین ۶ نمـی‌توانـد رقم چهارم تا هفتم باشد پس جواب برابر است با:

$$\frac{۶!}{۳!}+۲\times\frac{۵!}{۳!}+۲\times\frac{۴!}{۳!}=۱۲۰+۴۰+۸=۱۶۸$$

۲۰- گزینه (۴).

$$\frac{۱+x^{۳}}{(۱+x)^{۳}}=(۱+x^{۳})(۱+x)^{-۳}=(۱+x^{۳})\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{-۳}{n}x^{n}$$

$$A=\binom{-۳}{۲}=\binom{۴}{۲}=۶$$

$$B=\binom{-۳}{۵}+\binom{-۳}{۲}=-\binom{۷}{۵}+\binom{۴}{۲}=-۲۱+۶$$

$$A+B=۶+(-۲۱)+۶=-۹$$

۲۱- گزینه (۴). اولین رقم ۹ حالت دارد. رقم دوم نیز ۹ حالـت دارد زیـرا مـی‌توانـد صـفر باشـد و نمی‌تواند با رقم اول برابر باشد. رقم سوم نیز ۹ حالت دارد چون نباید با رقم دوم برابـر باشـد. رقم چهارم نیز ۹ حالت دارد زیرا نباید با رقم سوم برابر باشد پس طبـق اصـل ضـرب جـواب $۹^{۴}=۶۵۶۱$ می‌باشد.

۲۲- گزینه (۲). فرض کنید a_n تعداد رشته‌هـای بـاینری بـه طـول n شـامل ۰۰۰ باشـد آنگـاه $a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}+a_{n-۳}+۲^{n-۳}$ و $a_۰=۰$ و $a_۱=۰$ و $a_۲=۰$ پس:

$$a_۳=۱\ ,\ a_۴=۳\ ,\ a_۵=۸\ ,\ a_۶=۲۰\ ,\ a_۷=۴۷$$

۲۳- گزینـه (۲). فـرض کنیـد افـراد a تـا g هســتند و مــثلاً در ۷ شــب متــوالی بــه صــورت < abd, ace, afg, bcf, beg, cdg, def > دعوت شده‌اند خود این وضـعیت !۷ حالـت دارد چون شب‌ها متفاوت هستند و !۷ جایگشت دارند. از این وضعیت‌ها ۳۰ حالـت وجـود دارد و کل حالات $۳۰\times۷!$ می‌شود. اثبات این ۳۰ حالت کمی حوصله و اعصاب می‌خواهد!

۲۴- گزینه (۳). تمام حالاتی که $p\vee q$ صفر باشد عبارت داده شده یک می‌شود که ایـن خـود ۴ حالت است (pgrs : ۰۰xx). تمام حالاتی که $r\vee s$ یک باشد عبارت داده شده یک می‌شـود که این خود ۱۲ حالـت اسـت (pgrs : xx۰۱, xx۱۰, xx۱۱) کـه از ۴ حالـت قبلـی حـالات

۰۰۱۱ و ۰۰۱۰ و ۰۰۰۱ در این ۱۲ حالت هستند و فقط حالت ۰۰۰۰ در این ۱۲ حالت نیست پس کل حالات ۱۳ می‌باشد.

۲۵- گزینه (۲). تعداد لانه‌ها $۸۴=۷\times۱۲$ می‌باشد و تعداد کبوترها n مجهول است و باید $\left\lceil \frac{n}{۸۴} \right\rceil=۳$ که حداقل n برابر است با $۱۶۹=۱+۸۴\times۲$.

۲۶- گزینه (۳).

$$۲۲=۲۰+۱+۱=\binom{۶}{۳}+۱+۱=$$ از هر رقم ۳ بار + ۶ بار رقم ۶ + ۷ بار رقم ۵

۲۷- گزینه (۱). این مجموعه دارای ۶۲۲ تا عدد است. هر سه عددی که حداقل یکی از آنها زوج باشد ضربشان زوج است. پس جواب این سؤال می‌شود تعداد حالاتی که می‌توان ۳ عدد متفاوت از ۶۲۲ عدد انتخاب کرد منهای تعداد حالاتی که هر سه عدد فرد هستند. تعداد اعداد فرد در مجموعه ۳۱۱ تاست پس جواب برابر است با:

$$\binom{۶۲۲}{۳}-\binom{۳۱۱}{۳}$$

۲۸- گزینه (۴). از مجموعهٔ آغاز اعداد ۲ و ۵ را فعلاً نادیده بگیرید با ۶ عدد دیگر تعداد $۱۰^۶$ تابع می‌توان ساخت حال برای ۲ و ۵ تعدادِ ۵۵ حالت وجود دارد زیرا هر ترکیبِ با تکرار ۲ تا از ۱۰ تا یک حالت است که $۵۵=\binom{۱۰+۲-۱}{۲}$ حالت می‌شود پس جواب مسئله ۵۵×۱۰^۶ می‌باشد.

۲۹- گزینه (۲). اولاً توجه کنید که به ۶ حالت می‌توان ۳ خانه از یک جدول ۳×۳ را با خاصیت گفته شده سیاه کرد:

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

۱۵۹ , ۱۶۸ , ۲۴۹ , ۲۶۷ , ۳۵۷ , ۳۴۸

حال گوییم کافی است ۳ سطر و ۳ ستون متمایز از جدول ۸×۱۰ انتخاب کنیم که $\binom{۱۰}{۳}\binom{۸}{۳}$ حالت دارد و این انتخاب را به ۶ حالت رنگ کنیم که جواب مسئله گزینه ۲ می‌شود.

۳۰- گزینه (۱).

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(n+1)-3\right)x^n$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-3\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{2}{(1-x)^2}-\frac{3}{1-x}$$

۳۱- گزینه (۴). معادلهٔ مشخصه $x^2-4x+4=0$ و ریشه‌ها ۲ و ۲ می‌باشد پس جواب رابطه $a_n=(c_1+c_2n)2^n$ می‌باشد که با توجه به شروط اولیه $c_1=-1$ و $c_2=3$ پس $a_n=(3n-1)2^n$ پس $a_{43}=(3\times 43-1)2^{43}=128\times 2^{43}=2^{50}$ پس جواب ۵۰ است.

۳۲- گزینه (۳). معادلهٔ مشخصه «الف» $4x^2-4x+1=0$ و ریشه‌ها $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ و شکل کلی جواب $a_n=(c_1+c_2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ می‌باشد که به ازای هر c_1 و c_2 با افزایش n یعنی $n\to\infty$ این دنباله به صفر همگرا می‌شود. معادلهٔ مشخصه «ب» $6x^2-7x+2=0$ و ریشه‌ها $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ است. پس شکل کلی جواب $a_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ این نیز با افزایش n یعنی $n\to\infty$ به صفر همگراست.

۳۳- گزینه (۲). به جز رئوسِ مجاور، هر دو رأس دیگر همسایهٔ مشترک دارند. به $\binom{10}{2}=45$ حالت می‌توان ۲ رأس انتخاب کرد که ۱۵ حالت از این تعدادِ دو رأس مجاور هستند پس جواب سؤال $45-15=30$ می‌باشد.
