به‌نام خداوند جان و خرد

پوران پژوهش

مجموعه مهندسی برق و مکانیک

سیستم‌های کنترل خطی

چاپ نهم

مؤلف:

امین رضایی

عضو هیئت علمی دانشگاه بناب

زمستان ۱۳۹۷

هُوَ اللَّهُ الَّذِی لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ عَالِمُ الْغَیْبِ وَالشَّهَادَةِ هُوَ الرَّحْمَنُ الرَّحِیمُ

«اوست خدای یکتایی که غیر او خدایی نیست که دانای نهان و آشکار عالم است و بخشنده و مهربان است.»

همه ما با واژه کلیدی کنترل آشنا هستیم و معنی لغوی آن را می‌دانیم و هر روزه خواسته یا ناخواسته کاربرد کنترل را در تمامی امور زندگی لمس می‌کنیم و در یک کلام امروزه تصور زندگی بدون واژه کنترل بسیار دشوار است. یکی از دروازه‌های ورود به تفکر کنترلی و سیستمی درس سیستم‌های کنترل خطی است. این درس یکی از دروس اصلی رشته مهندسی برق و مکانیک است و یادگیری خوب و مفهومی آن کمک شایانی برای تسریع یادگیری در دروس وابسته به آن می‌کند. مولف برای رفع نیاز دانشجویان و کمک به یادگیری بهتر مطالب درس سیستم‌های کنترل خطی و موفقیت هرچه بیشتر و بهتر دانشجویان در آزمون‌های مختلف، بر خود واجب دانست که بعد از سال‌ها تدریس در دانشگاه‌ها با تکیه و تاکید بر اصول، نکات مهم و اساسی درس را به صورت مفهومی بیان کرده و با حل مثال‌های مختلف و متنوع خواننده کتاب را ترغیب به یادگیری عمیق مطالب و مفاهیم کتاب کند. علاوه بر آن در این کتاب می‌خواهیم مطالب را به گونه‌ای بیان کنیم تا فردی بعد از مطالعه کتاب تفکری کنترلی و سیستمی کسب کند. در تالیف این کتاب سعی بر تسهیل یادگیری مطالب به صورت مفهومی بوده و از این رو در بسیاری از موارد راه حل مثال‌ها به صورت کاملاً تشریحی بیان شده است تا خواننده محترم به طور کامل با حل مسائل آشنایی پیدا کند.

این کتاب در ده فصل طبقه‌بندی شده و شامل ۴۷۰ مثال توضیحی در متن درس و ۶۴۵ سوال چهارگزینه‌ای در انتهای هر فصل است. مثال‌های متن درس در فهم اصول کنترل خطی کمک بسیار زیادی می‌کند و حل مسائل انتهای هر فصل نیز مهارت شما را در تحلیل سریع مسائل افزایش خواهد داد. سوالات چهار گزینه‌ای شامل تمامی سوالات کنکور کارشناسی ارشد سراسری در رشته‌های برق و مکانیک از سال ۶۷ الی ۹۷ و سوالات کنکور دکتری رشته‌های برق و مکانیک از سال ۹۱ الی ۹۷ است که برای سوالات ارشد پاسخی کاملاً مفهومی و تشریحی و برای سوالات دکتری پاسخی کلیدی ارائه شده است.

برای دریافت مطالب تکمیلی و انگیزشی در زمینه تالیفات بنده (سیستم‌های کنترل خطی، الکترونیک، زبان تخصصی مهندسی برق) می‌توانید به کانال تلگرامی **@AminRezaeiControl** مراجعه نمایید.

با کمال میل بر خود لازم می‌دانم تا مراتب تشکر و قدردانی را به همسر عزیزم خانم **مهندس زیبا عباس‌زاده** که زحمات طاقت فرسایی جهت ویرایش علمی کتاب کشیده و همچنین برای هر چه بهتر شدن مطالب کتاب از هیچ کوشش، کمک و حمایتی دریغ نورزیدند، داشته باشم.

از استادان بزرگوار جناب آقای **دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی** (استاد دانشگاه تهران) و جناب آقای **دکتر محمدعلی نکویی** (دانشیار دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی) سپاسگزارم که بنده را با مفاهیم عمیق سیستم‌های کنترل و عرصه‌های جدیدی از دانش و حقیقت آشنا نمودند.

در خاتمه از جناب آقای دکتر احمد هژبر، ریاست محترم موسسه پوران پژوهش و جناب آقای حسین رحیمی، مدیریت محترم چاپ آن موسسه که همفکری و صحبت با این بزرگواران در طول تالیف کتاب، همواره انرژی بخش بوده و در به ثمر رسانیدن کار بسیار محبت و لطف کرده‌اند، نهایت سپاس را دارم.

امین رضایی

تهران - آذر ماه ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل۱ مفاهیم اولیه سیستم های کنترل

۰- مقدمه ۱

۱- سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته ۲

۱-۱ سیستم‌های کنترل حلقه باز ۲

۱-۲ سیستم‌های کنترل حلقه بسته ۳

۱-۳ مثال‌های عملی از سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته ۳

۱-۴ مقایسه سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته ۴

۲- طبقه‌بندی سیستم‌های کنترل ۵

۲-۱ سیستم‌های خطی و غیرخطی ۵

۲-۲ سیستم‌های کنترل متغیر با زمان و نامتغیر با زمان ۶

۲-۳ سیستم‌های کنترل داده - پیوسته و داده – گسسته ۶

۲-۴ سیستم‌های کنترل رگولاتور و ردیاب ۷

۲-۵ سیستم‌های کنترل سرومکانیزم و فرایند ۷

۲-۶ سیستم‌های کنترل اتوماتیک و دستی ۷

۲-۷ سیستم‌های کنترل مستقیم و غیرمستقیم ۷

۲-۸ سیستم‌های کنترل SISO و MIMO ۸

فصل۲ نمایش سیستم های کنترل

۰- مقدمه ۹

۱- معادله دیفرانسیل سیستم ۹

۲- پاسخ ضربه سیستم ۱۰

۳- تابع تبدیل سیستم ۱۰

۳-۱ مفهوم تابع تبدیل ۱۰

۳-۲ خواص تابع تبدیل ۱۱

۳-۳ ارتباط بین تابع تبدیل و پاسخ ضربه سیستم ۱۲

۳-۴ ارتباط بین تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل سیستم ۱۲

۳-۵ فرم‌های مختلف تابع تبدیل ۱۲

۳-۶ معادله مشخصه سیستم ۱۳

۳-۷ صفرها و قطب‌های سیستم ۱۳

۳-۸ سره و ناسره بودن سیستم ۱۴

۳-۹ تعیین مقادیر اولیه و نهایی پاسخ سیستم ۱۵

۳-۱۰ بررسی پیوستگی پاسخ سیستم ۱۶

۳-۱۱ تابع تبدیل سیستم‌های چند متغیره ۱۷

۴- نمودار بلوکی ۲۰

۴-۱ مفهوم نمودار بلوکی ۲۰

۴-۲ ویژگی‌های نمودار بلوکی ۲۱

۴-۳ اجزاء نمودار بلوکی ۲۱

۴-۴ بررسی نمودار بلوکی سیستم حلقه بسته ساده ۲۲

۴-۵ نمودار بلوکی سیستم‌های چند متغیره ۲۴

۴-۶ روش جبری تعیین تابع تبدیل کلی سیستم از روی نمودار بلوکی آن ۲۴

۴-۷ نمودار بلوکی سیستم کنترل فیدبکی چند متغیره و تابع تبدیل آن ۲۵

۴-۸ ساده‌سازی نمودارهای بلوکی ۲۶

۵- نمودار گذر سیگنال ۳۱

۵-۱ تعاریف مربوط به نمودارهای گذر سیگنال ۳۱

۵-۲ رسم نمودار گذر سیگنال ۳۲

۵-۳ جبر نمودار گذر سیگنال ۳۴

۶- فرمول بهره میسون ۳۵

۶-۱ کاربرد فرمول بهره میسون بین گره‌های خروجی و گره‌های غیرورودی ۴۰

۷- تبدیل نمودار بلوکی به نمودار گذر سیگنال ۴۱

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۴۴

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۵۳

فصل۳ نمایش و تحلیل فضای حالت

۰– مقدمه ۶۳

۱- مفاهیم اولیه فضای حالت ۶۵

۲- معادلات حالت ۶۶

۲-۱ نمایش کلی معادلات حالت سیستم ۶۶

۲-۲ معادلات دینامیکی سیستم‌های خطی ۶۷

۳- نمودار حالت ۶۸

۳-۱ رسم نمودار حالت از روی مدل حالت و تعیین تابع تبدیل ۶۸

۳-۲ بدست آوردن معادلات حالت از روی نمودار حالت ۷۱

۳-۳ بدست آوردن معادلات حالت از روی نمودار بلوکی یا نمودار گذر سیگنال ... ۷۳

۴- تعیین معادلات حالت سیستم از روی تابع تبدیل ۷۵

۴-۱ نمایش فضای حالت با استفاده از متغیرهای فاز ۷۶

۴-۲ نمایش فضای حالت با استفاده از فرمول بهره میسون ۸۲

۴-۳ نمایش فضای حالت به وسیله تجزیه توابع تبدیل ۸۵

۴-۴ نمایش فضای حالت با تجزیه مستقیم تابع تبدیل ۸۵

۴-۵ نمایش فضای حالت با تجزیه متوالی تابع تبدیل ۸۹

۴-۶ نمایش فضای حالت با تجزیه موازی تابع تبدیل ۹۰

۵- تعیین تابع تبدیل از روی مدل حالت ۹۳

۶- معادله مشخصه و مقادیر ویژه ۹۵

۷- تبدیل همانندی و قطری سازی ماتریس سیستم ۹۶

۸- ماتریس انتقال حالت ۹۸

۸-۱ خواص ماتریس انتقال حالت ۹۹

۸-۲ محاسبه ماتریس انتقال حالت ۹۹

۹- حل معادله حالت و معادله انتقال حالت ۱۰۵

۹-۱ حل معادله حالت ناهمگن در حوزه زمان ۱۰۵

۹-۲ حل معادله حالت ناهمگن در حوزه لاپلاس ۱۰۶

۱۰- کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری ۱۰۸

۱۰-۱ کنترل‌پذیری سیستم‌های خطی ۱۰۹

۱۰-۲ روش‌های تعیین کنترل‌پذیری ۱۰۹

۱۰-۳ مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی ۱۱۲

۱۰-۴ روش‌های تعیین مشاهده‌پذیری ۱۱۳

۱۰-۵ بررسی اثر حذف صفر و قطب روی کنترل‌پذیری و مشاهده پذیری ۱۱۶

۱۱- نقاط تعادل و خطی‌سازی سیستم‌های غیرخطی ۱۱۸

۱۱-۱ نقاط تعادل ۱۱۸

۱۱-۲ خطی سازی سیستم‌های غیرخطی ۱۱۹

۱۱-۳ خطی‌سازی سیستم غیرخطی در فضای حالت ۱۲۰

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۱۲۲

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک..... ۱۲۸

فصل ۴ مدلسازی سیستم های دینامیکی

۰- مقدمه ۱۳۷

۱- مدلسازی سیستم‌های مکانیکی ۱۳۸

۱-۱ حرکت انتقالی ۱۳۸

۱-۲ حرکت دورانی ۱۳۹

۱-۳ سیستم‌های مکانیکی انتقالی ۱۴۰

۱-۴ سیستم‌های مکانیکی دورانی..... ۱۴۵

۲- مدلسازی سیستم‌های الکتریکی ۱۴۷

۳- تشابه سیستم‌های الکتریکی و مکانیکی ۱۴۹

۴- سیستم‌های چرخ دنده ۱۵۳

۵- مدلسازی سیستم‌های هیدرولیکی ۱۵۵

۵-۱ شیر و مخزن هیدرولیکی..... ۱۵۵

۵-۲ مدلسازی سیستم سطح مایع با یک مخزن..... ۱۵۶

۵-۳ سیستم‌های سطح مایع سری بدون تداخل ۱۵۷

۵-۴ سیستم‌های سطح مایع سری دارای تداخل ۱۵۸

۶- مدلسازی سیستم‌های گرمایی ۱۵۹

۷- سیستم‌های تاخیردار ۱۵۹

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۱۶۱

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۱۶۵

فصل ۵ عملکرد سیستم های کنترل فیدبکی

۰- مقدمه..... ۱۶۹

۱- ساختارهای کنترلی حلقه باز و حلقه بسته ۱۷۰

۱-۱ ساختار کنترلی حلقه باز ۱۷۰

۱-۲ ساختار کنترلی حلقه بسته ۱۷۱

۱-۳ اثر فیدبک روی مشخصات عملکرد سیستم ۱۷۱

۲- اثر فیدبک روی بهره کل سیستم ۱۷۱

۳- اثر فیدبک روی پایداری سیستم ۱۷۲

۴- اثر فیدبک روی پاسخ گذرا ۱۷۲

۵- اثر فیدبک روی خطای سیستم ۱۷۳

۵-۱ خطای سیستم حلقه باز ۱۷۳

۵-۲ خطای سیستم حلقه بسته ۱۷۳

۵-۳ مقایسه خطاهای حلقه‌باز و حلقه‌بسته ۱۷۳

۶- اثر فیدبک روی پهنای باند و پاسخ فرکانسی ۱۷۵

۶-۱ اثر فیدبک روی فرکانس قطع پایین ۱۷۶

۶-۲ اثر فیدبک روی فرکانس قطع بالا..... ۱۷۶

۶-۳ اثر فیدبک روی پهنای باند ۱۷۶

۷- اثر فیدبک روی حساسیت سیستم ۱۷۶

۷-۱ مفهوم ریاضی حساسیت ۱۷۷

۷-۲ حساسیت سیستم حلقه باز نسبت به تغییرات $G(s)$ ۱۷۸

۷-۳ حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به تغییرات $G(s)$ ۱۷۸

۷-۴ حساسیت سیستم حلقه بسته نسبت به تغییرات $H(s)$..... ۱۷۹

۷-۵ حساسیت $T(s)$ نسبت به پارامترهای α و β در توابع $G(s)$ و $H(s)$ ۱۷۹

۷-۶ حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته $T(s,\alpha)$ نسبت به پارامتر α ۱۸۰

۷-۷ تابع حساسیت و مکمل آن ۱۸۱

۸- اثر فیدبک روی اغتشاش و نویز ۱۸۶

۸-۱ اغتشاش‌های ورودی و خروجی فرایند در سیستم حلقه باز ۱۸۶

۸-۲ اغتشاش‌های ورودی و خروجی فرایند در سیستم حلقه بسته ۱۸۷

۸-۳ نویز در ورودی و خروجی سنسور در سیستم حلقه بسته ۱۸۷

۸-۴ هم ارزی کاهش حساسیت و کاهش اغتشاش در سیستم حلقه بسته ۱۸۹

۹- اثر فیدبک روی صفرها و قطب‌های سیستم ۱۹۱

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۱۹۸

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۲۰۲

فصل ۶ تحلیل پایداری سیستم های خطی

۰- مقدمه..... ۲۰۷

۱- انواع پایداری..... ۲۰۷

۲- پایداری ورودی کراندار – خروجی کراندار ۲۰۸

۲-۱ پایداری BIBO و پاسخ ضربه..... ۲۰۸

۲-۲ پایداری BIBO و معادله مشخصه سیستم..... ۲۰۹

۲-۳ پایداری BIBO مرزی..... ۲۰۹

۲-۴ پایداری BIBO و تابع تبدیل سیستم..... ۲۱۱

۳- پایداری مجانبی..... ۲۱۲

۳-۱ پایداری مجانبی و مؤلفه‌های پاسخ ورودی صفر..... ۲۱۲

۳-۲ پایداری مجانبی و ریشه‌های معادله مشخصه..... ۲۱۲

۳-۳ پایداری مجانبی مرزی..... ۲۱۲

۴- پایداری داخلی..... ۲۱۳

۴-۱ بررسی پایداری داخلی یک سیستم متعارف..... ۲۱۳

۴-۲ تعریف پایداری داخلی در فضای حالت..... ۲۱۵

۴-۳ پایداری داخلی و پایداری BIBO..... ۲۱۵

۴-۴ پایداری داخلی و پایداری مجانبی..... ۲۱۵

۴-۵ مقایسه پایداری سیستم‌های خطی و غیرخطی..... ۲۱۶

۵- تعیین پایداری سیستم‌های LTI ۲۱۶

۵-۱ شرایط لازم برای پایداری..... ۲۱۷

۶- معیار پایداری راث..... ۲۱۸

۶-۱ معیار راث و توانایی‌های آن..... ۲۱۸

۶-۲ معیار راث و محدودیت‌های آن..... ۲۱۹

۶-۳ تشکیل آرایه راث و معیار پایداری راث..... ۲۱۹

۶-۴ حالت‌های ویژه در آرایه راث..... ۲۲۲

۶-۵ بررسی آرایه راث در حالت ویژه (I)..... ۲۲۲

۶-۶ بررسی آرایه راث در حالت ویژه (II)..... ۲۲۶

۶-۷ کالبد شکافی آرایه راث در حالت ویژه (II)..... ۲۲۹

۶-۸ مباحث تکمیلی آرایه راث..... ۲۳۱

۷- کاربرد معیار راث در سیستم‌های کنترل ۲۳۶

۷-۱ تعیین محدوده پایداری سیستم ۲۳۷

۷-۲ تعیین مقدار بحرانی k و فرکانس نوسانات مانا ۲۴۵

۷-۳ تعیین پایداری در فضای حالت ۲۴۸

۷-۴ تعیین مقدار نهایی پاسخ سیستم ۲۴۹

۸- تحلیل پایداری نسبی با روش راث ۲۵۰

۹- معیار پایداری راث برای سیستم‌های تاخیردار ۲۵۲

۱۰- معیارهای پایداری هرویتز و لینارد – چیپارت ۲۵۳

۱۰-۱ معیار پایداری هرویتز ۲۵۳

۱۰-۲ معیار پایداری لینارد – چیپارت ۲۵۴

۱۰-۳ ارتباط بین دترمینان‌های هرویتز و درایه‌های ستون اول آرایه راث ۲۵۵

۱۱- بررسی پایداری چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب مختلط ۲۵۵

۱۱-۱ تعمیم معیار راث ۲۵۵

۱۱-۲ معیار علامت جفت ۲۵۶

۱۱-۳ کاربرد بررسی ناحیه ریشه‌های چندجمله‌ای با ضرایب مختلط ۲۵۷

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۲۵۹

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۲۶۹

فصل۷ تحلیل سیستم‌های کنترل در حوزه زمان

۰- مقدمه ۲۸۹

۱- پاسخ گذرا و پاسخ مانا ۲۹۰

۱-۱ پاسخ گذرای سیستم ۲۹۰

۱-۲ پاسخ مانا ۲۹۰

۲- انواع سیگنال‌های ورودی ۲۹۰

۲-۱ سیگنال‌های آزمون استاندارد ۲۹۱

۲-۲ ویژگی‌ها و انتخاب مناسب سیگنال‌های آزمون استاندارد ۲۹۱

۳- سیستم‌های مرتبه اول ۲۹۳

۳-۱ پارامترهای سیستم مرتبه اول ۲۹۳

۳-۲ پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول ۲۹۴

۳-۲ پاسخ پله سیستم مرتبه اول ۲۹۵

۳-۳ پاسخ شیب سیستم مرتبه اول ۲۹۹

۳-۴ ارتباط بین پاسخ‌های ضربه، پله و شیب در سیستم مرتبه اول ۳۰۰

۴- سیستم‌های مرتبه دوم ۳۰۰

۴-۱ سیستم مرتبه دوم استاندارد ۳۰۰

۴-۲ پاسخ پله سیستم مرتبه دوم استاندارد ۳۰۵

۴-۳ تعریف و محاسبه پارامترهای پاسخ گذرای سیستم‌های مرتبه دوم ۳۱۰

۴-۴ نکات تکمیلی درباره مشخصات پاسخ گذرا ۳۱۷

۴-۵ پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم استاندارد ۳۲۴

۴-۶ پاسخ شیب سیستم مرتبه دوم استاندارد ۳۲۷

۵- پاسخ و خطای حالت ماندگار در سیستم‌های کنترل ۳۲۷

۵-۱ تعریف سیگنال خطا و خطاهای حالت ماندگار ۳۲۸

۵-۲ تحلیل خطای حالت ماندگار با تابع تبدیل حلقه باز و ثابت‌های استاتیکی خطا ۳۳۱

۵-۳ خطاهای دینامیکی و سری خطا ۳۴۰

۵-۴ تحلیل خطای حالت ماندگار با تابع تبدیل حلقه بسته ۳۴۱

۵-۵ تحلیل خطای حالت ماندگار با روش تروکسال ۳۴۴

۵-۶ تحلیل خطای حالت ماندگار در فضای حالت ۳۴۷

۵-۷ تحلیل اثر اغتشاش‌ها در خروجی و خطای حالت ماندگار ۳۴۹

۵-۸ تعریف نوع سیستم با توجه به نقطه ورود سیگنال به سیستم ۳۵۵

۶- انتگرال‌های عملکرد ۳۵۸

۶-۱ معیار انتگرال مجذور خطا (ISE) ۳۵۸

۶-۲ معیار انتگرال قدر مطلق خطا (IAE) ۳۵۹

۶-۳ معیار انتگرال حاصلضرب زمان در مجذور خطا (ITSE) ۳۵۹

۶-۴ معیار انتگرال حاصل ضرب زمان در قدر مطلق خطا (ITAE) ۳۶۰

۷- آثار افزودن صفر و قطب به سیستم مرتبه دوم استاندارد ۳۶۲

۷-۱ افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز ۳۶۲

۷-۲ افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه بسته ۳۶۳

۷-۳ افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه بسته ۳۶۳

۷-۴ توضیحاتی در مورد پدیده پایین زدگی ۳۶۴

۷-۵ افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز ۳۶۵

۸- قطب‌های غالب تابع تبدیل ۳۶۶

۹- تقریب سیستم‌های مرتبه بالاتر ۳۶۷

۹-۱ تقریب سیستم‌های کنترل با روش تطبیق پاسخ فرکانسی ۳۷۱

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۳۷۳

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۳۹۳

فصل۸ روش مکان ریشه ها

۰- مقدمه ۴۲۵

۱- توانایی‌های روش مکان ریشه‌ها ۴۲۶

۲- مفهوم مکان ریشه‌ها ۴۲۶

۳- مساله کلی مکان ریشه‌ها ۴۲۸

۴- اصول اساسی روش مکان ریشه‌ها ۴۲۸

۴-۱ فرم استاندارد معادله مشخصه مکان ریشه‌ها ۴۲۸

۴-۲ شرط‌های اندازه و زاویه ۴۲۹

۴-۳ تعبیر گرافیکی شرط‌های اندازه و فاز ۴۳۰

۵- روش‌های رسم مکان ریشه‌ها ۴۳۴

۶- ویژگی‌ها و قواعد رسم مکان ریشه‌ها ۴۳۴

۶-۱ نقاط شروع و ختم ۴۳۵

۶-۲ تعداد شاخه‌های مکان ریشه‌ها ۴۳۵

۶-۳ تقارن مکان ریشه‌های کامل ۴۳۵

۶-۴ مکان ریشه‌ها روی محور حقیقی ۴۳۷

۶-۵ مجانب‌های مکان ریشه‌ها ۴۳۸

۶-۶ نقاط شکست مکان ریشه‌ها ۴۴۱

۶-۷ زاویه ورود به صفرحلقه باز و زاویه خروج از قطب حلقه باز ۴۵۱

۶-۸ محل برخورد مکان ریشه‌ها با محور موهومی ۴۵۶

۷- بررسی و تحلیل مکان ریشه‌های دو مساله کلیدی ۴۶۱

۸- رسم مکان ریشه‌ها در صورت حذف صفر و قطب درتابع تبدیل ۴۷۱

۹- رسم مکان ریشه‌ها برای سیستم‌های نامینیمم فاز ۴۷۳

۱۰- آثار افزودن صفر و قطب به تابع تبدیل روی مکان ریشه‌ها ۴۷۴

۱۱- آثار جابجا کردن صفر و قطب تابع تبدیل روی مکان ریشه‌ها ۴۷۵

۱۲- تعامد مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهره ثابت ۴۷۶

۱۳- رسم کانتور ریشه‌ها ۴۷۶

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۴۷۸

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۵۰۱

فصل۹ تحلیل سیستم‌های کنترل در حوزه زمان

۰- مقدمه ۵۲۳

۱- تابع تبدیل سینوسی و پاسخ فرکانسی ۵۲۴

۱-۱ مزایای تحلیل پاسخ فرکانسی ۵۲۵

۱-۲ معایب روش پاسخ فرکانسی ۵۲۶

۱-۳ نمایش تصویری پاسخ فرکانسی ۵۲۷

۱-۴ مقایسه پایداری در حوزه فرکانس و حوزه زمان ۵۲۷

۲- نمودارهای بود ۵۲۷

۲-۱ مزایای نمودارهای بود ۵۲۹

۲-۲ رسم نمودارهای بود برای عوامل پایه ۵۲۹

۲-۳ روش کلی برای رسم نمودارهای بود ۵۳۵

۲-۴ سیستم‌های مینیمم فاز و نامینیمم فاز ۵۳۶

۲-۵ سیستم‌های تمام گذر ۵۳۸
۲-۶ تعیین نوع سیستم و ثابت‌های خطا از روی نمودارهای بود ۵۳۸
۲-۷ تعیین تجربی توابع تبدیل ۵۴۱
۲-۸ نکاتی درباره تعیین تجربی توابع تبدیل ۵۴۳

۳- نمودارهای قطبی ۵۴۶
۳-۱ مزایا و معایب نمودار قطبی ۵۴۷
۳-۲ رسم نمودار قطبی ۵۴۷
۳-۳ شکل کلی نمودارهای قطبی ۵۵۱
۳-۴ نمودارهای قطبی معکوس ۵۵۲
۳-۵ نمودار قطبی چند سیستم متعارف ۵۵۳

۴- نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز ۵۵۵

۵- معیار پایداری نایکوئیست ۵۵۶
۵-۱ ویژگی‌های معیار نایکوئیست ۵۵۶
۵-۲ تعریف دور زدن و محاط بودن ۵۵۷
۵-۳ اصل آرگومان یا قضیه نگاشت ۵۵۸
۵-۴ مسیر نایکوئیست ۵۵۹
۵-۵ منحنی نایکوئیست ۵۵۹
۵-۶ پایداری سیستم حلقه باز و حلقه بسته ۵۶۲
۵-۷ معیار پایداری نایکوئیست ۵۶۳
۵-۸ اعمال معیار پایداری نایکوئیست به نمودار قطبی وارون ۵۷۳
۵-۹ تحلیل پایداری سیستم‌های چندحلقه‌ای ۵۷۳
۵-۱۰ پایداری سیستم‌های کنترل خطی تأخیردار ۵۷۴
۵-۱۱ تحلیل پایداری نسبی با استفاده از مسیرهای نایکوئیست اصلاح شده ۵۷۵

۶- حاشیه فاز و حاشیه بهره ۵۷۶

۷- ارتباط بین پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی ۵۸۴
۷-۱ پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم استاندارد ۵۸۴
۷-۲ همبستگی بین پاسخ زمانی و پاسخ فرکانسی در سیستم مرتبه دوم ۵۸۶
۷-۳ همبستگی بین پاسخ زمانی و پاسخ فرکانسی در سیستم‌های مرتبه بالاتر ۵۸۷

۸- پاسخ فرکانسی حلقه بسته ۵۹۰
۸-۱ دایره‌های M – ثابت ۵۹۱
۸-۲ تعیین پیک تشدید و فرکانس تشدید با استفاده از دوایر M – ثابت ۵۹۲
۸-۳ دایره‌های N – ثابت ۵۹۳
۸-۴ نمودار نیکولز ۵۹۴
۸-۵ پاسخ فرکانسی حلقه بسته برای سیستم‌های با فیدبک غیرواحد ۵۹۵
۸-۶ تنظیم بهره به ازای یک مقدار مشخص پیک تشدید ۵۹۵

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۵۹۷

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۶۴۱

فصل ۱۰ طراحی جبران سازها

۰- مقدمه ۶۸۳

۱- رهیافت‌های طراحی جبران‌سازها ۶۸۴

۲- انواع جبران‌سازها ۶۸۴
۲-۱ جبران‌ساز پیش‌فاز ۶۸۵
۲-۲ جبران‌ساز پس‌فاز ۶۸۶
۲-۳ جبران‌ساز پس‌فاز - پیش‌فاز ۶۸۷

۳- طراحی جبران‌سازها با روش مکان ریشه‌ها ۶۸۸
۳-۱ طراحی جبران‌ساز پیش‌فاز با روش مکان ریشه‌ها ۶۸۸
۳-۲ طراحی جبران‌ساز پس‌فاز با روش مکان ریشه‌ها ۶۹۲

۴- طراحی جبران‌سازها با روش پاسخ فرکانسی ۶۹۴
۴-۱ طراحی جبران‌ساز پیش‌فاز با روش پاسخ فرکانسی ۶۹۵
۴-۲ طراحی جبران‌ساز پس‌فاز با روش پاسخ فرکانسی ۶۹۶

۵- اثرات و محدودیت‌های جبران‌سازها ۶۹۸
۵-۱ اثرات جبران‌ساز پیش‌فاز ۶۹۶
۵-۲ اثرات و محدودیت‌های کنترل پس‌فازی ۶۹۷
۵-۳ مقایسه جبران‌سازها ۶۹۷

۶- جبرانسازهای ساده و صنعتی ۷۰۰

۷- پایدارسازی با جبران‌سازهای پایدار ۷۰۵

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۷۰۶

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک ۷۱۸

سوالات آزمون‌های ارشد برق و مکانیک سال‌های ۹۵ الی ۹۷ ..... ۷۳۵

پاسخ آزمون‌های ارشد برق و مکانیک سال‌های ۹۵ الی ۹۷ ..... ۷۵۲

سوالات آزمون‌های دکتری برق و مکانیک سال‌های ۹۱ الی ۹۷ ..... ۷۷۶

کلید آزمون‌های دکتری برق و مکانیک سال‌های ۹۱ الی ۹۷ ..... ۸۱۲

منابع و مراجع ۸۱۳

فصل ۱ مفاهیم اولیه سیستم های کنترل

مقدمه

این فصل مقدمه‌ای کوتاه درباره تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل است و در آن انواع سیستم‌های کنترل را معرفی کرده و آنها را به صورت کیفی مقایسه خواهیم کرد و برای درک بیشتر مفاهیم، مثال‌هایی عملی نیز ارائه می‌دهیم. اما در ابتدا تعاریف و اصطلاحات پایه مورد استفاده در کنترل را بیان می‌کنیم.

دستگاه، فرایند و سیستم هر جسم فیزیکی تحت کنترل مانند یک کوره گرمایی یا یک راکتور شیمیایی **دستگاه** یا **پلنت** و یک عمل ترتیبی پیش‌رونده، که تا منجر شدن به یک هدف خاص، یک نتیجه یا یک محصول نهایی ادامه می‌یابد، **فرایند** و ترکیبی از اجزا که با هم برای انجام یک هدف مشخص کار می‌کنند به طوری که انجام این کار توسط هیچ یک از عناصر به تنهایی امکان‌پذیر نباشد **سیستم** نامیده می‌شود. تعریف سیستم را علاوه بر سیستم‌های فیزیکی می‌توان به سیستم‌های اقتصادی، زیستی و ... نیز تعمیم داد و معمولاً هر کاری که باید کنترل شود نیز فرایند نامیده می‌شود.

ورودی و خروجی سیستم مجموعه‌ای از سیگنال‌های خواسته یا ناخواسته که از بیرون بر سیستم وارد می‌شوند ورودی سیستم و مجموعه‌ای از سیگنال‌های دریافتی از سیستم یا پاسخ سیستم را خروجی سیستم می‌نامند. ورودی سیستم‌ها اهداف کنترلی و خروجی آنها نتیجه کنترل می‌باشند بنابراین عملکرد سیستم کنترلی با مقایسه ورودی و خروجی ارزیابی می‌شود.

متغیر کنترل شونده و کنترلی متغیری که اندازه‌گیری یا کنترل می‌شود و اغلب خروجی سیستم است متغیر **کنترل شونده** و متغیری که تغییر داده می‌شود تا بر متغیر کنترل شونده تاثیر بگذارد، متغیر **کنترلی** نامیده می‌شود.

سنسور، ترنسدیوسر و ترنسمیتر سنسور، قطعه‌ای برای اندازه‌گیری متغیر کنترل شونده، ترنسدیوسر قطعه‌ای برای تبدیل سیگنالی از شکلی به شکل دیگر (الکتریکی) و ترنسمیتر، قطعه‌ای برای انتقال سیگنالی از نقطه‌ای به نقطه دیگر است.

اغتشاش و نویز سیگنال‌های ناخواسته‌ای که اثر نامطلوبی روی خروجی و عملکرد سیستم‌های کنترلی دارند، عملکرد آنها را تضعیف کرده و کنترل را پیچیده‌تر می‌کنند. اما با این تفاوت که **اغتشاش** سیگنال ناخواسته

معینی است که می‌توان آن را به صورت یک تابع ریاضی زمانی بیان کرد و پاسخ سیستم را به آن مشخص کرد و **نویز** سیگنال ناخواسته تصادفی است که نمی‌تواند به صورت یک تابع ریاضی برحسب زمان بیان شود و از تابع آماری طیف توان برای بیان مشخصات آن استفاده می‌شود. اغتشاش و نویز به دو شکل می‌باشند یکی **اغتشاش و نویز داخلی** که در داخل سیستم تولید می‌شوند و دیگری **اغتشاش و نویز خارجی** که در خارج از سیستم تولید شده و به عنوان ورودی سیستم عمل می‌کنند.

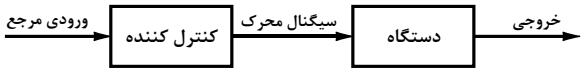
فیدبک و کنترل فیدبکی عملی که در آن خروجی به ورودی بازخورانده شود، فیدبک یا پسخورد نامیده می‌شود. خروجی فیدبکی همفاز یا ناهمفاز با ورودی است که به ترتیب **فیدبک مثبت** و **فیدبک منفی** نامیده می‌شوند. کنترل فیدبکی عملی است که می‌کوشد در حضور اغتشاش، اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی مرجع را مینیمم کند و این کوشش بر اساس این اختلاف صورت می‌گیرد. اغلب سیستم‌های کنترلی دارای فیدبک منفی‌اند و از فیدبک مثبت در نوسان‌سازها استفاده می‌شود.

۱ سیستم های کنترل حلقه باز و حلقه بسته

سیستم‌های کنترل با توجه به حضور یا عدم حضور فیدبک به ترتیب به سیستم‌های کنترل حلقه‌بسته و حلقه‌باز طبقه‌بندی می‌شوند. در ادامه این سیستم‌ها را معرفی کرده و به بررسی و تحلیل کیفی آنها می‌پردازیم و در حین مقایسه آنها، با مفهوم، مزایا و معایب فیدبک به طور کامل آشنا می‌شویم.

۱–۱ سیستم‌های کنترل حلقه باز

سیستم‌هایی که در آنها خروجی بر عمل کنترلی هیچ تأثیری ندارد **سیستم‌های کنترل حلقه‌باز** نامیده می‌شوند. در این سیستم‌ها خروجی نه اندازه‌گیری می‌شود و نه برای مقایسه با ورودی فیدبک می‌شود.



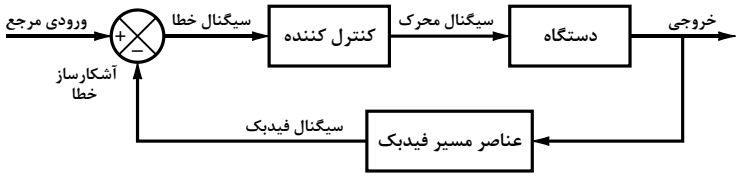
شکل ۱–۱ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل حلقه باز

- سیستم‌های کنترل حلقه باز سیستم‌های دارای فیدبک نیستند.
- هر سیستم کنترلی که بر اساس زمانبندی کار کند سیستم حلقه باز است.
- در سیستم کنترل حلقه باز، خروجی با ورودی مقایسه نمی‌شود و برای هر ورودی مرجع یک شرایط کاری معین وجود دارد لذا دقت سیستم به کالیبراسیون (تنظیم) آن بستگی دارد.
- سیستم حلقه باز در حضور اغتشاش نمی‌تواند وظیفه خود را به طور مطلوب انجام دهد زیرا وقتی خروجی به واسطه اغتشاش‌ها تغییر می‌کند، ورودی جهت تصحیح خروجی تغییر نمی‌کند و تغییرات در خروجی به وسیله تغییر دادن ورودی به طور دستی تصحیح می‌شود.
- در عمل زمانی می‌توان از سیستم حلقه باز استفاده کرد که رابطه ورودی - خروجی معلوم بوده و هیچ یک از اغتشاشات داخلی و خارجی در سیستم حضور نداشته باشند.

۱–۲ سیستم‌های کنترل حلقه بسته

سیستمی که برای ایجاد ارتباط مطلوب بین خروجی و ورودی مرجع، از مقایسه و تفاضل آنها استفاده می‌کند **سیستم کنترل فیدبک‌دار** یا **سیستم کنترل حلقه بسته** نامیده می‌شوند.

- در عمل عبارت‌های کنترل حلقه بسته و کنترل فیدبکی به جای یکدیگر استفاده می‌شوند.
- در یک سیستم کنترل حلقه بسته سیگنال خطای محرک که تفاوت بین سیگنال ورودی و سیگنال فیدبکی است، به کنترل‌کننده خورانده می‌شود تا این که خطا را کاهش دهد و خروجی سیستم را به یک مقدار مطلوب برساند. ورودی مرجع مطابق با خروجی مطلوب است.
- سیگنال فیدبکی می‌تواند سیگنال خروجی یا تابعی از آن، مشتقات یا انتگرال‌های آن باشد.
- کنترل حلقه بسته همواره به استفاده از عمل کنترل فیدبکی به منظور کاهش خطای سیستم اشاره دارد.



شکل ۱–۲ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل حلقه بسته

نمودار بلوکی یک سیستم کنترل حلقه بسته در شکل ۱–۲ نشان داده شده است. که شامل آشکارساز خطا، کنترل کننده، پلنت و عناصر مسیر فیدبک (سنسور، ترنسدیوسر و ترنسمیتر) است. نحوه عملکرد سیستم حلقه بسته به صورت زیر می‌باشد:

مسیر فیدبک ابتدا متغیر کنترل شونده توسط سنسور اندازه‌گیری می‌شود. سپس توسط ترنسدیوسر سیگنال اندازه‌گیری شده معمولاً به شکل الکتریکی تبدیل می‌شود زیرا نه تنها کار با سیگنال الکتریکی آسان است بلکه به آسانی تقویت و انتقال می‌یابد. حال اگر مقایسه‌کننده در فاصله‌ای دورتر از متغیر خروجی قرار گرفته باشد از ترنسمیتر جهت انتقال کمیت تبدیل شده (خروجی ترنسدیوسر) به طرف مقایسه کننده استفاده می‌شود. در واقع عناصر مسیر فیدبک خروجی را به یک سیگنال با بعد و واحد سیگنال مرجع تبدیل می‌کنند. سیگنال فیدبک متناسب با خروجی است و به آشکارساز خطا خورانده می‌شود.

مسیر پیشرو سیگنال خطا که به وسیله آشکارساز خطا تولید می‌شود تفاوت بین سیگنال مرجع و سیگنال فیدبکی است. کنترل کننده، سیگنال خطا را برای تولید عمل کنترلی بهتر اصلاح و تقویت می‌کند. سیگنال خطای اصلاح شده به عنوان متغیرکنترلی برای تصحیح خروجی به پلنت خورانده می‌شود.

۱–۳ مثال‌های عملی از سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته

سیستم گرمایشی اتاق یک سیستم گرم کننده اتاق بدون سنسور دما مثالی از یک سیستم کنترل حلقه باز است. در این سیستم یک اجاق الکتریکی برای گرم کردن اتاق استفاده می‌شود و خروجی، دمای مطلوب اتاق است. دمای اتاق به وسیله گرمایی که توسط عنصر گرم کننده تولید می‌شود بالا می‌رود. دمای خروجی به مدت زمان روشن بودن اجاق بستگی دارد. زمان روشن- خاموش بودن اجاق با مقداری محاسبه تعیین می‌شود.

دمای اتاق هر چه باشد بعد از زمان تنظیم شده، اجاق خاموش خواهد شد. دمای واقعی با دمای مرجع مقایسه نمی‌شود و تفاوت آنها برای تصحیح استفاده نمی‌شود. سیستم فوق را می‌توان به یک سیستم حلقه بسته تبدیل کرد اگر یک ترموستات برای اندازه‌گیری دمای واقعی استفاده شود و دمای واقعی با مرجع مقایسه شده و تفاوت آنها برای کنترل زمان روشن بودن اجاق استفاده شود. در این سیستم دمای اتاق صرفنظر از شرایط بیرونی در یک سطح مطلوبی نگه داشته می‌شود.

سیستم کنترل ترافیک سیستم کنترل ترافیک به وسیله سیگنال‌های ترافیکی که بر اساس زمانبندی کار می‌کنند، یک سیستم کنترل حلقه باز تشکیل می‌دهند. مراحل سیگنال‌های کنترلی بر مبنای بازه زمانی است که برای هر سیگنال داده شده است. بازه‌های زمانی بر اساس مطالعه ترافیک تعیین می‌شوند. این سیستم تراکم ترافیک را قبل از دادن سیگنال‌ها اندازه نمی‌گیرد و سیگنال‌هایی را به ترتیب صرفنظر از ترافیک واقعی تولید می‌کند. چون بازه‌های زمانی با تراکم ترافیک تغییر نمی‌کنند سیستم یک سیستم کنترل حلقه باز است. سیستم کنترل ترافیک حلقه باز را می‌توان به سیستم حلقه بسته تبدیل کرد اگر بازه‌های زمانی سیگنال‌ها بر اساس تراکم ترافیک باشند. در یک سیستم کنترل ترافیک حلقه بسته، چگالی ترافیک در همه جهات اندازه‌گیری می‌شود و اطلاعات به یک کامپیوتر خورانده می‌شود و زمانبندی سیگنال‌های کنترل به وسیله کامپیوتر بر اساس تراکم ترافیک تعیین می‌شوند. چون سیستم حلقه بسته به طور دینامیکی زمانبندی را تغییر می‌دهد عبور خودروها بهتر از حالت سیستم حلقه باز خواهد بود.

ماشین لباسشویی یک ماشین لباسشویی بدون سیستم اندازه‌گیری تمیزی، مثالی از یک سیستم حلقه باز است. در این سیستم خیساندن، شستن و آبکشی بر اساس زمانبندی انجام می‌شود. زمان روشن بودن ماشین بر اساس بعضی محاسبات تعیین می‌شود. ماشین، سیگنال خروجی را که تمیزی لباس‌ها است اندازه نمی‌گیرد. وقتی زمان روشن بودن تنظیم شده، تمام می‌شود ماشین به طور اتوماتیک و بدون توجه به سطح تمیزی لباس‌ها خاموش می‌شود. این سیستم را می‌توان به یک سیستم کنترل حلقه بسته تبدیل کرد اگر سطح تمیزی اندازه‌گیری شود و با تمیزی مطلوب (ورودی مرجع) مقایسه گردد و تفاوت آنها برای کنترل زمان شستن ماشین استفاده شود.

۱-۴ مقایسه سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته

یک سیستم کنترل حلقه باز را می‌توان به وسیله فیدبک اصلاح کرد و به یک سیستم حلقه بسته تبدیل کرد. وجود فیدبک به طور اتوماتیک تغییرات در خروجی به واسطه اغتشاش‌ها را تصحیح می‌کند. بنابراین سیستم کنترل حلقه بسته یک سیستم کنترل **اتوماتیک** نامیده می‌شود. یک امتیاز سیستم کنترل حلقه بسته این است که استفاده از فیدبک پاسخ سیستم را نسبت به اغتشاشات خارجی و تغییرات داخلی در پارامترهای سیستم غیرحساس می‌کند. بنابراین می‌توان از عناصر با هزینه کم و دقت متوسط برای بدست آوردن کنترل دقیق یک پلنت معین استفاده کرد در حالی که انجام آن در مورد سیستم حلقه باز غیرممکن است. از نقطه نظر پایداری ساختن سیستم کنترل حلقه باز پایدار آسان است زیرا در آن پایداری سیستم مسأله عمده‌ای نیست اما پایداری در سیستم‌های حلقه بسته مسأله‌ای است که ممکن است به تصحیح بیش از اندازه خطاها منجر شود و می‌تواند باعث نوسانات ثابت یا متغیر دامنه شود. باید تاکید کرد که برای سیستم‌هایی که ورودی

برحسب زمان معلوم است و در معرض اغتشاش قرار ندارند، پیشنهاد می‌شود کنترل حلقه باز استفاده گردد. امتیاز سیستم‌های کنترل حلقه بسته تنها زمانی است که اغتشاشات غیرقابل پیش‌بینی و/یا تغییرات غیرقابل پیش‌بینی در اجزاء سیستم وجود داشته باشند. توجه کنید که میزان توان خروجی تقریباً هزینه، وزن و اندازه یک سیستم کنترل را تعیین می‌کند. تعداد اجزایی که در یک سیستم حلقه بسته استفاده می‌شود بیشتر از سیستم حلقه باز متناظر است بنابراین در کل سیستم کنترل حلقه بسته از نظر توان و هزینه بالا است. برای کاهش توان لازم می‌توان یک سیستم کنترل حلقه باز را هر جا که قابل کاربرد باشد، استفاده کرد. ترکیب مناسبی از کنترل‌های حلقه باز و حلقه بسته معمولاً خیلی گران نیستند و عملکرد رضایت بخشی را نتیجه می‌دهند. مزایا و معایب سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته در جدول ۱-۱ خلاصه شده است.

جدول ۱-۱ مقایسه ویژگی‌های سیستم‌های کنترل حلقه بسته و حلقه باز

سیستم کنترل حلقه بسته	سیستم کنترل حلقه باز
۱- پیچیده و هزینه‌بر هستند.	۱- ساده و اقتصادی‌اند.
۲- توان زیادی مصرف می‌کنند.	۲- توان کمتری مصرف می‌کنند.
۳- ساخت آسانی ندارند و تعداد اجزاء زیادی لازم دارند.	۳- ساختن آنها آسان است و تعداد اجزاء کمتری دارند.
۴- پایداری در آنها مسأله‌ای اساسی است و دقت زیادی برای طراحی یک سیستم حلقه بسته پایدار لازم است.	۴- پایداری در آنها مسأله اساسی نیست و به طور کلی سیستم‌های حلقه باز پایدارند.
۵- این سیستم‌ها دقت و قابلیت اطمینان بالایی دارند.	۵- این سیستم‌ها غیردقیق و غیرقابل اطمینان هستند.
۶- تغییرات در خروجی به واسطه اغتشاشات خارجی به طور اتوماتیک تصحیح می‌شوند بنابراین آنها به نویز و سایر اغتشاشات کمتر حساس‌اند.	۶- تغییرات در خروجی به واسطه اغتشاشات خارجی به طور اتوماتیک تصحیح نمی‌شوند لذا آنها به نویز و سایر اغتشاشات خیلی حساس‌اند.
۷- فیدبک بهره کل سیستم را کاهش می‌دهد.	
۸- فیدبک در یک سیستم حلقه بسته ممکن است به پاسخ نوسانی منجر شود زیرا ممکن است خطاها را زیاد تصحیح کند لذا باعث نوسانات ثابت یا متغیر دامنه شود.	

۲ طبقه بندی سیستم های کنترل

سیستم‌های کنترل براساس مشخصه خاصی از آنها طبقه‌بندی می‌شوند. البته طبقه‌بندی‌های زیادی می‌توان برای سیستم‌های کنترل ارائه کرد که در زیر برخی از مشهورترین آنها را بررسی می‌کنیم.

۲-۱ سیستم‌های خطی و غیرخطی

طبقه‌بندی سیستم‌های کنترل به خطی و غیرخطی با توجه به روش تحلیل و طراحی آنها صورت می‌گیرد. اگر معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستمی دارای ضرایبی تنها تابعی از متغیر مستقل یا ضرایبی ثابت باشد و اصل جمع آثار در آن صدق کند آن را **سیستم خطی** می‌نامند. بنابراین برای سیستم خطی پاسخ به چندین ورودی را می‌توان به وسیله اعمال یک ورودی در هر لحظه و جمع نتایج آنها محاسبه کرد. متاسفانه هیچ سیستم فیزیکی در طبیعت کاملاً خطی نیست بنابراین فرضیاتی برای رسیدن به یک مدل خطی در نظر

گرفته می‌شوند که مصالحه‌ای بین سادگی مدل ریاضی و دقت نتایج بدست آورده شده از آن می‌باشد. البته همیشه بدست آوردن یک مدل خطی معتبر در حضور یک خطی‌گری بسیار قوی یا در حضور اثرات اغتشاشی که نمی‌توانند بوسیله پارامترهای فشرده بیان شوند، امکان‌پذیر نیست.

سیستم‌های کنترل خطی مدل‌های ایده‌آل‌سازی شده‌ای هستند که به وسیله تحلیل‌گر جهت سادگی طراحی و تحلیل ساخته شده‌اند. وقتی اندازه سیگنال‌ها در یک سیستم به گستره‌ای محدود شود که در آن اجزاء سیستم مشخصات خطی از خود نشان دهند، سیستم اساساً خطی است اما وقتی اندازه سیگنال‌ها خارج از گستره عملکرد خطی باشند، بسته به شدت غیرخطی‌گری، سیستم نباید خیلی خطی فرض شود. اثرات غیرخطی متداولی که در سیستم‌های کنترل روی آنها متمرکز می‌شوند می‌توان به اشباع، خلاصی، بازه مرده بین اجزاء کوپل شده گیربکس، مشخصات فنر غیرخطی، نیرو یا گشتاور اصطکاک غیرخطی بین اجزاء متحرک اشاره کرد. اغلب مشخصه‌های غیرخطی به طور عمدی در یک سیستم کنترل برای بهبود عملکرد آن یا برای تأمین کنترل موثر بیشتر در آن قرار داده می‌شود. برای مثال، برای رسیدن به کنترل زمان مینیمم یک نوع کنترل ON-OFF در سیستم‌های کنترل فضاپیما و موشک استفاده می‌شود. برای سیستم‌های خطی ابزارهای ریاضی قدرتمندی مانند تبدیل فوریه و لاپلاس در دسترس هستند همچنین تکنیک‌های تحلیلی و گرافیکی زیادی برای اهداف طراحی و تحلیل وجود دارد. از طرف دیگر، سیستم‌های غیرخطی معمولاً تحلیل ریاضی مشکلی دارند و روش‌های کلی قابل دسترسی برای حل طبقه وسیعی از سیستم‌های کنترل وجود ندارد.

۲–۲ سیستم‌های کنترل متغیر با زمان و نامتغیر با زمان

وقتی پارامترهای یک سیستم کنترل در طول عملکرد سیستم نسبت به زمان ثابت باشند، آن را **سیستم نامتغیر با زمان** می‌نامند. اگر پارامترهای سیستم کنترل در طول کارکرد سیستم نسبت به زمان تغییر کند، **سیستم متغیر با زمان** نامیده می‌شود. در معادله دیفرانسیل توصیف کننده یک سیستم خطی اگر ضرایب معادله دیفرانسیل توصیف کننده تابعی از زمان باشند آنگاه سیستم، خطی متغیر با زمان است. و از طرفی اگر ضرایب معادله دیفرانسیل توصیف کننده ثابت باشند آنگاه سیستم، خطی نامتغیر با زمان است. در عمل سیستم‌های فیزیکی شامل عناصری هستند که با زمان تغییر می‌کنند. برای مثال مقاومت سیستم پیچ یک موتور الکتریکی با افزایش دمای آن تغییر خواهد کرد یا یک سیستم کنترل موشک که در آن جرم موشک در طول پرواز آن به دلیل مصرف سوخت کاهش می‌یابد. تحلیل و طراحی سیستم‌های متغیر با زمان خطی معمولاً خیلی پیچیده‌تر از سیستم‌های LTI می‌باشند.

۲–۳ سیستم‌های کنترل داده – پیوسته و داده – گسسته

یک سیستم کنترل داده - پیوسته سیستمی است که در آن سیگنال‌ها در قسمت‌های مختلف سیستم توابعی پیوسته از زمان هستند و از جمله در همه سیستم‌های کنترل داده - پیوسته، سیگنال‌ها ممکن است به دو صورت ac یا dc طبقه‌بندی شود. در یک سیستم کنترل ac سیگنال‌ها در سیستم به وسیله بعضی از روش‌های مدولاسیون، مدوله شده هستند. یک سیستم کنترل dc بدین معنی نیست که در آن فقط سیگنال‌های ثابت dc (به تعریف متداول آن) وجود دارند، بلکه اشاره می‌کند که سیگنال‌ها نامدوله هستند اما سیگنال‌های ac (به تعریف متداول آن) وجود دارد. در عمل، همه سیستم‌های کنترل اکیداً ac یا اکیداً dc نیستند و می‌توانند

ترکیبی از سیستم‌های ac و dc باشند و از مدولاتورها و دمدولاتورها برای تطبیق سیگنال‌ها در نقاط مختلف در سیستم استفاده می‌شود. سیستم‌های کنترل داده -گسسته متفاوت از سیستم‌های کنترل داده - پیوسته هستند و در آنها سیگنال‌ها در یک یا چند نقطه سیستم به شکل قطار ضربه یا کد دیجیتال می‌باشند. این سیستم‌ها به دو بخش سیستم‌های کنترل داده نمونه‌ای و دیجیتال تقسیم می‌شوند. سیستم‌های کنترل داده - نمونه‌ای، کلاس کلی‌تری از سیستم‌های کنترل داده - گسسته است که در آنها سیگنال‌ها در فرم داده‌های پالسی هستند.

۲–۴ سیستم‌های کنترل رگولاتور و ردیاب

سیستم‌های کنترل با توجه به نوع سیگنال ورودی مرجع به سیستم‌های رگولاتور و ردیاب طبقه‌بندی می‌شوند. سیستم‌هایی که در آنها هدف کنترل، تنظیم خروجی در یک مقدار مطلوب و ثابت است را سیستم‌های **کنترل رگولاتور** می‌نامند. خروجی چنین سیستم‌هایی سطح مایع، غلظت، فشار، دما و ... است و سیستم‌هایی که در آنها هدف کنترل، دنبال کردن یک مقدار مطلوب متغیر با زمان است را سیستم‌های **کنترل ردیاب** می‌نامند. خروجی چنین سیستم‌هایی معمولاً سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور، فرکانس، ولتاژ یا جریان است مانند دنبال کردن هواپیما توسط موشک.

۲–۵ سیستم‌های کنترل سرومکانیزم و فرایند

سیستم‌های کنترل با توجه به نوع متغیر تحت کنترل به سیستم‌های سرومکانیزم و فرایند طبقه‌بندی می‌شوند. سیستم کنترل اتوماتیک با فیدبک منفی که در آن متغیر کنترل شونده، موقعیت مکانیکی یا مشتقات زمانی آن، مانند سرعت و شتاب است را سیستم کنترل **سرومکانیزم** می‌نامند. سیستم کنترل اتوماتیکی که در آن خروجی یک متغیر مانند دما، فشار، جریان سیال، سطح مایع و ... است را سیستم کنترل **فرایند** می‌نامند.

۲–۶ سیستم‌های کنترل اتوماتیک و دستی

سیستم‌های کنترل با توجه به حضور انسان به عنوان بخشی از سیستم به سیستم‌های کنترل دستی و اتوماتیک طبقه‌بندی می‌شوند. سیستمی‌که خروجی واقعی را در حضور اغتشاش‌ها در یک مقدار مطلوب نگه می‌دارد یا برای یک ورودی مرجع به آرامی تغییر می‌کند سیستم **کنترل اتوماتیک** نامیده می‌شود ولی در سیستمی‌که انسان به عنوان بخشی از سیستم مانند سنسور یا سیگنال محرک عمل می‌کند، سیستم **کنترل دستی** نامیده می‌شود.

۲–۷ سیستم‌های کنترل مستقیم و غیرمستقیم

بعضی وقت‌ها اگر اندازه‌گیری مقدار خروجی مورد نظر مشکل بوده و یا امکان‌پذیر نباشد، آنگاه یک متغیر ثانویه برای کنترل لازم می‌شود. این کار، **کنترل غیرمستقیم** نامیده می‌شود. اما همیشه اندازه‌گیری و کنترل مستقیم متغیر اولیه (که حالت سیستم را مشخص می‌کند) به منظور بدست آوردن بهترین نتیجه مطلوب است. این کار، **کنترل مستقیم** نامیده می‌شود.

۸–۲ سیستم‌های کنترل SISO و MIMO

سیستم‌های کنترل با توجه به تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها به چهار دسته سیستم‌های تک ورودی - تک خروجی (SISO)، سیستم‌های چند ورودی - تک خروجی (MISO)، سیستم‌های تک ورودی - چند خروجی (SIMO) و سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی (MIMO) تقسیم می‌شوند.

سخن آخر لازم است بدانید که در این کتاب از انواع سیستم‌های کنترلی که وجود دارد تنها به تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل خطی نامتغیر با زمان خواهیم پرداخت و در واقع این نوع سیستم کنترل، ساده‌ترین نوع برای تحلیل و طراحی می‌باشد و به ریاضیات خیلی پیشرفته‌ای نیاز ندارد و هدف از مطالعه این سیستم‌ها این است که بدون درگیری با مباحث ریاضی سطح بالا، اندیشیدن سیستمی را یاد بگیریم. توصیه می‌شود برای یادگیری بهتر و عمیق مطالب کنترلی سعی کنید تمامی مباحث کنترلی را به دنیای پیرامون خود چه به صورت جدی و چه به صورت طنز آمیز پیوند بزنید و خلاصه کلام این که با مباحث کنترلی درگیر شوید و یادگیری عمیق آنها را دغدغه جدی زندگی خود قرار دهید و لذت ببرید.

فصل ۲

نمایش سیستم های کنترل

مقدمه

نخستین گام مهم در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی تعیین مدل ریاضی فرایند تحت کنترل است. مدل ریاضی سیستم دینامیکی، مجموعه‌ای از معادلات است که رفتار دینامیکی سیستم را به طور کامل و دقیق یا به طور مناسب و خوبی نمایش می‌دهد. برای یک سیستم معین، مدل ریاضی یکتا نیست و بسته به نگرش شخص، شرایط کار و نیز نوع تاکید در مدلسازی، مدل‌های ریاضی متفاوتی برای یک سیستم وجود دارد. مناسب بودن یک مدل برای یک سیستم به خود سیستم و وضعیت‌های جنبی بستگی دارد. وقتی مدل ریاضی یک سیستم بدست آورده شد، آنگاه ابزارهای ریاضی در دسترس را می‌توان برای تحلیل و طراحی سیستم به‌کار برد. برای نمایش مدل ریاضی سیستم‌های کنترل روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از:

۱- معادله دیفرانسیل	۲- پاسخ ضربه	۳- تابع تبدیل
۴- نمودار بلوکی	۵- نمودار گذر سیگنال	۶- فضای حالت

برخی از این روش‌ها برای نمایش سیستم‌های خطی و بعضی برای هر دو سیستم خطی و غیرخطی به کار می‌روند. پنج روش اول را در این فصل به طور کامل بررسی می‌کنیم و روش ششم به دلیل اهمیت و تفاوت آن، در فصل سوم به طور مفصل و مفهومی بررسی خواهد شد.

۱ معادله دیفرانسیل سیستم

با استفاده از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم می‌توان رفتار دینامیکی بسیاری از سیستم‌ها را با معادلات دیفرانسیل توصیف کرد به عبارتی رابطه میان ورودی و خروجی سیستم را با یک معادله دیفرانسیل بیان کرد. در یک سیستم LTI مرتبه n، اگر $c(t)$ خروجی و $r(t)$ ورودی سیستم باشد، رابطه میان ورودی و خروجی سیستم را می‌توان با معادله دیفرانسیل مرتبه n نشان داد

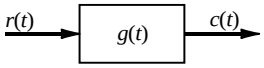
$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 r(t)$$

ضرایب a_0، a_1، ... ، a_n و b_0، b_1، ... ، b_m ثابت و حقیقی‌اند. اگر $r(t)$ به ازای $t \geq t_0$ و شرایط اولیه خروجی و مشتقات آن تا مرتبه $n-1$ در زمان اولیه $t = t_0$ معلوم باشند می‌توان $c(t)$ را به ازای $t \geq t_0$ از حل

معادله بالا بدست آورد. اما حل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا، خسته‌کننده و پیچیده است بنابراین در تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل به ندرت صورت اصلی معادله دیفرانسیل به کار می‌رود. به نظر می‌رسد معادلات دیفرانسیل خیلی به کار نمی‌آیند اما نگران نباشید زیرا با استفاده از تابع تبدیل سیستم که برای بدست آوردن آن می‌توان از معادله دیفرانسیل سیستم استفاده کرد، در تحلیل و طراحی سیستم‌ها نیازی به حل کامل معادلات دیفرانسیل سیستم نخواهیم داشت.

۲ پاسخ ضربه سیستم

فرض کنید یک سیستم LTI دارای ورودی $r(t)$ و خروجی $c(t)$ باشد اگر ورودی سیستم تابع ضربه واحد $\delta(t)$ باشد خروجی سیستم را پاسخ ضربهٔ سیستم $g(t)$ می‌نامند. می‌توان سیستم LTI را مطابق شکل ۲-۱ به وسیله پاسخ ضربه‌اش مشخص کرد.



شکل ۲-۱ نمایش سیستم با پاسخ ضربه

از روی پاسخ ضربه می‌توان خروجی را به ازای سایر ورودی‌ها نیز محاسبه کرد زیرا سیستم‌های LTI از نوع سیستم‌های کانولوشن می‌باشند به این معنی که خروجی آنها را می‌توان از کانولوشن پاسخ ضربه سیستم با ورودی دلخواه محاسبه نمود پس یک مدل معتبر برای سیستم‌های LTI، نمایش آن با پاسخ ضربه است.

$$c(t) = g(t) * r(t) \quad \Rightarrow \quad c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

محاسبه انتگرال کانولوشن بسیار طولانی و خسته کننده است، بنابراین باید مانند معادلات دیفرانسیل سیستم، پاسخ ضربه را نیز با ترفندی مناسب به ابزار قدرتمند نظریه کنترل خطی یعنی تابع تبدیل مرتبط کنیم تا برای یافتن جواب تا حدودی از شر انتگرال کانولوشن خلاص شویم.

نکته تابع ضربه $\delta(t)$ یک تابع خیالی است و در عمل پالسی با عمر کوتاه (در مقایسه با ثابت زمانی‌های مهم سیستم) را می‌توان ضربه در نظر گرفت و با تحریک سیستم با یک ورودی ضربه‌ای و یافتن پاسخ، اطلاعات کامل مربوط به مشخصات دینامیکی را بدست آورد.

۳ تابع تبدیل سیستم

یکی از مزایای سیستم‌های LTI این است که برای تحلیل و طراحی آنها می‌توان از تبدیل لاپلاس معروف و محبوب استفاده کرد و تبدیل لاپلاس خود را در ابزار قدرتمندی به نام تابع تبدیل نشان می‌دهد.

۳-۱ مفهوم تابع تبدیل

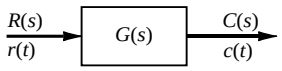
نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به تبدیل لاپلاس ورودی تحت شرایط اولیه صفر را تابع تبدیل گویند

$$\text{تابع تبدیل} = \left.\frac{\text{تبدیل لاپلاس خروجی}}{\text{تبدیل لاپلاس ورودی}}\right|_{\text{شرایط اولیه صفر}}$$

بنابراین تابع تبدیل یک مدل ریاضی است که متغیر خروجی را به متغیر ورودی مرتبط می‌کند. اگر $R(s)$ و $C(s)$ تبدیل لاپلاس‌های ورودی و خروجی و $G(s)$ تابع تبدیل سیستم باشند آنگاه می‌توان نوشت:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

یک سیستم LTI را می‌توان مطابق شکل ۲-۲ به وسیله تابع تبدیل آن مشخص کرد.



شکل ۲-۲ نمایش سیستم LTI با تابع تبدیل

بنابراین با استفاده از تابع تبدیل می‌توان خروجی را به ازای هر ورودی بدست آورد

$$C(s) = G(s)R(s)$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] \quad \Leftrightarrow \quad C(s) = \mathcal{L}[c(t)]$$

از طرفی چون ضرب در حوزه لاپلاس با کانولوشن در حوزه زمان هم ارز است، خواهیم داشت:

$$C(s) = G(s)R(s) \quad \Leftrightarrow \quad c(t) = \int_0^t g(\tau)r(t-\tau)d\tau \quad ; t > 0$$

۲-۳ خواص تابع تبدیل

- تابع تبدیل تنها برای سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI) تعریف می‌شود و برای سیستم‌های غیرخطی و یا متغیر با زمان تعریف نمی‌شود.
- از تعریف تابع تبدیل کاملاً مشخص است که تابع تبدیل شرایط اولیه سیستم را حفظ نمی‌کند و این از معایب بزرگ تابع تبدیل می‌باشد.
- تابع تبدیل تنها برای سیستم‌های تک ورودی – تک خروجی (SISO) تعیین می‌شود و برای سیستم‌های چندمتغیره ماتریس انتقال تعریف می‌شود که به وسیله اصل جمع آثار بدست می‌آید.
- تابع تبدیل مشخصه‌ای از خود سیستم بوده و به اندازه و طبیعت ورودی بستگی ندارد.
- تابع تبدیل خروجی و ورودی سیستم را به هم مرتبط می‌کند اما هیچ اطلاعاتی راجع به ساختار فیزیکی سیستم نمی‌دهد. پس توابع تبدیل سیستم‌های فیزیکی متفاوت، می‌توانند یکسان باشند.
- تابع تبدیل می‌تواند مشخصات دینامیکی سیستم را به طور کامل توصیف کند اما توصیف فیزیکی سیستم از عهده آن برنمی‌آید.
- اگر تابع تبدیل یک سیستم معلوم باشد، می‌توان پاسخ به ورودی‌های مختلف را بررسی کرد و در این کار به درک و فهم طبیعت سیستم نظر داشت.
- تابع تبدیل سیستم را می‌توان به طور تجربی و با اعمال ورودی‌های معلوم و مطالعه خروجی سیستم تعیین کرد و این کار یکی از روش‌های شناسایی سیستم است.
- تابع تبدیل یک سیستم داده - پیوسته تنها به صورت تابعی از متغیر مختلط s بیان می‌شود و تابعی از زمان، متغیر ورودی یا هر متغیر مستقل دیگر نیست.

۳–۳ ارتباط بین تابع تبدیل و پاسخ ضربه سیستم

اگر $r(t) = \delta(t)$ آنگاه با توجه به $R(s) = 1$ و رابطه $C(s) = G(s)R(s)$ خواهیم داشت:

$$C(s) = G(s) \quad \Longrightarrow \quad C(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

$g(t)$ همان پاسخ ضربه یا تابع وزن سیستم می‌باشد. در نتیجه تابع تبدیل سیستم LTI عبارت است از «**تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه وقتی همهٔ شرایط اولیه صفر باشند.**»

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \qquad \Leftrightarrow \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

رابطه بین تابع تبدیل و پاسخ ضربه سیستم LTI نشان می‌دهد که $g(t)$ و $G(s)$ اطلاعات یکسانی از رفتار دینامیکی سیستم را در بردارند.

۴–۳ ارتباط بین تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل سیستم

دینامیک‌های سیستم LTI با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n با ضرایب ثابت حقیقی نمایش داده می‌شود

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 r(t)$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله دیفرانسیل بالا تحت شرایط اولیه صفر داریم

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

در نتیجه تابع تبدیل به صورت تابعی گویا از s (نسبت دو چندجمله‌ای از s) بدست می‌آید

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

در تابع تبدیل $G(s)$ چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج را با $N(s)$ و $D(s)$ نشان می‌دهند که درجه آنها به ترتیب برابر m و n است تفاضل $r = n - m$ را **درجه نسبی** سیستم می‌نامند.

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$
$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

رهیافت بالا نشان می‌دهد که تابع تبدیل عملگری برای بیان معادله دیفرانسیل است که متغیر خروجی را به متغیر ورودی مرتبط می‌کند اما توجه داشته باشید که در نمایش تابع تبدیل اغلب **عوامل مشترک در صورت و مخرج** را حذف کرده و ساده‌سازی شده آن را نشان می‌دهند. بنابراین ممکن است مرتبه واقعی سیستم بزرگ‌تر از آن چیزی باشد که از روی تابع تبدیل مشخص می‌شود. البته مرتبه واقعی سیستم از روی معادله دیفرانسیل سیستم قابل تعیین است.

۵–۳ فرم‌های مختلف تابع تبدیل

تابع تبدیل را می‌توان در فرم‌های مختلف نشان داد که متداول‌ترین آنها به صورت زیر می‌باشند

فرم چندجمله‌ای $\quad G(s) = k\left[\dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\right] \quad ; n \geq m$

فرم ثابت زمانی $\quad G(s) = k\left[\dfrac{(1 + sT_{z1})(1 + sT_{z2}) \cdots (1 + sT_{zm})}{s^N (1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2}) \cdots (1 + sT_{pl})}\right] \quad ; N + l \geq m$

فرم قطب- صفر $\quad G(s) = k\left[\dfrac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{s^N (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_l)}\right] \quad ; N + l \geq m$

نکته باید تاکید کرد که همه توابع تبدیل، توابع کسری گویا نیستند و بعضی توابع تبدیل دارای عبارت e^{-Ts} هستند که نشان دهنده تاخیر زمانی سیستم می‌باشد.

نکته تعداد قطب‌های واقع در مبداء نشان دهنده تعداد انتگرال‌گیرهای سیستم می‌باشند و از اهمیت بالایی به ویژه در تعیین مقادیر نهایی، برخوردارند و در سیستم فیدبک واحد نوع سیستم را تعیین می‌کنند.

۳-۶ تعیین معادله مشخصه سیستم

ریشه‌های معادله مشخصه، رفتار پاسخ زمانی سیستم را مشخص می‌سازند و پایداری سیستم‌های LTI کاملاً به ریشه‌های معادله مشخصه بستگی دارد. معادله مشخصه یک سیستم LTI را با $\Delta(s)$ نشان می‌دهند و برابر با چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل است به شرطی که حذف صفر و قطب در تابع تبدیل رخ نداده باشد

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$$

توجه داشته باشید که در صورت وجود حذف صفر و قطب در تابع تبدیل، معادله مشخصه از روی معادله دیفرانسیل سیستم تعیین می‌شود. بنابراین ریشه‌های معادله مشخصه سیستم، قطب‌های تابع تبدیل را شامل می‌شود ولی عکس آن درست نمی‌باشد.

۳-۷ صفرها و قطب‌های سیستم

از روی تابع تبدیل می‌توان صفرها و قطب‌های سیستم را بدست آورد ولی برای درک عمیق مفاهیم صفر و قطب در یک سیستم کنترلی ابتدا چند تعریف در زمینه توابع مختلط ذکر می‌کنیم.

تابع تک مقداره: تابع مختلط $G(s)$ تابعی تک مقداری از s است هرگاه به ازای هر مقدار s تنها یک مقدار یگانه نظیر برای $G(s)$ بدست آید. توابع مختلطی که معمولاً در تحلیل سیستم‌های کنترلی مطرح می‌شوند توابعی تک مقداری از s مانند $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ هستند.

تابع تحلیلی: تابع مختلط $G(s)$ را در ناحیه‌ای از صفحه s تحلیلی می‌نامند که تابع و تمام مشتقاتش در آن ناحیه وجود داشته باشند. به عنوان مثال تابع $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ در نقاط $s = 0$ و $s = -1$ تحلیلی نمی‌باشد ولی تابع $G(s) = s + 2$ در تمام نقاط صفحه s تحلیلی است.

نقاط عادی و تکین: نقاطی از صفحه s که در آنها تابع $G(s)$ تحلیلی است نقاط عادی و نقاطی از صفحه s که در آنها تابع $G(s)$ تحلیلی نیست نقاط تکین نامیده می‌شوند.

قطب‌های سیستم نقاط تکینی که در آنها تابع تبدیل $G(s)$ یا مشتقات آن بینهایت می‌شود، قطب سیستم نامیده می‌شوند. قطب‌ها همان ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل می‌باشند.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

اگر حد زیر متناهی و مخالف صفر باشد، $s = s_i$ را یک قطب مرتبه q می‌نامند

$$\lim_{s \to s_i} [(s - s_i)^q G(s)]$$

صفرهای سیستم نقاطی که در آنها تابع تبدیل $G(s)$ برابر صفر می‌شود، صفر سیستم نامیده می‌شوند. صفرهای سیستم همان ریشه‌های چندجمله‌ای صورت تابع تبدیل می‌باشند

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = 0$$

اگر حد زیر متناهی و مخالف صفر باشد، $s = s_i$ را یک صفر مرتبه q می‌نامند

$$\lim_{s\to s_i}\left[\frac{G(s)}{(s-s_i)^q}\right]$$

نکته اگر $G(s)$ صفری در $s = s_0$ داشته باشد، مسیر انتقال سیگنال ورودی $r(t) = ke^{s_0 t}$ در این سیستم مسدود می‌شود لذا این گونه صفرها را **صفرهای انتقال** نامیده و بیان ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد

$$b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m} + \cdots + b_1\frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) = (b_m s_0^m + \cdots + b_1 s_0 + b_0)ke^{s_0 t} = N(s_0)ke^{s_0 t} = 0$$

نکته اگر $G(s)$ تابعی گویا از s باشد **تعداد کل قطب‌ها و صفرها با هم برابرند!!!** به شرط آن که قطب‌ها و صفرهای با مرتبه چندگانه و واقع در بینهایت را نیز به حساب آوریم. صفر/ قطب در بینهایت را صفر/ قطب **نامحدود** و بقیه را صفر/ قطب **محدود** می‌نامند. این نکته، مفهومی بسیار کلیدی در سیستم‌های خطی است.

نکته فرض کنید درجه چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج تابع تبدیل $G(s)$ به ترتیب m و n باشند آنگاه تعداد صفرهای محدود برابر m و تعداد قطب‌های محدود برابر n خواهد بود و

- اگر $n > m$ باشد آنگاه تعداد $n - m$ صفر نامحدود داشته و قطب نامحدود نداریم.
- اگر $n < m$ باشد آنگاه تعداد $m - n$ قطب نامحدود داشته و صفر نامحدود نداریم.

مثال ۱. در تابع تبدیل $G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2}$ صفرها و قطب‌های سیستم را تعیین کنید.

حل. سیستم دارای یک صفر و چهار قطب محدود است و $s = -3$ قطب مرتبه دوم می‌باشد

$$s + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad s = -2$$
$$s(s+1)(s+3)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad s = 0, -1, -3, -3$$

بررسی رفتار $G(s)$ در بینهایت نشان دهنده آن است که $G(s)$ سه صفر در بینهایت دارد

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{10}{s^3} = 0$$

این مثال تاییدی بر این مفهوم کلیدی است که تعداد صفرها و قطب‌ها در تابع تبدیل برابرند.

۳–۸ سره و ناسره بودن سیستم

با مقایسه درجه چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج، توابع تبدیل به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند

۱- برای $n > m$ تابع تبدیل $G(s)$ **اکیداً سره** بوده و $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$ می‌باشد.

۲- برای $n = m$ تابع تبدیل $G(s)$ **سره** بوده و $\lim_{s\to\infty} G(s) = k \neq 0$ می‌باشد.

۳- برای $n < m$ تابع تبدیل $G(s)$ **ناسره** بوده و $\lim_{s\to\infty} G(s) = \infty$ می‌باشد.

نکته در اکثر سیستم‌های فیزیکی $n > m$ می‌باشد زیرا در یک سیستم فیزیکی اغلب تغییر ناگهانی در ورودی باعث تغییر ناگهانی در خروجی نمی‌شود به عبارتی پاسخ پله در $t = 0$ پیوسته می‌باشد.

نکته برای این که هر تابع تبدیلی به صورت فیزیکی قابل تحقق باشد باید سیستم سره یا اکیداً سره باشد زیرا برای مقادیر بزرگ s تابع تبدیل $G(s)$ به صورت $G(s) \cong Ks^{m-n}$ رفتار می‌کند که یک مشتق‌گیر از درجه $m - n$ است و برای یک ورودی سینوسی با فرکانس ω خواهیم داشت:

$$|G(j\omega)| \cong |K(j\omega)^{m-n}| = K\omega^{m-n}$$

که نشان دهنده میزان تقویت سیستم برای ورودی سینوسی با فرکانس ω است و خروجی سیستم شامل عبارتی مانند $\omega^{m-n}sin\omega t$ خواهد بود. اگر $m > n$ باشد آنگاه برای ورودی سینوسی با فرکانس بینهایت و دامنه محدود، تقویت‌کنندگی سیستم نامتناهی است که برای سیستم‌های فیزیکی ممکن نیست. خروجی سیستم با افزایش فرکانس ورودی ω، بسیار بزرگ می‌شود اما در عمل سیستم دیر یا زود تسلیم شده و افزایش دامنه خروجی سیستم متوقف خواهد شد.

۳-۹ تعیین مقادیر اولیه و نهایی پاسخ سیستم

با داشتن تبدیل لاپلاس پاسخ سیستم، می‌توان با بررسی رفتار $sC(s)$ در فرکانس‌های $s = \infty$ و $s = 0$ مقدار پاسخ زمانی سیستم $c(t)$ را در لحظات $t = 0^+$ و $t = \infty$ بدست آورد. برای این کار می‌توان از دو قضیه جذاب و معروف مقدار اولیه و مقدار نهایی استفاده کرد و نیازی به عکس تبدیل لاپلاس گرفتن نیست

قضیه مقدار اولیه: $c(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC(s)$

قضیه مقدار نهایی: $c(\infty) = \lim_{s\to 0} sC(s)$

نکته **شرط استفاده از قضیه مقدار اولیه آن است که $C(s)$ اکیداً سره یا $\lim_{s\to\infty} sC(s)$ محدود باشد.** اگر $C(s)$ سره یا ناسره باشد، $\lim_{s\to\infty} sC(s)$ نامحدود بوده و در $c(t)$، تابع ضربه و یا مشتقات آن ظاهر می‌شوند و می‌دانید که مقدار تابع ضربه و مشتقات آن در $t = 0$ برابر با بینهایت و در $t = 0^+$ برابر با صفرند. چون قضیه مقدار اولیه مقدار $c(t)$ را در $t = 0^+$ بیان می‌کند نه در $t = 0$، لذا در این حالت این قضیه، مقدار نادرست بینهایت را برای $c(0^+)$ بدست می‌دهد. برای رفع این محدودیت می‌توان با نوشتن $C(s)$ به صورت زیر و اعمال قضیه مقدار اولیه به تابع اکیداً سره $C_1(s)$، مقدار $c_1(0^+)$ و در نتیجه مقدار $c(0^+)$ را بدست آورد

$$C(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) + C_1(s) \qquad \Rightarrow \qquad c(0^+) = c_1(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC_1(s)$$

نکته **شرط استفاده از قضیه مقدار نهایی آن است که همه قطب‌های $sC(s)$ در سمت چپ صفحه s باشند** زیرا اگر $sC(s)$ قطبی روی محور موهومی یا نیمه راست صفحه s داشته باشد در این صورت $c(t)$ به ترتیب رفتاری نوسانی یا نمایی افزایشی خواهد داشت و در نتیجه $c(\infty)$ تعریف نشده یا بینهایت خواهد بود.

نکته اگر $sC(s)$ در مبداء $(s = 0)$ قطب داشته باشد آنگاه $c(t)$ حتماً جمله‌ای از جنس t^k $(k \geq 1)$ داشته و $c(\infty) = \infty$ خواهد شد که با تعریف $\lim_{s\to 0} sC(s)$ نیز سازگار است.

مثال۲. تابع $C(s) = \frac{5}{s(s^2+3s+2)}$ را در نظر بگیرید. مقادیر $c(\infty)$ و $c(0^+)$ را بدست آورید.

حل. شرایط اعمال قضایای مقدار اولیه و نهایی برقرار است و به راحتی می‌توان $c(\infty)$ و $c(0^+)$ را تعیین کرد

$$c(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC(s) = 0 \qquad , \qquad c(\infty) = \lim_{s\to 0} sC(s) = 2.5$$

مثال۳. تابع $C(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ را در نظر بگیرید. مقادیر $c(\infty)$ و $c(0^+)$ را بدست آورید.

حل. با اعمال قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی به تابع $C(s)$ خواهیم داشت:

$$c(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC(s) = 1 \qquad , \qquad c(\infty) = \lim_{s\to 0} sC(s) = 0$$

و از طرف دیگر با عکس لاپلاس گرفتن از $C(s)$ و تعیین $c(t)$ داریم:

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \cos\omega t \qquad \Rightarrow \qquad c(0) = 1 \quad , \quad c(\infty) = \cos\infty$$

مقدار $cos\,\infty$ تعریف نشده است در حالی که قضیه مقدار نهایی مقدار صفر را برای $c(\infty)$ بدست می‌دهد که غلط است زیرا $sC(s)$ روی محور $j\omega$ قطب دارد و شرایط اعمال قضیه مقدار نهایی برقرار نیست.

مثال۴. پاسخ نهایی سیستم $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$ را به ازای ورودی $r(t) = tu(t)$ بدست آورید.

حل. تبدیل لاپلاس خروجی با توجه به رابطه $C(s) = G(s)\,R(s)$ به صورت زیر است

$$C(s) = \left[\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right]\frac{1}{s^2}$$

با توجه به نکته بالا، $c(\infty) = \infty$ می‌باشد که از رابطه $c(t)$ نیز می‌توان آن را نتیجه گرفت

$$C(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s} + \frac{0.5}{s+1} + \frac{0.5s - 0.5}{s^2+1}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = t - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(cos\,t - sint)$$

$$c(\infty) = \infty$$

۳-۱۰ بررسی پیوستگی پاسخ سیستم

برای پیوستگی پاسخ سیستم در زمان $t = 0$ باید $c(0^+) = c(0^-)$ باشد. با استفاده از قضیه مقدار اولیه می‌توان شرط پیوستگی پاسخ خروجی را برای ورودی‌های مختلف بدست آورد

$$c(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC(s) = c(0^-)$$

برای مثال اگر $c(0^-) = 0$ باشد برای پیوستگی پاسخ پله باید داشته باشیم:

$$c(0^+) = \lim_{s\to\infty} sC(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$

که شرط برقراری این رابطه $n > m$ می‌باشد. با این روش برای $c(0^-) = 0$ شرط پیوستگی پاسخ خروجی برای ورودی‌های مختلف مطابق جدول ۲-۱ می‌باشد.

جدول ۲-۱ شرط پیوستگی پاسخ سیستم به ازای ورودی‌های مختلف

ورودی		شرط پیوستگی
ضربه	$\delta(t)$	$n > m + 1$
پله	$u(t)$	$n > m$
شیب	$tu(t)$	$n > m - 1$
سهمی	$t^2u(t)$	$n > m - 2$

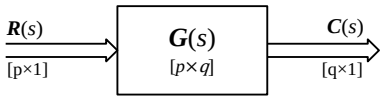
مثال۵. برای هر یک از سیستم‌های زیر ورودی لازم برای پیوسته بودن پاسخ در $t = 0$ را بیابید.

(الف) $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$ **(ب)** $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1}$ **(ج)** $G(s) = \frac{s-2}{s^2 + 4s + 2}$

حل. تابع تبدیل (الف) برای ورودی‌های شیب و سهمی، تابع تبدیل (ب) برای ورودی‌های ضربه، پله، شیب و سهمی و تابع تبدیل (ج) برای ورودی‌های پله، شیب و سهمی پیوسته است.

۳-۱۱ تابع تبدیل سیستم‌های چند متغیره

با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان تعریف تابع تبدیل را برای سیستم‌های MIMO نیز تعمیم داد. دلیل علاقمندی ما به تعمیم مفهوم تابع تبدیل، فراوانی سیستم‌های چندمتغیره در عالم واقع است.



شکل ۲-۳ یک سیستم خطی با p ورودی و q خروجی

تابع تبدیل بین ورودی jام و خروجی iام (همه ورودی‌ها به غیر از $R_j(s)$ صفرند) بصورت زیر تعریف می‌شود

$$G_{ij}(s) = \frac{C_i(s)}{R_j(s)} \qquad ; R_k(s) = 0\,, \qquad k = 1,2,\dots,p \quad ; k \neq j$$

و با توجه به اصل جمع آثار خروجی iام در صورت حضور تمام ورودی‌ها به صورت زیر خواهد بود

$$C_i(s) = G_{i1}(s)R_i(s) + G_{i2}(s)R_2(s) + \dots + G_{ip}(s)R_p(s)$$

در کل رابطه ورودی - خروجی سیستم چندمتغیره در فرم برداری - ماتریسی به صورت زیر است

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s)$$

$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ \vdots \\ G_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_p(s) \end{bmatrix}$$

نکته در سیستم‌های MIMO به جای تابع تبدیل، ماتریس انتقال سیستم $\boldsymbol{G}(s)$ داریم. در حالت خاص اگر سیستمی دارای دو ورودی - دو خروجی باشد:

$$C_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s)$$
$$C_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s)$$
$$\begin{bmatrix} C_1(s) \\ C_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

مثال۶. تابع تبدیل هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را که مربوط به یک سیستم LTI هستند، بیابید.

(الف) $\dddot{c}(t) + 2\ddot{c}(t) + 5\dot{c}(t) + 6c(t) = 3\dot{r}(t) + r(t)$

(ب) $c^{(4)} + 10\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 5c(t) = 5r(t)$

(ج) $2\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) + 5c(t) = r(t) + 2r(t-T)$

(د) $\dddot{c}(t) + 10\ddot{c}(t) + 2\dot{c}(t) + 2\int_0^t c(\tau)d\tau = \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t)$

حل. با تبدیل لاپلاس گرفتن از سیستم‌های (الف) و (ب) با شرایط اولیه صفر $G(s)$ بدست می‌آید

(الف) یک سیستم مرتبه سه است $G(s) = \dfrac{3s+1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6}$

(ب) یک سیستم مرتبه چهار است $G(s) = \dfrac{5}{s^4 + 10s^2 + s + 5}$

(ج) یک سیستم تاخیری مرتبه دو است $G(s) = \dfrac{1 + 2e^{-Ts}}{2s^2 + s + 5}$

(د) یک معادله انتگرو - دیفرانسیلی است لذا از طرفین آن مشتق می‌گیریم و سپس با گرفتن تبدیل لاپلاس تحت شرایط اولیه صفر به $G(s)$ می‌رسیم که یک سیستم مرتبه چهار می‌باشد.

$$c^{(4)} + 10\dddot{c}(t) + 2\ddot{c}(t) + 2c(t) = \ddot{r}(t) + 2\dot{r}(t)$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^4 + 10s^3 + 2s^2 + 2}$$

مثال۷. پاسخ پله واحد یک سیستم به صورت $c(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$ می‌باشد. تابع تبدیل سیستم را تعیین کنید.

حل. در سیستم‌های LTI از مشتق زمانی پاسخ پله، پاسخ ضربه بدست می‌آید

$$g(t) = \frac{dc(t)}{dt} = \frac{7}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$$

تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه $g(t)$، تابع تبدیل سیستم را بدست می‌دهد

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{7/3}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{2/3}{s+4} = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

مثال۸. پاسخ پله واحد سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$ را بدست آورید.

حل. تبدیل لاپلاس خروجی به صورت زیر خواهد بود

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

با بسط به کسرهای جزئی و گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس داریم:

$$C(s) = \frac{3/2}{s} + \frac{1/6}{s+4} - \frac{5/3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$c(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - te^{-t} - \frac{5}{3}e^{-t}$$

مثال۹. تابع تبدیل حلقه بسته و پاسخ پله واحد سیستمی به صورت زیر است. مقادیر a، b و c را بیابید.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+a)}{s^2 + 8s + 15} \quad \text{و} \quad c(t) = 1.33 + be^{-3t} - 3e^{ct}$$

حل. با بسط به کسرهای جزئی و تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از $C(s)$ داریم:

$$C(s) = \frac{10(s+a)}{s(s^2 + 8s + 15)} = \frac{2a/3}{s} + \frac{5(3-a)/3}{s+3} + \frac{a-5}{s+5}$$

$$c(t) = \frac{2a}{3} + \left[\frac{5(3-a)}{3}\right]e^{-3t} + (a-5)e^{-5t}$$

با مقایسه $c(t)$ داده شده با $c(t)$ بدست آمده، مقادیر a، b و c به صورت زیر تعیین می‌شود

$$a = 2, \qquad b = 1.67, \qquad c = -5$$

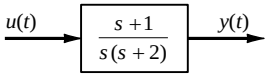
مثال۱۰. پاسخ سیستمی به ورودی پله واحد با شرایط اولیه صفر به صورت زیر است. پاسخ ضربه را بیابید.

$$c(t) = (1.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-t} - e^{-t})u(t)$$

حل. در سیستم‌های LTI با مشتق‌گیری از پاسخ پله می‌توان پاسخ ضربه را تعیین کرد

$$g(t) = \frac{d}{dt}[(1.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-t} - e^{-t})u(t)]$$
$$g(t) = (1.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-t} - e^{-t})\delta(t) + (e^{-2t} + te^{-t})u(t)$$
$$g(t) = (e^{-2t} + te^{-t})u(t)$$

مثال۱۱. عکس‌العمل سیستم شکل زیر نسبت به ورودی پله‌ای واحد را تعیین کنید.



حل. به راحتی می‌توان خروجی $Y(s)$ را بدست آورده و با تبدیل لاپلاس معکوس به $y(t)$ رسید

$$Y(s) = \left[\frac{(s+1)}{s(s+2)}\right]\frac{1}{s} = \frac{0.25}{s} + \frac{0.5}{s^2} + \frac{-0.25}{s+2}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 0.25 + 0.5t - 0.25e^{-2t}$$

مثال۱۲. خروجی معادله دیفرانسیل $\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) = e^{4t}$ را با شرایط اولیه $c(0) = 2$ و $\dot{c}(0) = 0$ بیابید.

حل. برای حل معادله دیفرانسیل از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم

$$[s^2C(s) - sc(0) - \dot{c}(0)] + [sC(s) - c(0)] = \frac{1}{s-4}$$
$$C(s) = \frac{2s^2 - 6s - 7}{s(s+1)(s-4)} = \frac{7/4}{s} + \frac{1/5}{s+1} + \frac{1/20}{s-4}$$
$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \frac{7}{4} + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{20}e^{4t}$$

واضح است که مقدار نهایی $c(t)$ بینهایت است. بنابراین اگر کسی قضیه مقدار نهایی را به $C(s)$ اعمال کند مقدار نهایی نادرست (7/4) بدست می‌آید. این مثال به طور واضح بیان می‌کند که قضیه مقدار نهایی برای توابعی که در سمت راست صفحه s تحلیلی نیستند، به کار نمی‌رود.

مثال۱۳. یک سیستم LTI چندمتغیره با ورودی‌های $r_1(t)$ و $r_2(t)$ و خروجی‌های $c_1(t)$ و $c_2(t)$ با دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود. درایه‌های ماتریس انتقال (G_{ij}) سیستم زیر را بیابید.

$$\ddot{c}_1(t) + 2\dot{c}_1(t) + 3c_1(t) = r_1(t) + r_2(t)$$
$$\ddot{c}_2(t) + 3\dot{c}_2(t) + c_1(t) - c_2(t) = r_2(t) + \dot{r}_1(t)$$

حل. با تبدیل لاپلاس گرفتن از دستگاه معادلات دیفرانسیل تحت شرایط اولیه صفر داریم:

$$(s^2 + 2s + 3)C_1(s) = R_1(s) + R_2(s) \qquad (۱)$$
$$(s^2 + 3s - 1)C_2(s) = -C_1(s) + R_2(s) + sR_1(s) \qquad (۲)$$

با توجه به تعاریف $G_{ij}(s)$ها و از معادله (۱) توابع تبدیل G_{11} G_{12} به راحتی تعیین می‌شوند:

$$G_{11}(s) = \frac{C_1}{R_1}\bigg|_{R_2=0} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \qquad G_{12}(s) = \frac{C_1}{R_2}\bigg|_{R_1=0} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}$$

از معادله (۲) و به ازای $R_2 = 0$ داریم:

$$(s^2 + 3s - 1)C_2(s) = sR_1(s) - C_1(s)\bigg|_{R_2=0} = sR_1(s) - G_{11}(s)R_1(s)$$

$$(s^2+3s-1)C_2(s)=\left(\frac{s^3+2s^2+3s-1}{s^2+2s+3}\right)R_1(s)$$

$$G_{21}(s)=\left.\frac{C_2}{R_1}\right|_{R_2=0}=\frac{s^3+2s^2+3s-1}{(s^2+2s+3)(s^2+3s-1)}$$

و همچنین از معادله (۲) و به ازای $R_1=0$ نیز خواهیم داشت:

$$(s^2+3s-1)C_2(s)=R_2(s)-C_1(s)\Big|_{R_1=0}=R_2(s)-G_{12}(s)R_2(s)$$

$$G_{22}(s)=\left.\frac{C_2}{R_2}\right|_{R_1=0}=\frac{s^2+2s+2}{(s^2+2s+3)(s^2+3s-1)}$$

مثال۱۴. پاسخ پله سیستم چندمتغیره‌ای با ماتریس انتقال $\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}1/(s+1) & 1/(s+2)\\ 1/(s+2) & 1/(s+3)\end{bmatrix}$ **را بیابید.**

حل. ماتریس انتقال $\boldsymbol{G}(s)$ یک ماتریس 2×2 است و بردار خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\boldsymbol{C}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{R}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s}\\ \frac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s(s+1)}+\frac{1}{s(s+2)}\\ \frac{1}{s(s+2)}+\frac{1}{s(s+3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1.5}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{0.5}{s+2}\\ \frac{5/6}{s}-\frac{0.5}{s+2}-\frac{1/3}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}(t)=\mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{C}(s)]=\begin{bmatrix}1.5-e^{-t}-0.5e^{-2t}\\ \frac{5}{6}-0.5e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

۴ نمودار بلوکی

اگر یک سیستم از اتصال چند زیر سیستم دیگر تشکیل شود، ارتباط دادن زیر سیستم‌ها به همدیگر به صورت جبری و توسط معادلات دیفرانسیل کاری بسیار مشکلی و تابع تبدیل سیستم کلی نیز تابعی پیچیده خواهد بود. مهندسان کنترل برای غلبه بر این مشکل و به منظور ارائه مدلی برای انواع سیستم‌ها از **نمودار بلوکی** به سبب سادگی و تطبیق‌پذیری آن استفاده می‌کنند و این همان ضرورت نمایش نمودار بلوکی است.

۴-۱ مفهوم نمودار بلوکی

نمودار بلوکی یک سیستم، نمایشی تصویری از عملکرد هر عنصر و عبور سیگنال‌ها است و ارتباط‌های موجود بین عناصر را نیز به خوبی نشان می‌دهد. در نمودار بلوکی، تمام متغیرهای سیستم از طریق بلوک‌ها به هم مرتبط می‌شوند و سیگنال‌ها تنها در جهت پیکان‌ها می‌توانند عبور کنند. بنابراین نمودار بلوکی یک سیستم کنترل، آشکارا ویژگی یک طرفه بودن را نشان می‌دهد. نمودار بلوکی و توابع تبدیل را می‌توان با هم استفاده کرد و روابط علت و معلولی موجود در یک سیستم LTI را نشان داد.

شکل ۲-۴ (الف) نمایش نمودار بلوکی سیستم (ب) نمایش نمودار بلوکی سیستم LTI

۲-۴ ویژگی‌های نمودار بلوکی

به طور حتم نمودار بلوکی هم مانند هم نوعان خود (تابع تبدیل، پاسخ ضربه و معادلات دیفرانسیل) دارای مزایا و معایبی است. در زیر مهم‌ترین آنها را تکه تکه کرده‌ایم تا هضم مطالب آسان شود!!!

۱- با نمودار بلوکی می‌توان، اثر هر عنصر را در عملکرد کل سیستم ارزیابی کرد.

۲- تشکیل نمودار بلوکی کل، با اتصال بلوک‌ها بر اساس جهت عبور سیگنال‌ها کار ساده‌ای است.

۳- نمودارهای بلوکی را می‌توان هم برای سیستم‌های خطی و هم غیرخطی بکار برد.

۴- عملکرد سیستم را با بررسی نمودار بلوکی، ساده‌تر از بررسی خود سیستم فیزیکی می‌توان تجسم کرد.

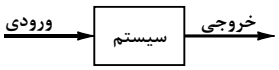
۵- نمودار بلوکی برخلاف نمایش ریاضی، عبور سیگنال در سیستم واقعی را محسوس‌تر نشان می‌دهد.

۶- نمودار بلوکی اطلاعات راجع به رفتار دینامیکی کل سیستم را در بردارد ولی در مورد ساختار فیزیکی سیستم حرفی برای گفتن ندارد. به همین دلیل بسیاری از سیستم‌های نامشابه و نامرتبط، نمودار بلوکی یکسانی دارند.

۷- برای یک سیستم بسته به دیدی که نسبت به تحلیل مورد نظر داریم می‌توانیم نمودارهای بلوکی متفاوتی را رسم کنیم. پس **برای یک سیستم نمودار بلوکی یکتایی وجود ندارد.**

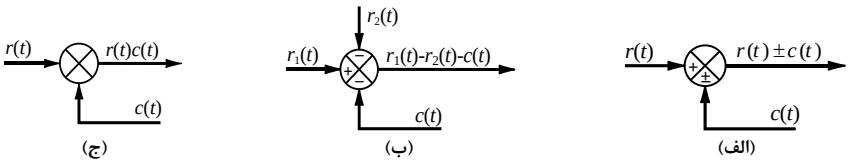
۳-۴ اجزاء نمودار بلوکی

بلوک و پیکان بلوک نشان دهنده مدل سیستم و پیکان نشان دهنده متغیرها و سیگنال‌های ورودی - خروجی و داخلی سیستم می‌باشند.



شکل ۲-۵ بلوک و پیکان در نمایش نمودار بلوکی سیستم

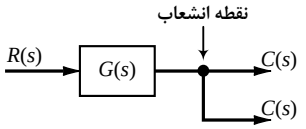
دریافت‌گر یکی از اجزاء مهم سیستم‌های کنترلی است و به عنوان نقطه‌ای کارکردی جهت مقایسه سیگنال‌ها بکار می‌رود. دریافت‌گر می‌تواند یک جمع کننده، تفریق کننده یا ضرب کننده برای دو یا چند سیگنال باشد. دریافت‌گر را می‌توان با هر دو متغیرهای حوزه زمان و حوزه لاپلاس استفاده کرد.



شکل ۲-۶ دریافت‌گر به عنوان (الف) جمع کننده (ب) تفریق کننده (ج) ضرب کننده

- دریافت‌گر شکل‌های (الف و ب) رفتاری خطی و دریافت‌گر شکل (ج) رفتاری غیرخطی دارد.
- سیگنال‌های ورودی دریافت‌گر، بایستی دارای بعد و واحد یکسانی باشند.
- دریافت‌گر به لحاظ فیزیکی می‌تواند پتانسیومتر، سنکرو، تفکیک‌گر، تقویت کننده تفاضلی، ضرب‌کننده و یا سایر ترنسدیوسرها باشد.

نقطه انشعاب نقطه‌ای که از آن سیگنال یک بلوک به بلوک‌ها یا نقاط جمع دیگر می‌رود.



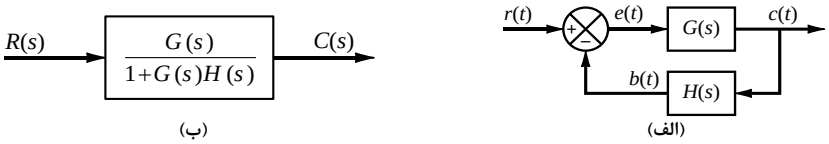
شکل ۲-۷ نقطه انشعاب در نمودار بلوکی

۴-۴ بررسی نمودار بلوکی سیستم حلقه بسته ساده

در این بخش ابتدا یک سیستم حلقه بسته ساده را با هر دو فیدبک منفی و مثبت بررسی کرده و سپس روش تبدیل یک سیستم با فیدبک غیر واحد به یک سیستم با فیدبک واحد را بیان می‌کنیم.

سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی

نمودار بلوکی یک سیستم تک حلقه‌ای با فیدبک منفی در شکل ۲-۸ (الف) نشان داده شده است که در آن $r(t)$ سیگنال ورودی مرجع، $c(t)$ سیگنال خروجی، $e(t)$ سیگنال خطا، $b(t)$ سیگنال فیدبکی، $G(s)$ تابع تبدیل مسیر پیشرو و $H(s)$ تابع تبدیل مسیر فیدبک می‌باشد.



شکل ۲-۸ نمودار بلوکی سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی و (ب) نمودار بلوکی ساده شده آن

تابع تبدیل حلقه بسته را با $T(s)$ نشان می‌دهند که رفتار دینامیکی سیستم حلقه بسته را بر اساس رفتار دینامیکی $G(s)$ و $H(s)$ بیان می‌کند و در این سیستم آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s)$$
$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s)$$

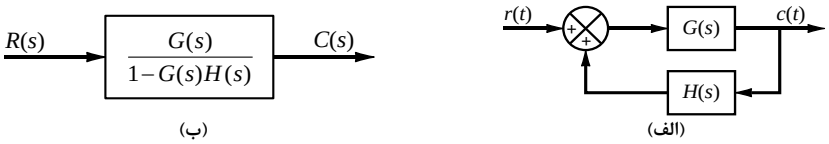
با مرتب کردن روابط بالا، تابع تبدیل حلقه بسته و نمودار بلوکی آن مطابق شکل ۲-۸ (ب) بدست می‌آید.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت

اگر مطابق شکل ۲-۹ (الف) سیستم حلقه بسته دارای فیدبک مثبت باشد، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم، مشابه حالت فیدبک منفی محاسبه می‌شود و نمودار بلوکی معادل آن مطابق شکل ۲-۹ (ب) خواهد بود.

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)}$$



شکل ۲-۹ (الف) سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت و (ب) نمودار بلوکی ساده شده آن

سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد

در سیستم حلقه بسته ساده اگر $H(s) = 1$ باشد آن را، سیستم حلقه بسته با **فیدبک واحد** می‌نامند و در بیان تئوری سیستم‌های کنترل بیشتر با این سیستم‌ها سر و کار داریم، از طرفی هر سیستم حلقه بسته با فیدبک غیر واحد ($H(s) \neq 1$) را می‌توان به راحتی به یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد تبدیل کرد و تنها کافی است تابع تبدیل حلقه بسته هر دو سیستم را متحد قرار دهیم.

$$\frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} = \frac{G_{eq}(s)}{1 \mp G_{eq}(s)} \quad \Rightarrow \quad G_{eq}(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)[H(s) - 1]}$$

شکل ۲-۱۰ (الف) سیستم با فیدبک غیر واحد (ب) سیستم با فیدبک واحد معادل

نکته اگر تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم کنترل با فیدبک واحد را داشته باشیم، می‌توان تابع تبدیل حلقه باز سیستم را به صورت زیر بدست آورد

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)} \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{T(s)}{1 \pm T(s)}$$

نکته برای یک سیستم با فیدبک غیر واحد، در صورت معلوم بودن $H(s)$، می‌توان $G(s)$ را تعیین کرد.

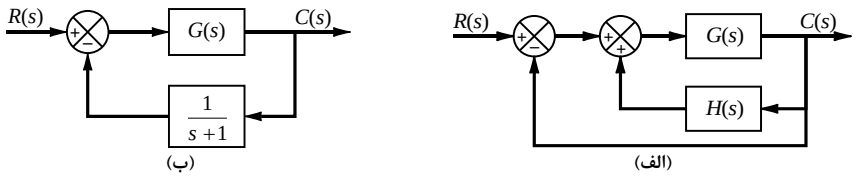
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \quad \Leftrightarrow \quad G(s) = \frac{T(s)}{1 \pm T(s)H(s)}$$

مثال۱۵. در یک سیستم کنترل با فیدبک واحد منفی، تابع تبدیل حلقه باز را طوری بیابید که تابع تبدیل حلقه بسته‌ای به صورت $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ks+b}{s^2+as+b}$ داشته باشد.

حل. با استفاده از نکته اول بیان شده در بالا، تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر خواهد بود

$$G(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} = \frac{\frac{ks+b}{s^2+as+b}}{1 - \frac{ks+b}{s^2+as+b}} = \frac{ks + b}{s(s + a - k)}$$

مثال۱۶. تابع تبدیل $H(s)$ را طوری بیابید تا دو سیستم حلقه بسته زیر با هم معادل شوند؟



حل. ابتدا توابع تبدیل سیستم‌های (الف) و (ب) را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$T_2(s) = \frac{\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}}{1 + \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)[1 - H(s)]}$$

$$T_1(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{(s+1)}}$$

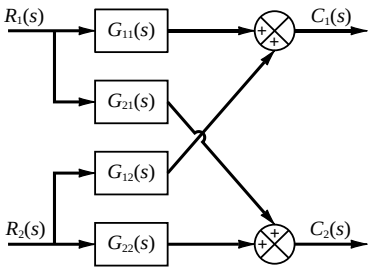
حال برای این که دو سیستم حلقه بسته با هم معادل باشند باید رابطه $T_1(s) = T_2(s)$ برقرار باشد. صورت‌های هر دو تابع تبدیل یکسان‌اند و لذا برای متحد بودن باید مخرج‌های آنها نیز یکسان باشند

$$1 - H(s) = \frac{1}{(s+1)} \qquad \Rightarrow \qquad H(s) = \frac{s}{s+1}$$

۴–۵ نمودار بلوکی سیستم‌های چند متغیره

زمانی که ورودی‌های چندگانه در یک سیستم خطی حضور دارند و هر ورودی مستقل از سایر ورودی‌ها رفتار می‌کند، آنگاه خروجی کامل سیستم را می‌توان به وسیله جمع آثار بدست آورد. در یک سیستم دو ورودی - دو خروجی روابط بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت زیر است.

$$C_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s)$$
$$C_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s)$$



شکل ۲–۱۱ نمودار بلوکی یک سیستم دو ورودی - دو خروجی

۴–۶ روش جبری تعیین تابع تبدیل کلی سیستم از روی نمودار بلوکی آن

الگوریتم زیر را می‌توان برای بدست آوردن توابع تبدیل و خروجی‌ها از روی نمودار بلوکی استفاده کرد

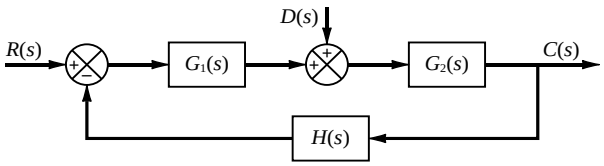
۱- خروجی مورد نظر را به عنوان نقطه شروع انتخاب می‌کنیم.

۲- در مسیر سیگنال‌ها حرکت کرده و اثر هر تابع تبدیل را اعمال و روی نمودار بلوکی نشان می‌دهیم.

۳- حرکت خود را آن قدر ادامه می‌دهیم تا به نقطه شروع برگردیم.

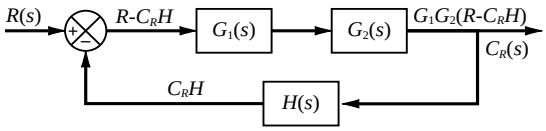
۴- عبارت بدست آمده را با سینگال نقطه شروع (خروجی) مساوی قرار داده و با مرتب‌سازی آن، خروجی یا تابع تبدیل متناظر را بدست می‌آوریم.

مثال۱۷. خروجی $C(s)$ را در سیستم زیر برحسب ورودی‌های $R(s)$ و $D(s)$ بدست آورید.



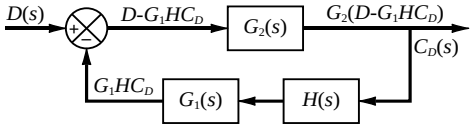
حل. سیستم دو ورودی - تک خروجی بوده و خروجی از اصل جمع آثار و در سه گام زیر تعیین می‌شود.

گام اول: مطابق شکل زیر با صفر کردن سیگنال D اثر R را در خروجی $C_R(s)$ محاسبه می‌کنیم:



$$C_R(s) = G_1G_2(R - C_RH) \qquad \Rightarrow \qquad C_R(s) = \left(\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H}\right)R(s)$$

گام دوم: مطابق شکل زیر با صفر کردن سیگنال R اثر D را در خروجی $C_D(s)$ محاسبه می‌کنیم:



$$C_D = G_2(D - C_1HC_D) \qquad \Rightarrow \qquad C_D(s) = \left(\frac{G_2}{1 + G_1G_2H}\right)D(s)$$

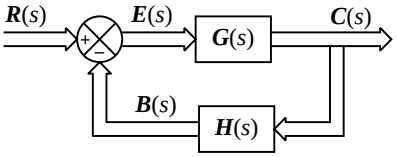
گام سوم: با جمع آثار سیگنال‌های R و D خروجی کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \left(\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H}\right)R(s) + \left(\frac{G_2}{1 + G_1G_2H}\right)D(s)$$

$$C(s) = [G_{RC} \quad G_{DC}]\begin{bmatrix}R(s)\\D(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2H} & \frac{G_2}{1 + G_1G_2H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R(s)\\D(s)\end{bmatrix}$$

۷–۴ نمودار بلوکی سیستم کنترل فیدبکی چند متغیره و تابع تبدیل آن

نمودار بلوکی یک سیستم کنترل فیدبکی چندمتغیره در شکل ۲-۱۲ آورده شده است.



شکل ۲-۱۲ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل فیدبکی چندمتغیره

ابعاد بردارهای سیگنال‌ها و ماتریس‌های انتقال موجود در سیستم شکل ۲-۱۲ به صورت زیر می‌باشند

$$\boldsymbol{C}(s)_{q\times1} \qquad \boldsymbol{R}(s)_{p\times1} \qquad \boldsymbol{G}(s)_{q\times p} \qquad \boldsymbol{H}(s)_{q\times p} \qquad \boldsymbol{E}(s)_{p\times1} \qquad \boldsymbol{B}(s)_{p\times1}$$

روابط سیستم کنترل فیدبکی چندمتغیره در فرم ماتریسی - برداری به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{E}(s)$$
$$\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{B}(s)$$
$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{C}(s)\boldsymbol{H}(s)$$

در نوشتن این روابط باید به ابعاد بردارها و ماتریس‌ها توجه کرد برای مثال حاصلضرب $\boldsymbol{E}(s)\boldsymbol{G}(s)$ امکان‌پذیر نیست. با توجه به روابط بالا می‌توان ماتریس انتقال سیستم را بدست آورد

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{E}(s) = \boldsymbol{G}(s)\,[\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{B}(s)] = \boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{R}(s) - \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{C}(s)$$
$$\boldsymbol{C}(s) = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)\,\boldsymbol{R}(s)$$

با فرض ناویژه بودن ماتریس $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{GH}$، ماتریس انتقال حلقه بسته به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boldsymbol{T}(s) = [I + \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)$$

مثال۱۸. ماتریس تابع تبدیل حلقه بسته را برای سیستم کنترل فیدبکی چندمتغیره زیر بیابید.

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s(s+2)}\\ \frac{5}{s} & 10\end{bmatrix} \qquad ; \qquad \boldsymbol{H}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

حل. سیستم دارای فیدبک واحد است. با قرار دادن $\boldsymbol{G}(s)$ و $\boldsymbol{H}(s)$ در رابطه $\boldsymbol{T}(s)$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{T}(s)=[I+\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{H}(s)]^{-1}\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & \frac{2}{s(s+2)}\\ \frac{5}{s} & 11\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s(s+2)}\\ \frac{5}{s} & 10\end{bmatrix}$$

۸–۴ ساده‌سازی نمودارهای بلوکی

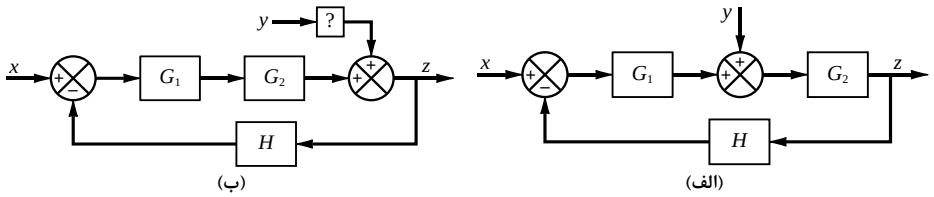
یک نمودار بلوکی پیچیده، شامل چندین حلقه فیدبکی را می‌توان به کمک قواعد جبر بلوکی و با تغییر آرایش، گام به گام ساده کرد. ساده کردن نمودار بلوکی، با تغییر آرایش و جایگذاری، رنج و زحمت تحلیل‌های ریاضی بعدی را بسیار کم می‌کند. با ساده شدن نمودار بلوکی، توابع تبدیل بلوک‌های جدید پیچیده‌تر می‌شوند، زیرا صفرها و قطب‌های جدیدی به وجود می‌آیند. قواعد مهم ساده‌سازی نمودار بلوکی را می‌توان با بازنویسی معادله‌های یکسان در روش‌های متفاوت بدست آورد و در حالت کلی در ساده‌سازی نمودار بلوکی دو اصل بسیار مهم زیر باید رعایت شوند:

۱- حاصلضرب توابع تبدیل در مسیر پیشرو باید بدون تغییر بماند.

۲- حاصلضرب توابع تبدیل حول حلقه باید بدون تغییر بماند.

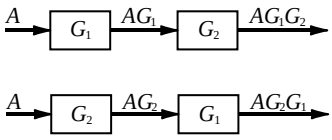
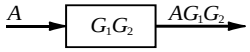
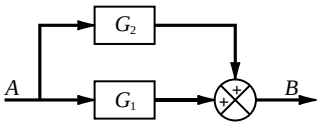
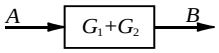
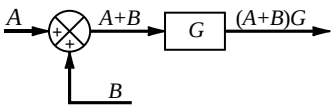
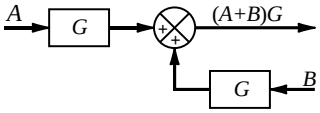
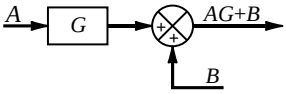
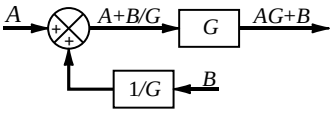
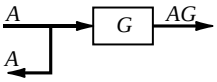
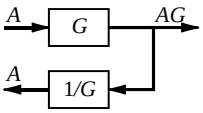
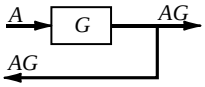
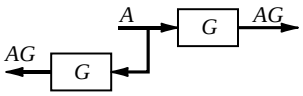
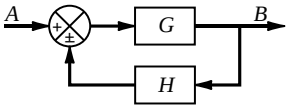
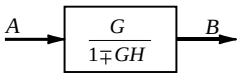
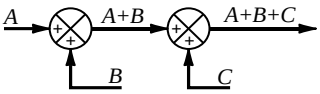
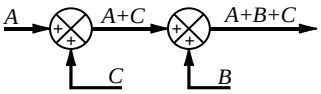
بر اساس توضیحات بالا، قواعد مهم ساده‌سازی نمودار بلوکی استخراج و در جدول ۲-۲ آورده شده است.

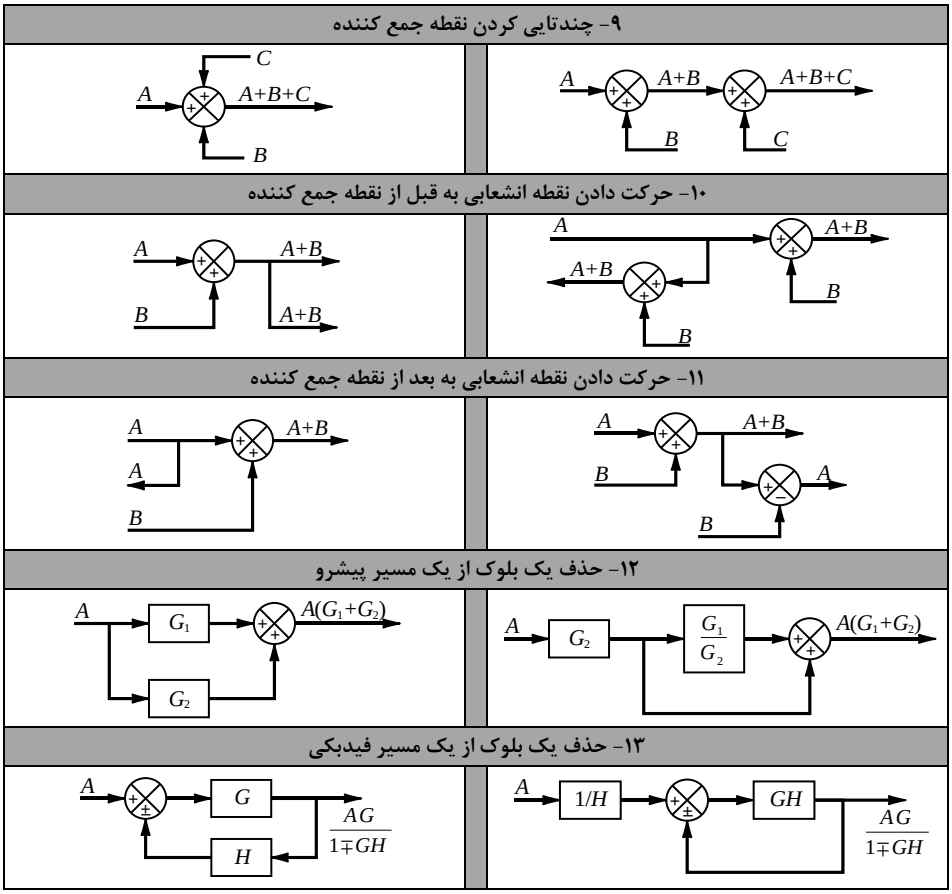
مثال۱۹. برای معادل بودن نمودارهای بلوکی زیر، به جای علامت سوال باید چه بهره‌ای قرار گیرد؟



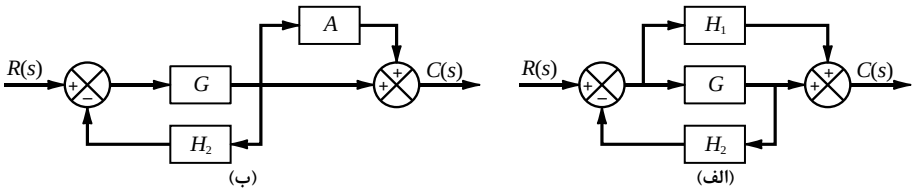
حل. اگر در شکل (الف) جمع کننده بین G_1 و G_2 را به بعد از بلوک G_2 منتقل کنیم، شکل (ب) حاصل می‌شود پس طبق قاعده۳ ساده‌سازی، باید به جای علامت سوال G_2 قرار گیرد. البته این مساله را می‌توان به این صورت نیز تفسیر کرد که چون بهره حلقه در هر دو شکل یکسان و برابر G_1G_2H است بنابراین برای معادل بودن هر دو نمودار بلوکی کافی است حاصلضرب توابع تبدیل در مسیر پیشرو بدون تغییر بماند. در شکل (الف) بهره مسیر مستقیم از y به z برابر G_2 است لذا باید به جای علامت سوال G_2 قرار داد.

جدول ۲-۲ قواعد مهم ساده‌سازی نمودارهای بلوکی

۱- ترکیب بلوک‌های متوالی	
	
۲- ترکیب بلوک‌های موازی	
	
۳- حرکت دادن جمع کننده به بعد از بلوک	
	
۴- حرکت دادن جمع کننده به قبل از بلوک	
	
۵- حرکت دادن نقطه انشعابی به بعد از بلوک	
	
۶- حرکت دادن نقطه انشعابی به قبل از بلوک	
	
۷- حذف یک حلقه فیدبکی	
	
۸- تغییر نقاط جمع کننده	
	



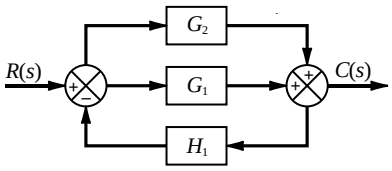
مثال ۲۰. به جای بلوک A در شکل (ب) چه عبارتی قرار دهیم تا هر دو نمودار بلوکی زیر معادل باشند؟



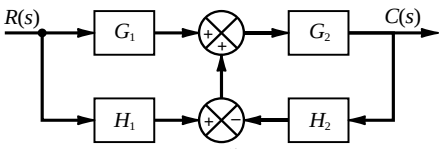
حل. اگر در شکل (الف) نقطه انشعاب ماقبل G را به بعد آن انتقال دهیم، شکل (ب) حاصل می‌شود بنابراین طبق قاعده۵ ساده‌سازی، به جای A باید $\frac{H_1}{G}$ قرار داد. همچنین چون بهره حلقه در هر دو شکل یکسان است لذا برای آن که دو نمودار بلوکی معادل باشند، باید بهره کلیه مسیرهای مستقیم از ورودی به خروجی در دو شکل یکسان باشند. در شکل (الف) بهره مسیر مستقیم از R به C برابر $G + H_1$ لذا در شکل (ب) داریم:

$$G\left(1+\boxed{A}\right) \equiv G + H_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A} = \frac{H_1}{G}$$

مثال۲۱. درهر یک از نمودارهای بلوکی زیر تابع تبدیل $\frac{C}{R}$ را محاسبه کنید.



(ب)



(الف)

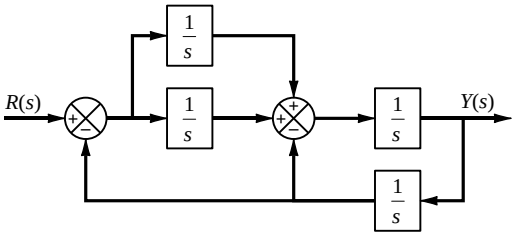
(الف) در این نمودار بلوکی G_1 و H_1 با هم موازی‌اند و G_2 و H_2 تشکیل یک حلقه فیدبکی داده‌اند

$$\frac{C(s)}{R(s)} = (G_1 + H_1)\left(\frac{G_2}{1 + G_2H_2}\right)$$

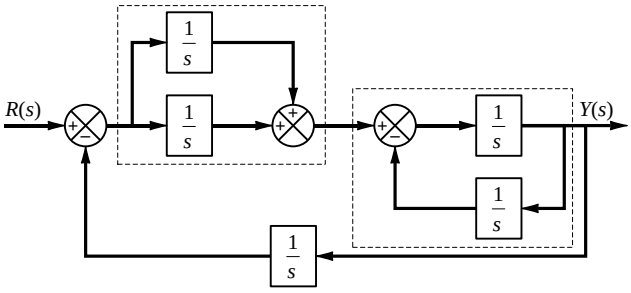
(ب) بلوک‌های G_1 و G_2 موازی بوده و ترکیب آنها با H تشکیل حلقه فیدبک منفی می‌دهد

$$T(s) = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2)H_1}$$

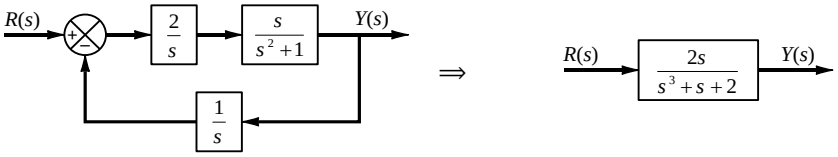
مثال۲۲. نمودار بلوکی زیر را ساده سازی کرده و تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{R(s)}$ را بدست آورید.



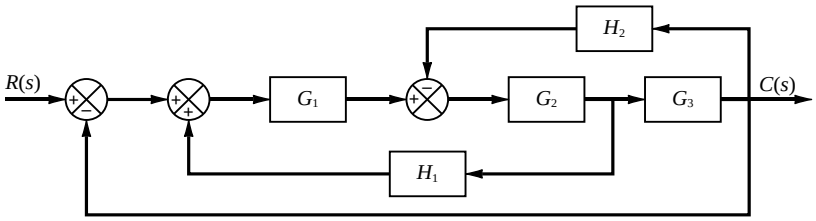
حل. مطابق شکل زیر جمع کننده با دو ورودی را به دو جمع کننده با دو ورودی تبدیل می‌کنیم



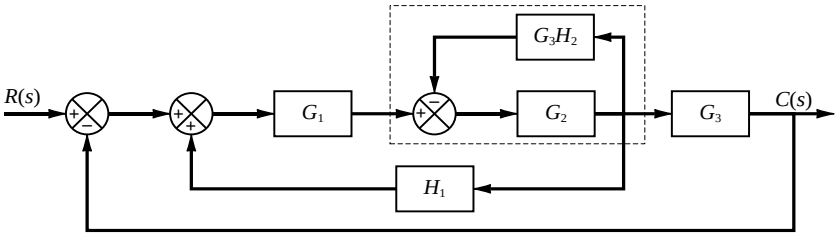
حال از قواعد (۲) و (۷) جدول ساده‌سازی نمودارهای بلوکی استفاده می‌کنیم



مثال۲۳. در سیستم کنترل زیر تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ را بدست آورید.



حل. با جابجایی نقطه انشعاب به قبل از بلوک G_3 داریم:



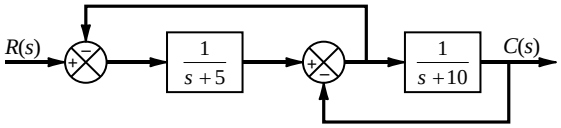
حال از داخلی‌ترین حلقه شروع کرده و تک تک حلقه‌های فیدبکی را ساده‌سازی می‌کنیم

$$T_1(s) = \frac{G_2}{1 + G_2G_3H_2}$$

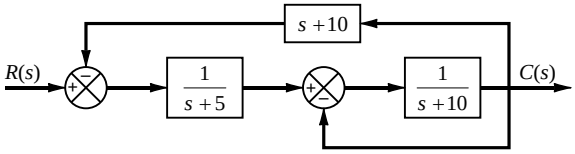
$$T_2(s) = \frac{G_1T_1}{1 + G_1T_1H_1} = \frac{G_1G_2}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}$$

$$T(s) = \frac{G_3T_2}{1 + G_3T_2} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3}$$

مثال۲۴. تابع تبدیل خروجی به ورودی $\frac{C}{R}$ در شکل زیر را بدست آورید.



حل. با جابجایی نقطه انشعاب به بعد از بلوک $\left(\frac{1}{s+10}\right)$، دو حلقه فیدبکی به صورت زیر خواهیم داشت:



تابع تبدیل حلقه داخلی $G_1(s)$ و تابع تبدیل کلی سیستم $T(s)$ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 11} \qquad \Rightarrow \qquad T(s) = \frac{\left(\frac{1}{s+11}\right)\left(\frac{1}{s+5}\right)}{1 + \frac{s+10}{(s+11)(s+5)}} = \frac{1}{s^2 + 17s + 65}$$

۵ نمودار گذر سیگنال

نمودار بلوکی برای نمایش ارتباطات متغیرهای ورودی و کنترل شونده کافی است ولی برای سیستم‌هایی با ارتباطات پیچیده روش جبر بلوکی و ساده‌سازی بلوکی وقت گیر و مشکل است. این بار شخصی بنام میسون (S. J. Mason) برای حل مشکل پا پیش گذاشته و نمودارهای گذر سیگنال و فرمول پر قدرت بهره میسون را ابداع کرده است تا بتوان «**تابع تبدیل و رابطه بین متغیرها را بدون نیاز به روش‌های گام به گام ساده‌سازی بلوکی و تنها در یک گام بدست آورد**»

نمودار گذر سیگنال و نمودار بلوکی سیستم شامل اطلاعات اصلی یکسانی هستند و هیچ یک بر دیگری ارجحیت ندارد. نمودار گذر سیگنال صورت ساده شده نمودار بلوکی است و فقط برای سیستم‌های خطی به کار می‌رود اما از لحاظ پیدا کردن روابط متغیرها نسبت به نمودار بلوکی دقت بالاتری دارد. در حقیقت نمودار گذر سیگنال، صرفاً یک روش گرافیکی برای نمایش ارتباط متغیرها و نوشتن معادلات جبری خطی یک سیستم است که در فرم روابط علت - معلولی نوشته شده‌اند.

۵–۱ تعاریف مربوط به نمودارهای گذر سیگنال

گره: یک گره، یک متغیر سیستم را نشان می‌دهد که مقدار آن برابر با مجموع همهٔ سیگنال‌های وارد شونده به گره می‌باشد. سیگنال‌های خارج شونده از گره هیچ تاثیری روی مقدار متغیر گره ندارند.

شاخه: یک شاخه، پاره خط جهت‌داری است که دو گره را به هم وصل می‌کند. سیگنال‌ها بر روی شاخه‌ها و تنها در جهت پیکان‌های مشخص شده عبور می‌کنند.

بهره: ضریب انتقال سیگنال بین دو گره را بهره شاخه می‌نامند و موقع عبور سیگنال از یک شاخه، مقدار سیگنال در بهره آن شاخه ضرب می‌شود.

گره ورودی یا منبع: گرهی که فقط دارای شاخه‌های خارج شونده می‌باشد و هیچ شاخه وارد شونده ندارد.

گره خروجی یا چاه: گرهی که فقط دارای شاخه‌های وارد شونده می‌باشد و هیچ شاخه خارج شونده‌ای ندارد.

هر گره غیرورودی را می‌توان با اتصال یک شاخه اضافی با بهره 1 به آن، به یک گره خروجی تبدیل کرد ولی با این روش نمی‌توان یک گره غیر ورودی را به یک گره ورودی تبدیل کرد.

گره مخلوط: گرهی است که شاخه‌های وارد شونده و شاخه‌های خارج شونده، هر دو را دارا می‌باشد.

مسیر: مجموعه‌ای از چند شاخه پشت سر هم و پیوسته است که در یک جهت طی می‌شوند، به طوریکه عبور از یک گره بیش از یک بار نباشد.

مسیر پیشرو: مسیری است که از یک گره ورودی آغاز می‌شود و به یک گره خروجی پایان می‌پذیرد و در طول آن عبور از هر گرهی بیش از یک بار نباشد.

حلقه: مسیری است که از یک گره شروع و به همان گره خاتمه می‌یابد و در طول آن با هیچ گرهی بیش از یک بار برخورد نمی‌کند.

حلقه‌های غیرتماسی یا مجزا: حلقه‌هایی هستند که هیچ گره مشترکی با هم ندارند.

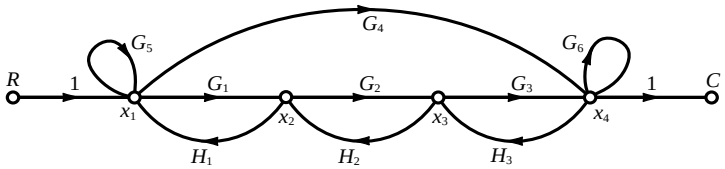
بهره مسیر: حاصلضرب بهره‌های شاخه‌هایی است که در طی مسیر با آنها برخورد می‌کنیم.

بهره مسیر پیشرو: حاصلضرب بهره‌های شاخه‌هایی که در طی مسیر پیشرو با آنها مواجه می‌شویم.

بهره حلقه: حاصلضرب بهره‌های شاخه‌هایی است که در طی حلقه با آنها روبرو می‌شویم.

خود حلقه: یک خود حلقه، حلقه‌ای است که تنها شامل یک شاخه می‌باشد.

تمام تعاریف ذکر شده برای نمودارهای گذر سیگنال را می‌توان با کمی حوصله و دقت در شکل ۲-۱۳ یافت.



شکل ۲-۱۳ نمونه‌ای از یک نمودار گذر سیگنال

۲-۵ رسم نمودار گذر سیگنال

فرض کنید یک سیستم خطی با دستگاه N معادله جبری زیر توصیف می‌شود

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{k=1}^{N} a_{k1}x_k + \sum_{k=1}^{M} b_{k1}r_k \\ \vdots \\ x_n = \sum_{k=1}^{N} a_{kn}x_k + \sum_{k=1}^{M} b_{kn}r_k \end{cases}$$

که در آن x_1، x_2، ... و x_N متغیرهای وابسته و r_1، r_2، ... و r_M متغیرهای ورودی می‌باشند و a_{kj} و b_{kj} بهره انتقال سیگنال‌های x_k و r_k به گره x_j می‌باشند.

مراحل تبدیل دستگاه جبری به گراف گذر سیگنال

۱- ابتدا باید از خطی بودن معادلات مطمئن شد. چون SFG تنها برای سیستم‌های خطی به کار می‌رود.

۲- معادلات جبری خطی داده شده را باید به صورت علت - معلول مرتب کرد. چون SFG تنها برای این گونه معادلات رسم می‌شود. معادلات علت – معلول روابطی هستند که در آن متغیرهای وابسته برحسب ورودی‌های مستقل و متغیرهای وابسته نوشته می‌شوند. در این نوع معادلات ورودی‌های مستقل برحسب ورودی‌های مستقل و متغیرهای وابسته نوشته نمی‌شوند.

۳- متغیرها را با گره نشان می‌دهیم و گره‌ها معمولاً از چپ به راست (بالا به پایین) و بسته به توالی علت‌ها و معلول‌ها در سیستم مرتب می‌شوند.

۴- رابطه $x_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj}\, x_k + \sum_{k=1}^{M} b_{kj}\, r_k$ را با توجه به این که a_{kj} و b_{kj} بهره شاخه‌های وارد شونده از گره‌های x_k و r_k به گره x_j می‌باشند به صورت گرافیکی تحقق می‌دهیم.

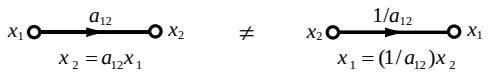
۵- با تحقق گرافیکی تمام روابط دستگاه N معادله جبری، SFG کلی بدست می‌آید.

نکته یادتان باشد با فلش مربوط به SFG همانند فلش جریان در مدارهای الکتریکی برخورد نکنید (هر چند هم شکل و هم نام هستند) در SFG نمی‌توان بهره را در عددی منفی ضرب کرده و جهت فلش را تغییر داد و در صورت انجام این کار حتماً تنبیه می‌شویم ولی شدت تنبیه معلوم نیست!!!

نکته سیگنال‌ها بر روی شاخه‌ها و تنها در جهت پیکان‌های مشخص شده عبور می‌کنند و شاخه‌ای که از گره x_k به سمت x_j کشیده می‌شود وابستگی متغیر x_j به متغیر x_k را نشان می‌دهد و عکس این وابستگی برقرار نیست. با این که دو رابطه زیر به لحاظ جبری برقرارند

$$x_2 = a_{12}x_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = \left(\frac{1}{a_{12}}\right)x_2$$

ولی در شکل ۲-۱۴ مشاهده می‌شود که نمودار گذر سیگنال متناظر با آنها با هم معادل نیستند به عبارتی رابطه بالا به لحاظ فیزیکی درست نمی‌باشد.



شکل ۲-۱۴ بررسی جهت فلش در نمودارهای گذر سیگنال

مثال۲۵. نمودار گذر سیگنال دستگاه خطی زیر را رسم نمایید.

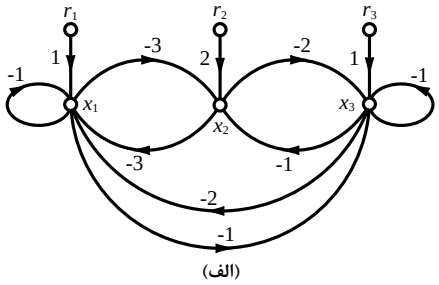
$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = r_1} \\ \boldsymbol{3x_1 + x_2 + x_3 = 2r_2} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 2x_3 = r_3} \end{cases}$$

حل. چون معادلات داده شده خطی‌اند پس می‌توان برای آنها نمودار گذر سیگنال رسم کرد. بدین منظور باید آنها را به صورت ارتباط علت و معلولی در آورد. ولی بیشمار رابطه علت معلولی می‌توان برای معادلات بالا ارائه کرد. در این مساله ما دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم

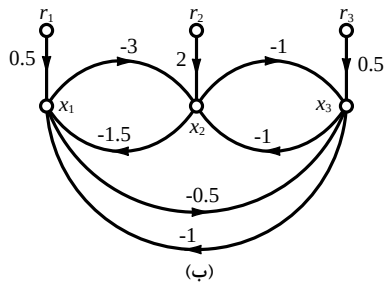
$$\begin{cases} x_1 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + r_1 \\ x_2 = -3x_1 - x_3 + 2r_2 \\ x_3 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + r_3 \end{cases} \qquad \textbf{(الف)}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1.5x_2 - x_3 + 0.5r_1 \\ x_2 = -3x_1 - x_3 + 2r_2 \\ x_3 = -0.5x_1 - x_2 + 0.5r_3 \end{cases} \qquad \textbf{(ب)}$$

حال با بکار بردن گام‌های ۳، ۴ و ۵ مر بوط به الگوریتم رسم SFG، به نمودارهای گذر سیگنال زیر می‌رسیم



(الف)

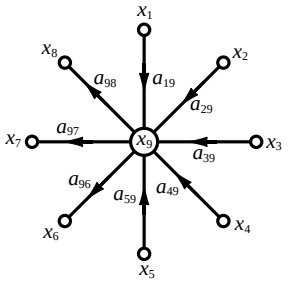


(ب)

نکته در مثال قبل، حتماً به متفاوت بودن SFGها برای یک دسته معادلات جبری یکسان پی‌برده‌اید پس می‌توان برای یک دسته معادلات جبری خطی، با توجه به نوع مرتب کردن معادلات، SFGهای متفاوتی بدست آورد یعنی **SFGهای یک سیستم یکتا و منحصر نیستند.**

۵-۳ جبر نمودار گذر سیگنال

بر اساس مفاهیم SFG می‌توانیم قواعد محاسباتی و جبر SFG را در ۵ قاعده بدست آورد.

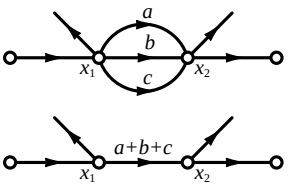


۱- مقدار متغیر یک گره برابر است با مجموع همه سیگنال‌هایی که به گره وارد می‌شوند.

$$x_9 = a_{19}x_1 + a_{29}x_2 + a_{39}x_3 + a_{49}x_4 + a_{59}x_5$$

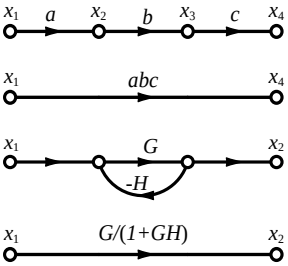
۲- مقدار متغیری که با یک گره مشخص می‌شود، در تمام شاخه‌های خارج شونده از گره فرستاده می‌شود.

$$x_6 = a_{96}x_9 \quad , \quad x_7 = a_{97}x_9 \quad , \quad x_8 = a_{98}x_9$$



۳- به جای شاخه‌های موازی و هم جهتی که دو گره را متصل می‌کنند می‌توان یک شاخه با بهره‌ای برابر با مجموع بهره‌های شاخه‌های موازی قرار داد.

$$x_2 = ax_1 + bx_1 + cx_1 = (a+b+c)x_1$$



۴- به جای چند شاخه سری و هم جهت می‌توان یک شاخه با بهره‌ای برابر با حاصلضرب بهره‌های شاخه‌ها قرار داد.

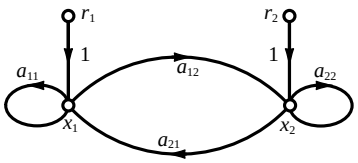
$$x_4 = cx_3 = c(bx_2) = cb(ax_1) = (abc)x_1$$

۵- یک حلقه فیدبک تنها را می‌توان به وسیله یک شاخه تنها با بهره نشان داده شده جایگزین کرد.

$$x_2 = \left(\frac{G}{1+GH}\right)x_1$$

به یاد دارید که در ساده‌سازی نمودارهای بلوکی، ۱۳ قاعده داشتیم ولی اینجا تنها ۵ قاعده داریم. اما فرمول بهره میسون جور بقیه قواعد را بر دوش می‌کشد و این همان ویژگی و برتری SFG بر نمودار بلوکی است.

مثال۲۶. معادلات جبری مربوط به نمودار گذر سیگنال زیر را نوشته و $T_{11} = \frac{x_1}{r_1}\Big|_{r_2=0}$ را بدست آورید.



حل. از SFG داده شده آشکارا روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + r_1 \\ x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 \end{cases}$$

ابتدا روابط بالا را به صورت زیر مرتب می‌کنیم

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{21}x_2 = r_1 \\ -a_{12}x_1 + (1-a_{22})x_2 = r_2 \end{cases}$$

حال با استفاده از روش کرامر متغیرهای x_1 و x_2 را تعیین می‌کنیم

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & -a_{21} \\ r_2 & 1-a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1-a_{22}}{\Delta}r_1 + \frac{a_{21}}{\Delta}r_2 \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & r_1 \\ -a_{12} & r_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_{12}}{\Delta}r_1 + \frac{(1-a_{11})}{\Delta}r_2$$

در روابط بالا Δ، دترمینان ضرایب دستگاه معادلات جبری می‌باشد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{21} \\ -a_{12} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1-(a_{11}+a_{22}+a_{12}a_{21}) + a_{11}a_{22}$$

و در نهایت تابع تبدیل T_{11} به صورت زیر بدست می‌آید

$$T_{11} = \frac{x_1}{r_1}\bigg|_{r_2=0} = \frac{1-a_{22}}{1-(a_{11}+a_{22}+a_{12}a_{21})+a_{11}a_{22}}$$

در واقع این مثال مقدمه‌ای بر فرمول بهره میسون است که به نمودارهای گذر سیگنال اعمال می‌شود و چنین مسائلی را به راحتی به جواب می‌رساند.

۶ فرمول بهره میسون

قبلاً دیدیم که برای بدست آوردن تابع تبدیل از روی نمودار بلوکی از روش ساده‌سازی گام به گام نمودار بلوکی یا عملیات جبری استفاده می‌شود که فرایندی طولانی است و به طور عمده به تجربه و دانش فرد بستگی دارد و هیچ روش سریعی وجود ندارد. همچنین بدست آوردن رابطه ورودی و خروجی به کمک عملیات جبری از روی نمودار گذر سیگنال نیز کار پر زحمت و خسته کننده‌ای است اما خوشبختانه در مورد نمودار گذر سیگنال، فرمول بهره میسون برای یافتن تابع تبدیل کلی سیستم در یک گام در دسترس است.

رابطه بین یک متغیر ورودی و یک متغیر خروجی در یک نمودار گذر سیگنال بوسیله بهره بین گره‌های ورودی و خروجی تعیین می‌شود و به **بهره کلی سیستم** (تابع تبدیل کلی) معروف است. فرمول بهره میسون برای بدست آوردن **بهره کلی سیستم T بین گره ورودی x_{in} و گره خروجی x_{out}** به صورت زیر می‌باشد

$$T = \frac{x_{out}}{x_{in}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

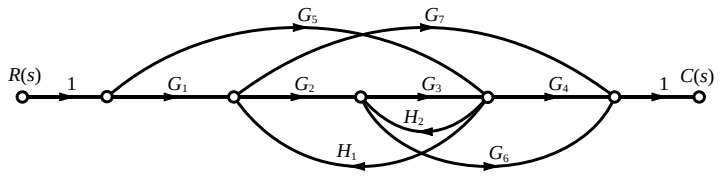
که در آن N تعداد کل مسیرهای پیشرو و P_k بهره مسیر پیشرو kام از x_{in} به x_{out} می‌باشند. عبارت Δ دترمینان SFG و Δ_k دترمینان SFG بعد از حذف مسیر پیشرو kام است.

$$\Delta = 1 - \begin{bmatrix} \text{مجموع بهره‌های} \\ \text{تک‌تک حلقه‌ها} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{مجموع حاصلضرب‌های} \\ \text{بهره‌های همه‌ترکیبات} \\ \text{ممکن هردوحلقه‌مجزا} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{مجموع حاصلضرب‌های} \\ \text{بهره‌های همه‌ترکیبات} \\ \text{ممکن هرسه‌حلقه‌مجزا} \end{bmatrix} + - \cdots$$

$$\Delta = 1 - \sum_m L_{m1} + \sum_m L_{m2} - \sum_m L_{m3} + - \cdots$$

در رابطه بالا L_{mr} حاصلضرب بهره mامین ترکیب ممکن از هر r حلقه مجزا است.

مثال۲۷. در گراف زیر مسیرهای مستقیم از گره ورودی به گره خروجی را مشخص کنید.

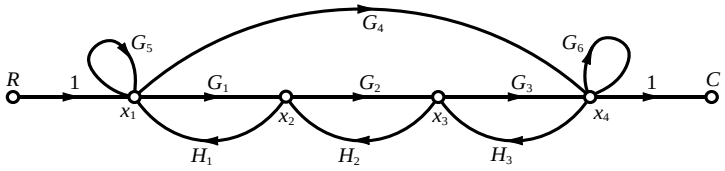


حل. مسیرهای پیشرو از ورودی به خروجی عبارتند از:

$P_1 = G_1G_2G_3G_4$ $\quad P_2 = G_1G_2G_6$ $\quad P_3 = G_1G_7$ $\quad P_4 = G_5G_4$

$P_5 = G_5H_1G_7$ $\quad P_6 = G_5H_1G_2G_6$ $\quad P_7 = G_5H_2G_6$

مثال۲۸. در نمودار گذر سیگنال زیر فرمول بهره میسون را به کار ببرید.



حل. بهره حلقه‌های تکی:

$L_1 = G_1H_1$ $\quad L_2 = G_2H_2$ $\quad L_3 = G_3H_3$

$L_4 = G_4H_1H_2H_3$ $\quad L_5 = G_5$ $\quad L_6 = G_6$

بهره حلقه‌های دو به دو مجزا:

$L_1L_3 = G_1H_1 \times G_3H_3$ $\quad L_1L_6 = G_1H_1 \times G_6$ $\quad L_2L_5 = G_2H_2 \times G_5$

$L_2L_6 = G_2H_2 \times G_6$ $\quad L_3L_5 = G_3H_3 \times G_5$ $\quad L_6L_5 = G_6 \times G_5$

بهره حلقه‌های سه به سه مجزا:

$$L_2L_5L_6 = G_2H_2 \times G_5 \times G_6$$

دترمینان نمودار گذر سیگنال:

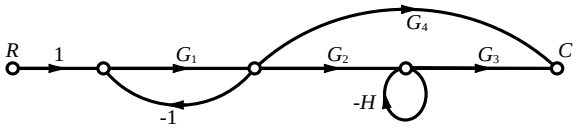
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + (L_1L_3 + L_1L_6 + L_2L_5 + L_2L_6 + L_3L_5 + L_6L_5) - L_2L_5L_6$$

مسیرهای پیشرو از R به C و دترمینان‌های متناظر:

$P_1 = 1 \times G_1 \times G_2 \times G_3 \times 1$ $\quad \Delta_1 = 1$

$P_2 = 1 \times G_4 \times 1$ $\quad \Delta_2 = 1 - G_2H_2$

مثال۲۹. در گراف گذر سیگنال زیر تابع انتقال بین ورودی R و خروجی C چیست؟



حل. مسیرهای پیشرو از R به C و دترمینان‌های متناظر با مسیرهای پیشرو عبارتند از:

$P_1 = G_1G_2G_3$ $\quad \Delta_1 = 1$

$P_2 = G_1G_4$ $\quad \Delta_2 = 1 + H$

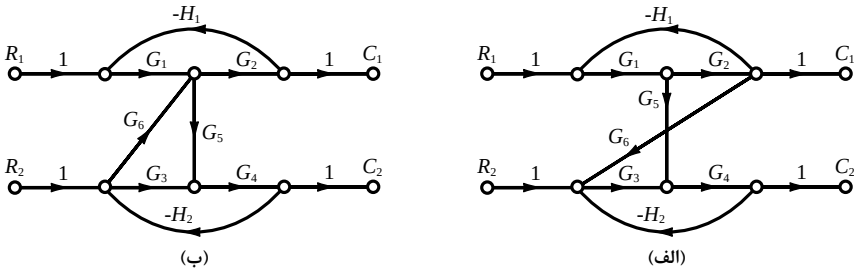
دترمینان کلی نمودار گذر سیگنال برابر است با:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1L_2 = 1 + G_1 + H + G_1H$$

تابع تبدیل کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_1G_2G_3+G_1G_4(1+H)}{1+H+G_1+G_1H}$$

مثال ۳۰. در هر یک از نمودارهای گذر سیگنال زیر، تابع تبدیل $\frac{C_1}{R_2}$ را تعیین کنید.



(الف) هیچ مسیر پیشرویی از R_2 به C_1 وجود ندارد و C_1 از R_2 دکوپله است بنابراین $\frac{C_1}{R_2}=0$ خواهد شد.

(ب) تنها مسیر پیشرو از R_2 به C_1 و دترمینان متناظر با آن برابر است با:

$$P_1=G_6G_2 \quad , \quad \Delta_1=1$$

بهره حلقه‌های تکی و دو به دو مجزا به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$L_1=-G_1G_2H_1 \qquad L_2=-G_3G_4H_2$$
$$L_3=-G_6G_5G_4H_2 \qquad L_1L_2=(G_1G_2H_1)(G_3G_4H_2)$$

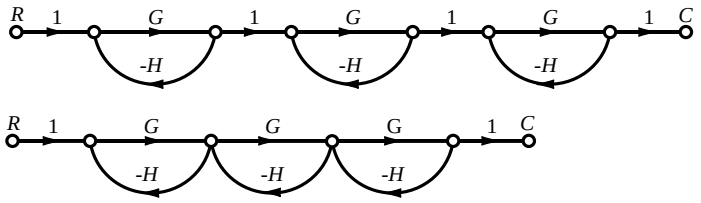
و در نتیجه دترمینان کلی نمودار گذر سیگنال برابر می‌شود با:

$$\Delta=1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2+G_6G_5G_4H_2+(G_1G_2H_1)(G_3G_4H_2)$$

با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{C_1}{R_2}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G_6G_2}{1+G_1G_2H_1+G_3G_4H_2+G_6G_5G_4H_2+(G_1G_2H_1)(G_3G_4H_2)}$$

مثال ۳۱. شرط یکسان بودن توابع تبدیل نمودارهای گذر سیگنال زیر را بدست آورید.



حل. توابع تبدیل هر یک از نمودارهای گذر سیگنال داده شده عبارت است از:

$$T_1(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G^3}{1+3GH+3(GH)^2+(GH)^3}$$

$$T_2(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G^3}{1+3GH+(GH)^2}$$

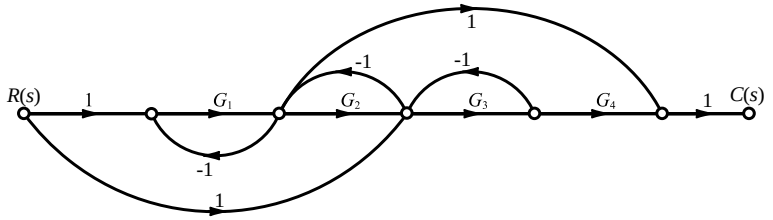
صورت‌های توابع تبدیل بالا برابرند، برای یکسان بودن آنها باید مخرج‌ها نیز برابر باشند

$$1 + 3GH + 3(GH)^2 + (GH)^3 = 1 + 3GH + (GH)^2$$

$$2(GH)^2 + (GH)^3 = 0 \implies GH = 0 \text{ یا } GH = -2$$

جواب قابل قبول $GH = -2$ است زیرا به ازای $GH = 0$ خروجی صفر می‌شود.

مثال۳۲. تابع تبدیل بین R و C را در نمودار گذر سیگنال زیر بدست آورید.



حل. با تعیین حلقه‌های گراف، دترمینان کلی گراف را بدست می‌آوریم

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_3 = 1 + G_1 + G_2 + G_3 + G_1G_3$$

چهار مسیر پیشرو و دترمینان‌های متناظر با آنها عبارتند از:

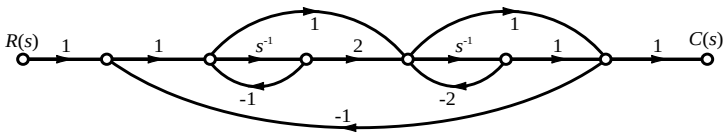
$P_1 = G_1G_2G_3G_4$ $\quad P_2 = G_1$ $\quad P_3 = G_3G_4$ $\quad P_4 = 1 \times (-1) \times 1$

$\Delta_1 = 1$ $\quad \Delta_2 = 1 + G_3$ $\quad \Delta_3 = 1 + G_1$ $\quad \Delta_4 = 1$

و در نهایت تابع تبدیل مورد نظر مساله به صورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4 \times 1 + G_1(1 + G_3) + G_3G_4(1 + G_1) + (-1) \times 1}{1 + G_1 + G_2 + G_3 + G_1G_3}$$

مثال۳۳. تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ سیستم نشان داده شده در نمودار گذر سیگنال شکل زیر را بیابید.



حل. مسیرهای پیشرو از R به C و دترمینان‌های متناظر با مسیرهای پیشرو عبارتند از:

$P_1 = 1 \times 1 \times s^{-1} \times 2 \times s^{-1} \times 1 \times 1 = 2s^{-2}$ $\quad \Delta_1 = 1$

$P_2 = 1 \times 1 \times s^{-1} \times 2 \times 1 \times 1 = 2s^{-1}$ $\quad \Delta_2 = 1$

$P_3 = 1 \times 1 \times 1 \times s^{-1} \times 1 \times 1 = s^{-1}$ $\quad \Delta_3 = 1$

$P_4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ $\quad \Delta_4 = 1$

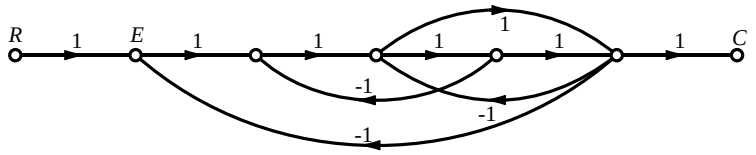
دترمینان نمودار گذر سیگنال نیز به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Delta = 1 - (-s^{-1} - 2s^{-1} - 2s^{-2} - s^{-1} - 2s^{-1} - 1) + 2s^{-2} = 2 + 6s^{-1} + 4s^{-2}$$

بنابراین تابع تبدیل کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}{2 + 6s^{-1} + 4s^{-2}} = \frac{s^2 + 3s + 2}{2s^2 + 6s + 4}$$

مثال۳۴. در نمودار گذر سیگنال شکل زیر تابع تبدیل $\frac{E}{R}$ را بدست آورید.



حل. ابتدا بهره حلقه‌ها را بدست می‌آوریم و واضح است هیچ دو حلقه مجزایی در این گراف وجود ندارد

$L_1 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times (-1) = -1$ $\qquad$ $L_2 = 1 \times 1 \times 1 \times (-1) = -1$

$L_3 = 1 \times 1 \times (-1) = -1$ $\qquad$ $L_4 = 1 \times 1 \times (-1) = -1$

$L_5 = 1 \times (-1) = -1$

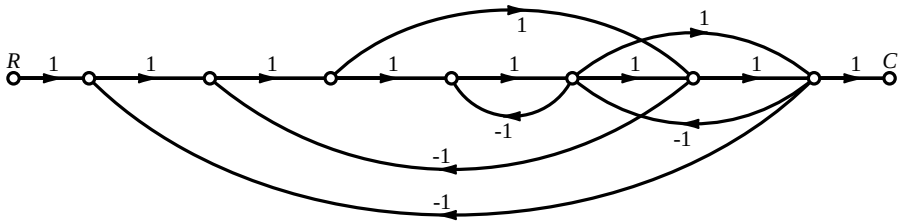
دترمینان نمودار گذر سیگنال Δ و تنها مسیر پیشرو از R به E و دترمینان متناظر Δ_1 برابرند با:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 6$$

$$P_1 = 1 \quad , \quad \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4 + L_5) = 4$$

و به آسانی می‌توان دریافت که تابع تبدیل کلی سیستم برابر با $E/R = 4/6$ خواهد شد.

مثال۳۵. در نمودار گذر سیگنال شکل زیر بهره $\frac{C}{R}$ را بیابید.



حل. بهره حلقه‌های گراف عبارتند از:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6 = L_7 = L_8 = -1 \quad , \quad L_3L_4 = L_4L_5 = L_5L_7 = 1$$

دترمینان نمودار گذر سیگنال برابر خواهد بود با:

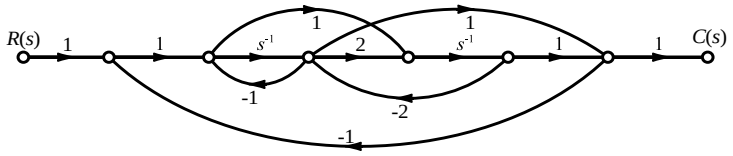
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_3L_4 + L_4L_5 + L_5L_7) = 12$$

مسیرهای پیشرو از R به C و دترمینان‌های متناظر با مسیرهای پیشرو نیز به صورت زیر می‌باشند

$$P_1 = P_2 = P_3 = 1 \quad , \quad \Delta_1 = \Delta_3 = 1 \quad , \quad \Delta_2 = 1 - L_5 = 2$$

بنابراین تابع تبدیل کلی سیستم برابر $C/R = 4/12$ می‌شود.

مثال۳۶. تابع تبدیل $\frac{C(s)}{R(s)}$ سیستم نشان داده شده در نمودار گذر سیگنال شکل زیر را بیابید.



حل. مسیرهای پیشرو از R به C و دترمینان‌های متناظر با مسیرهای پیشرو برابرند با:

$P_1 = 1 \times 1 \times s^{-1} \times 2 \times s^{-1} \times 1 \times 1 = 2s^{-2}$ $\Delta_1 = 1$

$P_2 = 1 \times 1 \times s^{-1} \times 1 \times 1 = s^{-1}$ $\Delta_2 = 1$

$P_3 = 1 \times 1 \times 1 \times s^{-1} \times 1 \times 1 = s^{-1}$ $\Delta_3 = 1$

$P_4 = 1 \times 1 \times 1 \times s^{-1} \times (-2) \times 1 \times 1 = -2s^{-1}$ $\Delta_4 = 1$

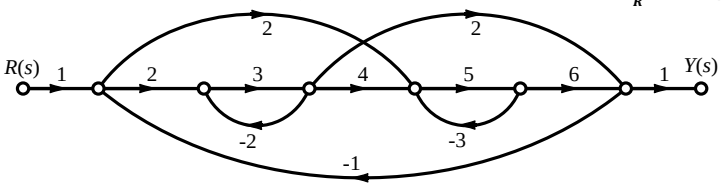
دترمینان نمودار گذر سیگنال نیز به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Delta = 1 - (-s^{-1} - 4s^{-1} - 2s^{-2} + 2s^{-1} - s^{-1} - s^{-1} + 2s^{-1}) = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}$$

بنابراین تابع تبدیل کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

مثال۳۷. تابع تبدیل $\frac{Y}{R}$ در گراف گذر سیگنال شکل زیر کدام است؟



حل. حلقه‌های سیستم عبارتند از:

$L_1 = 3 \times (-2)$ $L_5 = 2 \times 3 \times 2 \times (-1)$

$L_2 = 5 \times (-3)$ $L_1L_2 = 6 \times 15$

$L_3 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times (-1)$ $L_1L_4 = 6 \times 60$

$L_4 = 2 \times 5 \times 6 \times (-1)$ $L_2L_5 = 15 \times 12$

دترمینان گراف برابر خواهد شد با:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_2 + L_1L_4 + L_2L_5) = 1444$$

مسیرهای پیشرو و دترمینان‌های متناظر آنها نیز عبارتند از:

$P_1 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1$ $\Delta_1 = 1$

$P_2 = 1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1$ $\Delta_2 = 1 - L_2 = 16$

$P_3 = 1 \times 2 \times 5 \times 6 \times 1$ $\Delta_2 = 1 - L_1 = 7$

بهره کلی سیستم برابر می‌شود با:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{1332}{1444}$$

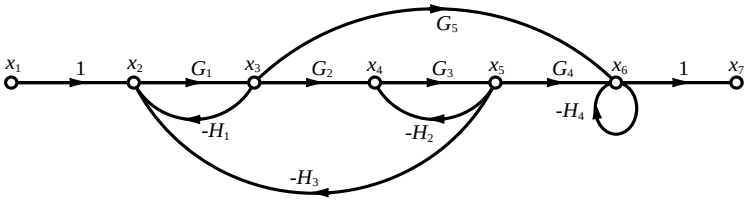
۶–۱ کاربرد فرمول بهره میسون بین گره‌های خروجی و گره‌های غیرورودی

فرمول بهره میسون تنها میان گره ورودی و گره خروجی قابل استفاده است یعنی x_{in} باید گره ورودی و x_{out} باید گره خروجی باشد، در غیر این صورت باید برای یافتن رابطه بین یک گره خروجی و یک گره غیر ورودی از فرمول بهره میسون به صورت زیر استفاده کنیم:

$$T = \frac{x_{out}}{x_1} = \frac{x_{out}/x_{in}}{x_1/x_{in}} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{N} P_k\Delta_k\right)/\Delta}{\left(\sum_{k=1}^{N_2} P_k\Delta_k\right)/\Delta} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} P_k\Delta_k}{\sum_{k=1}^{N_2} P_k\Delta_k}$$

نکته در یک نمودار گذر سیگنال، دترمینان Δ برای تمام ورودی‌ها و خروجی‌های آن یکسان است بنابراین در کاربرد فرمول بهره میسون بین گره‌های خروجی و گره‌های غیر ورودی نیازی به محاسبه دترمینان نمودار گذر سیگنال Δ نیست.

مثال۳۸. در نمودار گذر سیگنال زیر بهره بین x_2 و x_7 را بدست آورید.



حل. چون x_2 گره ورودی نیست بنابراین نمی‌توان از فرمول بهره میسون به صورت مستقیم استفاده کرد و باید به صورت زیر عمل کرد

$$\frac{x_7}{x_2}=\frac{x_7/x_1}{x_2/x_1}=\frac{\frac{G_1G_2G_3G_4(1)+G_1G_5(1+G_3H_2)}{\Delta}}{\frac{1(1+G_3H_2+H_4+G_3H_2H_4)}{\Delta}}=\frac{G_1G_2G_3G_4+G_1G_5(1+G_3H_2)}{1+G_3H_2+H_4+G_3H_2H_4}$$

۷ تبدیل نمودار بلوکی به نمودار گذر سیگنال

نمودار گذر سیگنال، صورت ساده شده نمودار بلوکی است و هر دو ابزاری گرافیکی بوده و دارای اطلاعات یکسانی از سیستم هستند ولی برای ساده‌سازی نمودار بلوکی و بدست آوردن تابع تبدیل هیچ روش استانداردی وجود ندارد و فرایندی خسته کننده و طولانی است که به طور عمده به تجربه و دانش فرد بستگی دارد. در حالی که، برای بدست آوردن تابع تبدیل از روی SFG فرمول بهره میسون وجود دارد که از لحاظ پیدا کردن روابط متغیرها نسبت به نمودار بلوکی دقت بالاتری دارد. تبدیل نمودار بلوکی به SFG به سادگی میسر می‌شود. مقایسه نمودار بلوکی و نمودار گذر سیگنال در جدول ۲-۳ آورده شده است.

مراحل تبدیل نمودار بلوکی به نمودار گذر سیگنال

۱- در نمودار بلوکی داده شده، گره‌هایی را در ورودی، خروجی، نقطه جمع کننده، نقطه انشعابی و بین بلوک‌های متوالی فرض کنید.

۲- گره‌ها را به طور جداگانه و به صورت نقاط پر رنگ بزرگی رسم کنید و آنها را به صورت ۱، ۲، ۳ و ... شماره گذاری کنید.

۳- از دیاگرام بلوکی، بهره بین گره‌ها در مسیر پیشرو اصلی را پیدا کنید و همهٔ گره‌های متناظر را به وسیله خطوط مستقیم جهت‌داری به هم وصل کنید و بهره بین گره‌ها را روی هر شاخه مشخص کنید.

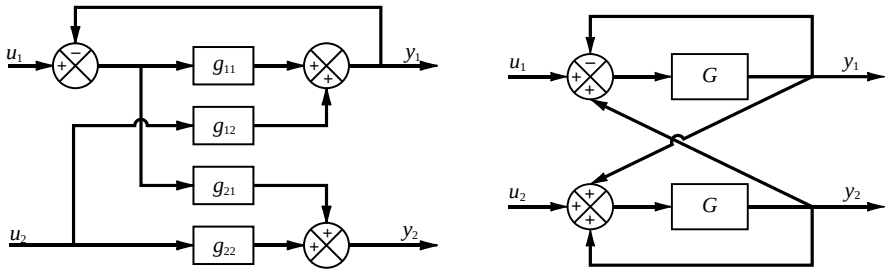
۴- مسیرهای پیشرو بین گره‌های مختلف را رسم کرده و روی شاخه‌های جهت‌دار، بهره بین گره‌ها را نشان دهید.

۵- مسیرهای فیدبکی بین گره‌های مختلف را رسم و بهره آنها را همراه با علامت مشخص کنید.

جدول ۲-۳ مقایسه نمودار بلوکی و نمودار گذر سیگنال

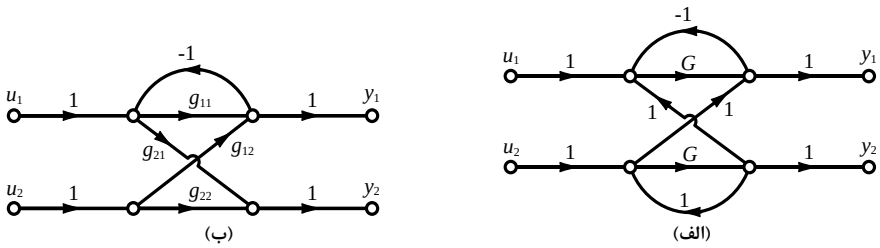
نمودار بلوکی	نمودار گذر سیگنال
۱- یک نمایش تصویری از عملکرد هر عنصر و عبور سیگنال‌هاست. عبور سیگنال در سیستم را محسوس‌تر از تجسم سیستم اصلی مشخص می‌کند.	۱- یک نمایش گرافیکی از ارتباط بین متغیرهای یک مجموعه معادلات جبری خطی است که در فرم روابط علت و معلولی نوشته می‌شوند.
۲- نمودار بلوکی هم برای نمایش سیستم‌های خطی و هم برای نمایش سیستم‌های غیرخطی به کار می‌رود.	۲- نمودار گذر سیگنال توسط قواعد ریاضی سفت و سختی بیشتر از نمودار بلوکی محدود شده است و فقط برای سیستم‌های خطی به کار می‌رود.
۳- روش سیستماتیکی نیست و هیچ‌گونه فرمول مستقیمی برای یافتن تابع تبدیل کلی سیستم وجود ندارد. روش ساده‌سازی گام به گام برای یافتن تابع تبدیل استفاده می‌شود که طولانی بوده و مهارت فرد بستگی دارد.	۳- روش سیستماتیکی است و فرمول بهره میسون برای یافتن تابع تبدیل کلی سیستم در دسترس است و تابع تبدیل می‌تواند در یک گام بدست آورده شود.
۴- نمودار بلوکی برای یک سیستم یکتا نیست سیستم‌های نامرتبط و نامشابه می‌توانند به وسیله نمودار بلوکی یکسانی نشان داده شوند.	۴- برای یک سیستم داده شده، SFG یکتا نیست. سیستم‌های خطی نامرتبط و نامشابه می‌توانند به وسیله نمودار گذر سیگنال یکسانی نشان داده شوند.

مثال۳۹. برای نمودار بلوکی داده شده یک SFG رسم نمایید و ماتریس تابع تبدیل آن را بیابید.



(الف) (ب)

حل. با اعمال الگوریتم مربوطه، SFGهای متناظر با نمودارهای بلوکی داده شده به صورت زیر بدست می‌آیند.



(الف) (ب)

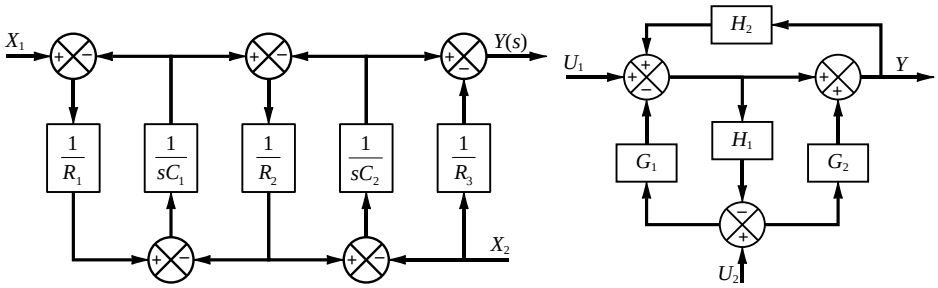
هر دو سیستم داده شده، سیستم چندمتغیره هستند و ماتریس انتقال آن با استفاده از اصل جمع آثار و فرمول بهره میسون به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{G}{1-2G^2}\begin{bmatrix} 1-G & G \\ G & 1+G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(الف)}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_{11}}{1+g_{11}} & \frac{g_{12}}{1+g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{1+g_{11}} & g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{1+g_{11}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ب)}$$

نکته یکی از اهداف تبدیل نمودار بلوکی یک سیستم به SFG، اعمال فرمول بهره میسون به آن سیستم است ولی با بدست آوردن مهارت کافی در مورد ارتباط SFG و نمودار بلوکی می‌توان بدون رسم SFG فرمول میسون را برای نمودار بلوکی به کار برد.

مثال ۴۰. در نمودارهای بلوکی زیر توابع تبدیل $\frac{Y(s)}{U_1(s)}$ و $\frac{Y(s)}{X_1(s)}$ را بدست آورید.



(ب) (الف)

حل. با به کار بردن فرمول بهره میسون برای این نمودارهای بلوکی، توابع تبدیل آنها بدست می‌آید

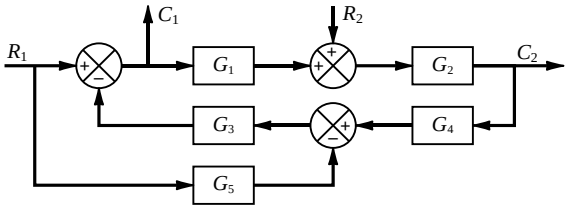
$$\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{1-G_2H_1}{1-G_1H_1-H_2-G_2H_2H_1}$$

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1}\times\frac{1}{C_1s}\times\frac{1}{R_2}\times\frac{1}{C_2s}}{1+\frac{1}{R_1}\times\frac{1}{C_1s}+\frac{1}{R_2}\times\frac{1}{C_1s}+\frac{1}{R_2}\times\frac{1}{C_2s}+\left(\frac{1}{R_1}\times\frac{1}{C_1s}\right)\left(\frac{1}{R_2}\times\frac{1}{C_2s}\right)}$$

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2)s+1}$$

سوالات آزمون های ارشد برق و مکانیک

۱- در سیستم زیر تابع تبدیل $\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$ کدام است؟ (برق۶۷)



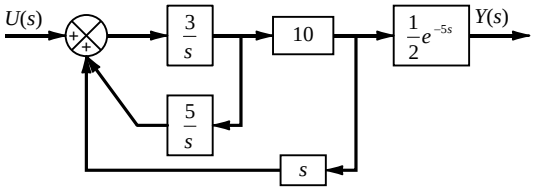
۱) $\frac{1+G_3G_5}{1+G_1G_2G_3G_4}$

۲) $\frac{1}{1+G_1G_2G_3G_4-G_3G_5}$

۳) $\frac{1}{1+G_1G_2G_3G_4+G_3G_5}$

۴) $\frac{1+G_3G_5}{1+G_1G_2G_3G_4+G_3G_5}$

۲- تابع تبدیل $H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}$ در سیستم شکل زیر کدام است؟ (برق۶۸)



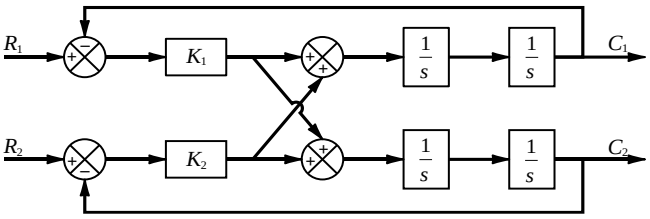
۱) $H(s)=\left(\frac{15}{31}\right)\frac{se^{-5s}}{s^2+(15/31)}$

۲) $H(s)=\left(\frac{15}{31}\right)\frac{se^{-5s}}{s^2-(15/31)}$

۳) $H(s)=\left(\frac{-15}{29}\right)\frac{se^{-5s}}{s^2-(15/29)}$

۴) $H(s)=\left(\frac{-15}{29}\right)\frac{se^{-5s}}{s^2+(15/29)}$

۳- تابع تبدیل $T_{12}=\frac{C_1}{R_2}$ در سیستم زیر کدام است؟ (برق۷۰)



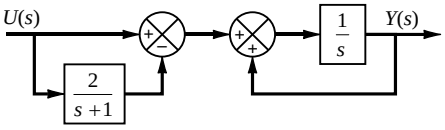
۱) $T_{12}=\frac{K_2s^2}{s^3+(K_1+K_2)s^2+2K_1K_2}$

۲) $T_{12}=\frac{K_2}{s^2+(K_1+K_2)}$

۳) $T_{12}=\frac{(K_1+K_2)s^2}{s^4+(K_1+K_2)s^3+K_2s^2+K_1K_2}$

۴) $T_{12}=\frac{K_1s+K_2}{K_1s^2+(K_1+K_2)s+K_1K_2}$

۴- تابع تبدیل بین ورودی $U(s)$ و خروجی $Y(s)$ در سیستم زیر کدام است؟ (مکانیک ۷۰ و ۷۳)



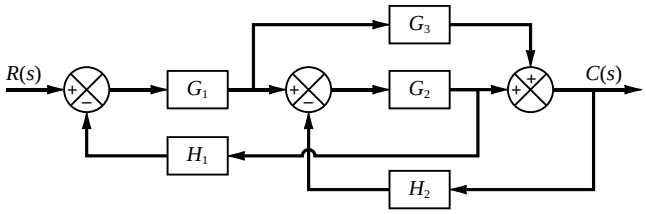
۱) $\frac{1}{s+1}$

۲) $\frac{1}{(s+1)^2}$

۳) $\frac{s+1}{s-1}$

۴) $\frac{1}{(s+1)(s-1)}$

۳۰- معادله مشخصه سیستم حلقه بسته زیر در کدام گزینه صحیح است؟ (برق۹۰)



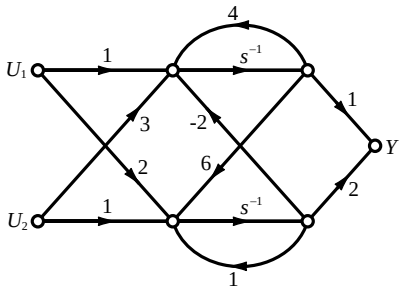
۱) $1 + G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۲) $1 + G_1G_2H_2 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۳) $1 + G_2H_1 + G_1G_2H_1 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۴) $1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1 - G_1G_2G_3H_1H_2$

۳۱- در سیستمی با سیگنال گذر جریان زیر، تابع تبدیل $\left.\frac{Y(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2=0}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟ (برق۹۱)



۱) $\left.\frac{Y(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2=0} = \frac{5(s-1)}{s^2-5s+8}$

۲) $\left.\frac{Y(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2=0} = \frac{5(s-1)}{s^2-5s+12}$

۳) $\left.\frac{Y(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2=0} = \frac{5s-17}{s^2-5s+16}$

۴) $\left.\frac{Y(s)}{U_1(s)}\right|_{U_2=0} = \frac{5(s-1)}{s^2-5s+16}$

۳۲- در سیستمی با تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1}$، تحت چه شرایطی $Y(s) \equiv 0$ می‌شود؟ (برق۹۲)

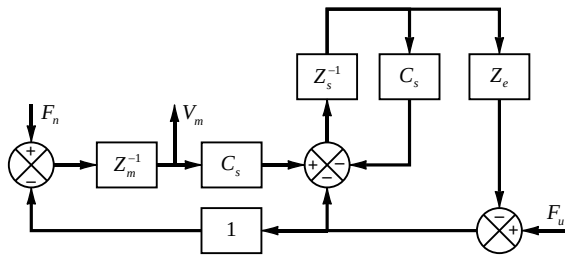
۱) $y(0) = 1$ و $r(t) = e^{+t}$

۲) $y(0) = free$ و $r(t) = e^{-t}$

۳) $y(0) = -1$ و $r(t) = e^{+t}$

۴) $y(0) = 0$ و $r(t) = e^{-t}$

۳۳- سیستم تله اپراتوری زیر را در نظر بگیرید. تابع تبدیل $\frac{V_m}{F_n}$ کدام است؟ (برق۹۳)



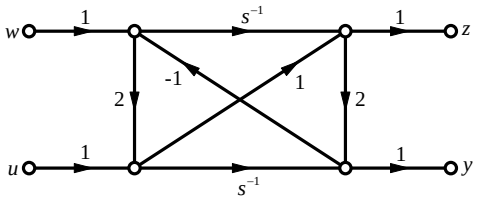
۱) $\frac{Z_s}{Z_m(Z_s + C_s + Z_e) + C_sZ_e}$

۲) $\frac{(Z_s + C_s)Z_e}{Z_m(Z_s + C_s + Z_e) + C_sZ_e}$

۳) $\frac{(Z_s + C_s + Z_e)}{Z_m(Z_s + C_s + Z_e)}$

۴) $\frac{(Z_s + C_s + Z_e)}{Z_m(Z_s + C_s + Z_c) + C_sZ_e}$

۳۴- شکل زیر یک سیستم دو دهانه را نشان می‌دهد. اگر قانون کنترلی به شکل $u = -ky$ تعریف گردد، تابع تبدیل $\frac{Z(s)}{W(s)}$ کدام است؟ (برق۹۴)



۱) $\dfrac{s+k}{s^2+(k+4)s}$

۲) $\dfrac{2s^2+s+k}{5s^2+ks}$

۳) $\dfrac{2s^2+s+k}{5s^2+(k+4)s}$

۴) $\dfrac{2s^2+s+k}{(2k+5)s^2+(k+4)s}$

پاسخ آزمون های ارشد برق و مکانیک

۱- نمودار بلوکی داده شده، یک سیستم دو ورودی - دو خروجی است بنابراین تابع تبدیل $\frac{C_1(s)}{R_1(s)}$ را با قرار دادن $R_2 = 0$ و با استفاده از فرمول بهره میسون بدست می‌آوریم:

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1 \times 1 + G_3G_5 \times 1}{1 + G_1G_2G_3G_4}$$

گزینه «۱» صحیح است.

۲- با استفاده از فرمول بهره میسون داریم:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 - \left(\frac{5}{s} \times \frac{3}{s} + \frac{3}{s} \times 10 \times s\right) = -29 - \frac{15}{s^2}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{15}{s}e^{-5s} \times 1}{-29 - \frac{15}{s^2}} = \frac{-15se^{-5s}}{29\left(s^2 + \frac{15}{29}\right)}$$

گزینه «۴» صحیح است.

۳- با توجه به قضیه جمع آثار، تابع تبدیل $T_{12} = \frac{C_1}{R_2}$ را با قرار دادن $R_1 = 0$ و با استفاده از فرمول بهره میسون بدست می‌آوریم

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 - \left(-\frac{K_1}{s^2} - \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_1K_2}{s^4}\right) + \frac{K_1K_2}{s^4}$$

$$T_{12} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{K_2}{s^2} \times 1}{1 + \frac{K_1}{s^2} + \frac{K_2}{s^2} - \frac{K_1K_2}{s^4} + \frac{K_1K_2}{s^4}} = \frac{K_2}{s^2 + (K_1 + K_2)}$$

گزینه «۲» صحیح است.

۴- دو بلوک موازی و یک حلقه فیدبک مثبت داریم که با هم سری شده‌اند

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(1 - \frac{2}{s+1}\right)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s}}\right) = \left(\frac{s-1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{1}{s+1}$$

گزینه «۱» صحیح است.

۵- گزینه «۱» نادرست است، زیرا متغیر فیدبک شده توسط شاخه d در هر دو گراف متفاوت است. بنابراین گزینه «۴» نیز نادرست است. همچنین به دلیل این که ورودی $\dot{y}_1$ را نمی‌توان به صورت نشان داده شده در گزینه «۲» حذف نمود، بنابراین این گزینه نیز نادرست است. بنابراین با توجه به جبر نمودار گذر سیگنال، گزینه «۳»صحیح است.

با به کار بردن فرمول بهره میسون خواهیم داشت:

$$\frac{C}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{6}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{48\times 11+14\times 1+105\times 5+(-192)\times 1+(-168)\times 1}{39}=\frac{851}{39}$$

گزینه «۱» صحیح است.

۲۸- تبدیل لاپلاس خروجی را بدست آورده و آن را به کسرهای جزئی بسط می‌دهیم

$$Y(s)=\left(\frac{1-s}{s(1+s)}\right)\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}+\frac{-2}{s}+\frac{2}{s+1}$$

با تبدیل لاپلاس معکوس گرفتن از $Y(s)$ داریم:

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=t-2+2e^{-t}$$

با مشتق‌گیری از $y(t)$ و مساوی صفر قرار دادن آن، لحظه رخ دادن کمترین مقدار خروجی بدست می‌آید

$$\frac{dy(t)}{dt}=1+2(-e^{-t})=0 \quad\Rightarrow\quad e^{-t}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad t=ln\,2$$

گزینه «۴» صحیح است.

۲۹- با ساده‌سازی نمودار بلوکی داده شده تابع تبدیل کلی سیستم برابر خواهد بود با:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\left(\frac{2}{s}+1\right)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}}\right)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{3}{s}}\right)=\frac{s+2}{s(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s(s+3)}$$

برای ورودی ضربه $U(s)=1$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+3}\right)$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{3}(1-e^{-3t})$$

گزینه «۲» صحیح است.

۳۰- در نمودار بلوکی داده شده سه حلقه وجود دارد که بهره‌های آن به صورت زیر است

$$L_1=-G_1G_2H_1 \qquad L_2=-G_2H_2 \qquad L_3=G_1G_3H_2G_2H_1$$

تمامی حلقه‌ها با هم در تماس‌اند و حلقه‌های مجزا وجود ندارند. لذا با توجه به فرمول بهره میسون معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از:

$$\Delta=1-(L_1+L_2+L_3)=1+G_1G_2H_1+G_2H_2-G_1G_2G_3H_1H_2$$

گزینه «۴» صحیح است.

۳۱- در SFG داده شده چهار مسیر پیشرو از U_1 به $Y(s)$ به همراه دترمینان‌های متناظرآنها عبارتند از:

$P_1=1\times s^{-1}\times 1$ $\qquad$ $\Delta_1=1-s^{-1}$

$P_2=2\times s^{-1}\times 2$ $\qquad$ $\Delta_2=1-4s^{-1}$

$P_3=1\times s^{-1}\times 6\times s^{-1}\times 2$ $\qquad$ $\Delta_3=1$

$P_4=2\times s^{-1}\times(-2)\times s^{-1}\times 1$ $\qquad$ $\Delta_4=1$

بهره حلقه‌های گراف و حلقه‌های مجزا عبارتند از:

$$L_1 = s^{-1} \times 1 \qquad L_2 = s^{-1} \times 4$$
$$L_3 = s^{-1} \times 6 \times s^{-1} \times (-2) \qquad L_1L_2 = 4s^{-2}$$

دترمینان گراف به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1L_2 = 1 - 5s^{-1} + 16s^{-2}$$

با استفاده از فرمول بهره میسون خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U_1(s)}} = \frac{\mathrm{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + P_4\Delta_4}}{\Delta}$$
$$\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{s^{-1}(1 - s^{-1}) + 4s^{-1}(1 - 4s^{-1}) + 12s^{-2} - 4s^{-2}}{1 - 5s^{-1} + 16s^{-2}} = \frac{5s - 9}{s^2 - 5s + 16}$$

متاسفانه هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

۳۲- از روی تابع تبدیل داده شده معادله دیفرانسیل سیستم را بدست می‌آوریم

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s-1}{s+1} \quad \Longrightarrow \quad \dot{y}(t) + y(t) = \dot{r}(t) - r(t)$$

حال با در نظر گرفتن شرایط اولیه از طرفین معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = sR(s) - R(s)$$
$$Y(s) = \frac{s-1}{s+1}R(s) + \frac{y(0)}{s+1}$$

برای این که $Y(s) \equiv 0$ باشد باید $R(s)$ قطبی در $s = 1$ داشته باشد بنابراین $R(s) = \frac{1}{s-1}$ و به عبارتی $r(t) = e^{+t}u(t)$ خواهد بود و برای صفر شدن $Y(s)$ باید داشته باشیم:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{y(0)}{s+1} = \frac{1 + y(0)}{s+1} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad y(0) = -1$$

گزینه «۳» صحیح است.

۳۳- سوال ساده‌ای است که با فرمول بهره میسون به راحتی قابل حل است. اگر در استفاده از فرمول بهره میسون برای نمودارهای بلوکی مهارت داشته باشید نیازی به رسم نمودار گذر سیگنال نیست. واضح است که از F_n به V_m تنها یک مسیر پیشرو با بهره $P_1 = Z_m^{-1}$ وجود دارد و دترمینان متناظر با این مسیر برابر با $\Delta_1 = 1 + C_sZ_s^{-1} + Z_eZ_s^{-1}$ است. نمودار بلوکی داده شده سه حلقه تماسی دارد، لذا دترمینان کلی گراف به راحتی و به صورت زیر قابل محاسبه است

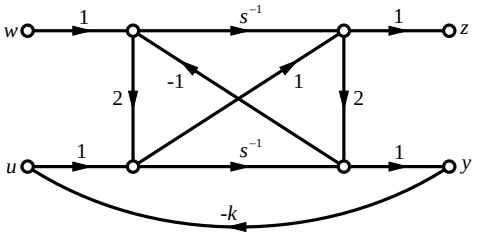
$$\Delta = 1 + C_sZ_s^{-1} + Z_eZ_s^{-1} + Z_m^{-1}C_sZ_s^{-1}Z_e$$

حال قرار دادن عبارت‌های بدست آمده، در فرمول بهره میسون کار چندان سختی نیست

$$\frac{V_m}{F_n} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{Z_m^{-1}(1 + C_sZ_s^{-1} + Z_eZ_s^{-1})}{1 + C_sZ_s^{-1} + Z_eZ_s^{-1} + Z_m^{-1}C_sZ_s^{-1}Z_e} = \frac{Z_s + C_s + Z_e}{Z_m(Z_s + C_s + Z_e) + C_sZ_s}$$

گزینه «۴» صحیح است.

۳۴- برای محاسبه تابع تبدیل خواسته شده، ابتدا باید قانون کنترلی داده شده را روی نمودار گذر سیگنال سیستم اعمال کنیم؛ بدین صورت که شاخه‌ای با بهره $k-$ از گره y به گره u وصل می‌کنیم و نمودار گذر سیگنالی به شکل زیر بدست می‌آوریم. حال با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل را تعیین می‌کنیم.



نمودار گذر سیگنال بالا، دارای پنج حلقه می‌باشد و هیچ دو حلقه مجزایی هم وجود ندارد

$$L_1 = (2)(s^{-1})(-1) = -2s^{-1}$$
$$L_2 = (s^{-1})(2)(-1) = -2s^{-1}$$
$$L_3 = (2)(1)(2)(-1) = -4$$
$$L_4 = (2)(1)(-k)(1)(1) = -2k$$
$$L_5 = (1)(s^{-1})(1)(-k) = -ks^{-1}$$

دترمینان کلی گراف به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 5 + 2k + (4 + k)s^{-1}$$

از گره w به گره z دو مسیر پیشرو وجود دارد که بهره این مسیرها و دترمینان متناظرشان عبارتند از:

$$P_1 = (1)(s^{-1})(1) = s^{-1} \qquad \Delta_1 = 1 - L_5 = 1 + ks^{-1}$$
$$P_2 = (1)(2)(1)(1) = 2 \qquad \Delta_2 = 1$$

و در نهایت تابع تبدیل مورد نظر به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{Z(s)}{W(s)} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{(s^{-1})(1 + ks^{-1}) + (2)(1)}{5 + 2k + (4 + k)s^{-1}} = \frac{2s^2 + s + k}{(5 + 2k)s^2 + (4 + k)s}$$

گزینه «۴» صحیح است.

منابع و مراجع

[1] Benjamin C. Kuo, **Automatic Control Systems**, 7th Edition, John Wiley & Sons, 1995.

[2] Katsuhiko Ogata, **Modern Control Engineering**, 5th Edition, Prentice Hall, 2009.

[3] Norman S. Nise, **Control Systems Engineering**, 6th Edition, John Wiley & Sons, 2010.

[4] Gene F. Franklin and J. Da Powell and Abbas Emami – Naeini, **Feedback Control of Dynamic Systems**, 7th Edition, Prentice Hall, 2014

[5] Richad C. Dorf and Robert H. Bishop, **Modern Control Systems**, 12th Edition, Prentice Hall, 2010.

[6] John J. D'Azzo and Constantine H. Houpis, **Linear Control System Analysis and Desgin,** 5th Edition**,** CRC Press, 2003.

[7] Graham C. Goodwin and Stefan F. Graebe and Mario E. Salgado, **Control System Design**, Prentice Hall, 2001.

[8] Anand Kumar, **Control Systems**, 2nd Edition, Prentice Hall of India, 2014

[9] Li Qiu and Kemin Zhou, **Introduction to Feedback Control**, Prentice Hall, 2009.

[10] D. Roy Choudhury, **Modern Control Engineering**, Prentice Hall of India, 2005.

[11] M. Gopal, **Control Systems Principles and Design**, Tata McGraw Hill, 1997.

[12] Petar Dorato, **Analytic Feedback System Design An Interpolation Approach**, Brooks/Cole, 2000.

این کتاب توسط مولف تحت عنوان «**طراحی تحلیلی سیستم‌های فیدبکی با روش درونیابی**» ترجمه شده و در تابستان ۱۳۹۵ در انتشارات دانشگاه بناب به چاپ رسیده است.

[۱۳] مجموعه سوالات آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد و دکتری رشته‌های مهندسی برق و مکانیک.