فهرست

پیشگفتار

کتابی که پیش روی خواننده است، بر پایهٔ برنامهٔ آموزشی و سرفصل‌های «جدید» وزارت علوم، تحقیقات و فناوری تدوین و تنظیم شده است.

در هر فصل، علاوه بر ارائهٔ تعریف دقیق مفاهیم مربوط و قضیه‌های اساسی دربارهٔ آنها، تعداد مناسبی مثال حل شده گنجانده شده است تا خواننده با روش استفاده از آموخته‌هایش برای حل مسأله‌ها آشنا شود. در پایان هر فصل، یک پیوست افزوده شده است. این پیوست، شامل چند مطلب اضافی برای افزایش دانسته‌های خواننده است. پس از پیوست، باز هم تعدادی مسألهٔ حل شده و به دنبال آنها، تعدادی تمرین (یا مسألهٔ حل نشده) آورده شده است.

مطالب ارائه شده (اعم از تعریف، قضیه، تذکر و ...) با دو عدد شماره‌گذاری شده‌اند. عدد طرف راست، شمارهٔ فصل را مشخص می‌کند و عدد بعد، توالی مطالب ارائه شده در آن فصل را نشان می‌دهد.

کتاب‌هایی (به زبان انگلیسی، فرانسوی یا فارسی) که برای تنظیم کتاب حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند در پایان کتاب، زیر عنوان «کتابنامه» فهرست شده‌اند. به خواننده اکیداً توصیه می‌شود که مراجعه به منابع گوناگون را از مهمترین وظایف علمی خود تلقی کند و هرگز دایرهٔ مطالعات خود را به «جزوه‌های سحرآمیز» محدود نسازد.

بی‌تردید یکی از دشواری‌های اساسی در فراگیری ریاضیات، عدم توجه به ماهیت استنتاجی آن است. اغلب دانشجویان نمی‌دانند که در یک شاخهٔ معین ریاضی، کدام مبحث بر دیگری تقدم (منطقی) دارد و فرایند استنتاج دومی از یکمی چگونه انجام می‌پذیرد. یکی از دغدغه‌های نگارنده (در آموزش ریاضیات) همواره این بوده است که توالی منطقی (و نه الزاماً تاریخی) گزاره‌های ریاضی اکیداً مراعات شود. کتاب حاضر نیز با این بینش تنظیم شده است و به همین سبب یکی از واژه‌هایی که فراوان به کار رفته است، واژهٔ «چرا؟» است.

در پایان بر خود واجب می‌دانم به خاطر تشویق‌های گرم و صمیمانهٔ مدیریت انتشارات پوران پژوهش، آقای دکتر احمد هژبر و سرکار خانم افسانه عبدی، برای تألیف این کتاب، کمال امتنان و سپاسگزاری خود را ابراز دارم. همچنین، زحمات مدیر محترم تولید، آقای حسین رحیمی، و نیز تایپیست محترم، سرکار خانم طاهره خسروی که با دقتی وصف‌ناپذیر آماده‌سازی کتاب را بر عهده داشتند، جای تقدیر ویژه دارد.

محمدعلی رضوانی
زمستان ۱۴۰۰

پی‌نوشت. مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای (از سال ۱۳۷۴ به بعد) و « حل تشریحی » این پرسش‌ها در کتابی مستقل در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است.

دستگاه عددهای حقیقی و مختلط | فصل ۱

سرآغاز سخن

بدون معرفی دقیق دستگاه عددهای حقیقی، هیچ بحث جدی در آنالیز امکان‌پذیر نیست. قطع نظر از جزئیات، دستگاه عددهای حقیقی عبارت است از مجموعه‌ای از « اشیا » مجهز به دو عمل دوتایی و یک رابطهٔ ترتیبی تام که مقیدند از تعدادی متناهی اصل موضوع پیروی کنند.

اگر کار را از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها (یا از اصول موضوع عددهای طبیعی به اضافهٔ بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها که امکان ساختن « برش‌های ددکیند »[۱] یا « دنباله‌های بنیادی کانتور »[۲] را بدهند) آغاز کنیم، می‌توانیم اصول موضوع حاکم بر دستگاه عددهای حقیقی را به عنوان قضیه از آنها استنتاج کنیم. گرچه این فرایند از دیدگاه منطقی بسیار اهمیت دارد و از نظر تاریخی سهم فراوانی در روشن کردن مفهوم کلاسیک (و تا حدی مبهم) « متصله »[۳] داشته است، ولی در آنالیز چندان « به درد نمی‌خورد. »

ما در اینجا خود عددهای حقیقی را **حدود اولیه** (یا اشیای **تعریف نشده**) می‌گیریم که بر آنها دو عمل دوتایی + و . و یک رابطهٔ ترتیبی $\leq$ تعریف شده‌اند و در تعدادی متناهی اصل موضوع صدق می‌کنند. جزئیات در پی می‌آیند.

---

1 - R. Dedekind

2 - G. Cantor

3 - continuum

مجموعه‌های تماماً مرتب

۱.۱ تعریف. مجموعهٔ ناتهی S داده شده است. می‌گوییم رابطهٔ $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ [۱] یک **رابطهٔ ترتیبی (جزئی)** بر S است هرگاه

(یک) به ازای هر $x \in S$، $(x\ ,\ x) \in \mathcal{R}$.

(دو) اگر $(x\,,y) \in \mathcal{R}$ و $(y\,,x) \in \mathcal{R}$، آنگاه $x = y$.

(سه) اگر $(x\,,y) \in \mathcal{R}$ و $(y\,,z) \in \mathcal{R}$، آنگاه $(x\,,z) \in \mathcal{R}$.

در این وضع می‌گوییم $(S\ ,\ \mathcal{R})$ (یا به اختصار، S) یک **مجموعهٔ (جزئاً) مرتب** است.

اگر $\mathcal{R}$ در اصل موضوع زیر نیز صدق کند، آن را یک **رابطهٔ ترتیبی تام** (یا **خطی**) بر S و $(S\ ,\ \mathcal{R})$ (یا به اختصار، S) را یک **مجموعهٔ تماماً مرتب** می‌نامیم.

(چهار) به ازای هر دو عنصر دلخواه $x,y \in S$ داریم $(x\,,y) \in \mathcal{R}$ یا $(y\,,x) \in \mathcal{R}$.

به سخن دیگر، در این وضع هر دو عنصر دلخواه x و y **مقایسه شدنی**‌اند.

۲.۱ تعویض نمادگذاری. اگر $\mathcal{R}$ رابطه‌ای ترتیبی بر مجموعهٔ S باشد، به جای $(x\,,y) \in \mathcal{R}$ معمولاً می‌نویسیم $x \leq y$ و می‌گوییم «x کوچکتر است از یا برابر است با y» (یا «x نابیشتر از y است»). با این نمادگذاری، اصول موضوع چهارگانهٔ قبل به صورت زیر در می‌آیند:

(یک) به ازای هر $x \in S$، $x \leq x$.

(دو) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$.

(سه) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$.

(چهار) به ازای هر دو عنصر دلخواه $x,y \in S$، داریم $x \leq y$ یا $y \leq x$.

فرض کنیم $(S\ ,\leq)$ مجموعه‌ای مرتب باشد و $x,y \in S$. اگر $x \leq y$ و $x \neq y$، می‌نویسیم $x < y$ و می‌گوییم «x کوچکتر است از y». نماد $y \geq x$ به معنی $x \leq y$ و نماد $y > x$ به معنی $x < y$ است.

۳.۱ قضیه. فرض کنیم $(S\,,\leq)$ مجموعه‌ای تماماً مرتب باشد. در این صورت به ازای هر دو عنصر $x,y \in S$ یک و تنها یکی از گزاره‌های زیر درست است:

$$x < y \qquad , \qquad x = y \qquad , \qquad y < x$$

این را **اصل سه گانگی** (یا **ویژگی سه گانگی**) رابطهٔ ترتیبی تام $\leq$ می‌نامیم.

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد. ■

۱- اگر A و B دو مجموعه باشند، نماد $A \subseteq B$ به این معنی است که A یک زیرمجموعهٔ B است (خواه یک زیرمجموعهٔ سره باشد خواه ناسره).

۴.۱ مثال. فرض کنیم X یک مجموعه و $S = \mathcal{P}(X)$ مجموعهٔ توانی X (یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X) باشد. به ازای هر دو عنصر $A, B \in S$ می‌نویسیم $A \leq B$ هرگاه $A \subseteq B$. در این صورت S مجموعه‌ای مرتب است. از این گذشته، S تماماً مرتب است اگر و تنها اگر X حداکثر یک عنصر داشته باشد (چرا؟)

۵.۱ تعریف. مجموعهٔ مرتب S و زیرمجموعهٔ ناتهی E داده شده‌اند. اگر عنصر $\beta \in S$ به گونه‌ای باشد که به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $x \leq \beta$، β را یک **کران بالای** E و E را **از بالا کراندار** می‌نامیم.

تعریف مشابهی برای **کران پایین** و **از پایین کراندار** داریم.

می‌گوییم مجموعهٔ E **کراندار** است هرگاه E هم از پایین کراندار باشد هم از بالا. اگر E شامل یکی از کران‌های بالای خود باشد آن را **بزرگترین عنصر** E یا **عضو پایانی** E یا **ماکسیموم** E می‌نامیم و با $\max E$ نشان می‌دهیم. تعریف مشابهی برای **کوچکترین عنصر** E یا **عضو آغازین** E یا مینیموم E($\min\ E$) داریم.

۶.۱ تعریف. مجموعهٔ مرتب S و زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار E داده شده‌اند. اگر مجموعهٔ کران‌های بالای E کوچکترین عنصر داشته باشد، آن را **کوچکترین کران بالای** E یا **سوپرموم**[۱] E می‌نامیم و با $\sup E$ (یا $\text{l.u.b.}E$ [۲]) نشان می‌دهیم.

تعریف مشابهی برای **بزرگترین کران پایین** یا **اینفیموم**[۳] E ($\inf E$ یا $\text{g.l.b.}E$ [۴]) داریم.

۷.۱ مثال. در مثال ۴.۱ اگر $E \subseteq S$ و $E \neq \phi$، آنگاه

$$\inf E = \bigcap_{A \in E} A \quad , \quad \sup E = \bigcup_{A \in E} A$$

۸.۱ تعریف. مجموعهٔ مرتب S داده شده است. می‌گوییم S دارای **ویژگی کوچکترین کران بالا** (یا دارای **ویژگی سوپرموم**) است هرگاه

(*) « هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار S در S سوپرموم داشته باشد. »

تعریف مشابهی برای ویژگی **بزرگترین کران پایین** (یا **ویژگی اینفیموم**) داریم.

اصل موضوع (*) را **اصل موضوع کمال** می‌نامیم.

• برای مثال، اگر X مجموعه‌ای با بیش از یک عضو باشد و $S = \mathcal{P}(X)$، آنگاه S مجهز به $\subseteq$ دارای ویژگی $\sup$ است ولی تماماً مرتب نیست.

---

1 - supremum
2 - least upper bound
3 - infimum
4 - greatest lower bound

۹.۱ قضیه. مجموعهٔ مرتب S دارای ویژگی sup است اگر و تنها اگر دارای ویژگی inf باشد.

اثبات. گزارهٔ « تنها اگر » را ثابت می‌کنیم و گزارهٔ « اگر » را به خواننده واگذار می‌کنیم. فرض کنیم زیرمجموعهٔ $\phi \neq F \subseteq S$ از پایین کراندار باشد. ثابت می‌کنیم که $\inf\ F$ در S وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ کران‌های پایین F در S را با L نشان می‌دهیم. L یک زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار S است (زیرا F دست کم یک کران پایین دارد و هر عنصر F یک کران بالای L است). بنابر فرض، $\alpha = \sup L$ وجود دارد. یک استدلال ساده نشان می‌دهد که $\alpha = \inf F$. ■

۱۰.۱. مجموعهٔ مرتب $(S\,,\leq)$ و زیرمجموعهٔ ناتهی $T \subseteq S$ داده شده‌اند. هنگامی‌که از « مجموعهٔ مرتب » T صحبت می‌کنیم مقصودمان T مجهز به تحدید $\leq$ به T است (مگر اینکه خلاف این گفته آشکارا بیان شود).

۱۱.۱ تعریف. می‌گوییم مجموعهٔ مرتب $(S\,,\leq)$ مجموعه‌ای **خوش - ترتیب** است هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی S کوچکترین عنصر (یا عضو آغازین) داشته باشد. در این وضع می‌گوییم رابطهٔ $\leq$ یک **رابطهٔ خوش - ترتیبی** است.

هر مجموعهٔ خوش - ترتیب، مجموعه‌ای تماماً مرتب است. در حقیقت، اگر x و y دو عنصر دلخواه S باشند، آنگاه مجموعهٔ $\{x\ ,\ y\}$ عضو آغازین دارد.

هر مجموعهٔ خوش - ترتیب، دارای ویژگی کوچکترین sup است (چرا؟).

هیأت

۱۲.۱ تعریف. فرض کنیم K مجموعه‌ای ناتهی و مجهز به دو عمل دوتایی $+$ (به نام **جمع**) و $\cdot$ (به نام **ضرب**) باشد. می‌گوییم K یک **هیأت** (یا **میدان**) است هرگاه $+$ و $\cdot$ در اصول موضوع زیر صدق کنند.

اصول موضوع جمع

(ج ۱) به ازای هر $x,y \in K$، $x + y = y + x$.

(ج ۲) به ازای هر $x\,,y\,,z \in K$، $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(ج ۳) عنصری به نام صفر، ۰، در K هست به طوری که به ازای هر $x \in K$، $x + \circ = x$.

(ج ۴) به ازای هر $x \in K$ عنصری به نام **قرینهٔ** x (یا **وارون جمعی** x) وجود دارد که آن را با $-x$ نشان می‌دهیم و به گونه‌ای است که $x + (-x) = \circ$.

اصول موضوع ضرب

(ض ۱) به ازای هر $x, y \in K$، $xy = yx$.[1]

(ض ۲) به ازای هر $x, y, z \in K$، $(x\ y)z = x(yz)$.

(ض ۳) عنصری به نام **یک**، ۱، در K هست به طوری که $\circ \neq ۱$ و به ازای هر $x \in K$، $x \cdot ۱ = x$.

(ض ۴) به ازای هر $x \in K \setminus \{\circ\}$ عنصری به نام **عکس** x (یا **وارون ضربی** x) وجود دارد که آن را با $x^{-۱}$ نشان می‌دهیم و به گونه‌ای است که $x \cdot x^{-۱} = ۱$.

اصل موضوع (ض ۴) می‌گوید تنها عنصرهای ناصفرِ K وارون ضربی دارند.

اصل موضوع پخش‌پذیری

(پ) به ازای هر $x, y, z \in K$، $x(y+z) = xy + xz$.

۱۳.۱ تذکر. ۱. (ج ۱) و (ض ۱) را ویژگی‌های **تعویض‌پذیری** و (ج ۲) و (ض ۲) را ویژگی‌های **شرکت‌پذیری** جمع و ضرب می‌نامیم.

۲. در هر هیأت به جای $x + (-y)$، $xy^{-۱}$ (به شرط $y \neq \circ$)، $(x+y)+z$ و $(x\,y)z$ به ترتیب نمادهای $x - y$، x/y، $x+y+z$ و xyz را به کار می‌بریم. عنصر $x - y$ را **تفاضل** x و y و عنصر x/y را **نسبت** (یا **خارج قسمت**) x و y می‌نامیم.

- پس به ازای هر $y \neq \circ$ داریم $۱/y = y^{-۱}$.

۳. هر هیأت دست کم دو عضو دارد: $\circ$ و ۱.

۴. اصول موضوع جمع می‌گویند $(K, +)$ یک **گروه آبلی** است و اصول موضوع ضرب می‌گویند $(K \setminus \{\circ\}, .)$ یک گروه آبلی است.

۱۴.۱ مثال. فرض کنیم $K = \{a, b\}$ یک مجموعهٔ دلخواه دو عضوی (یعنی $a \neq b$) باشد. با استفاده از جدول‌های زیر، دو عمل جمع و ضرب در K تعریف می‌کنیم:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$.$	a	b
a	a	a
b	a	b

به آسانی دیده می‌شود که $(K, +, .)$ یک هیأت است که در آن، a و b به ترتیب صفر و یک هستند.

---

۱ - به جای $x \cdot y$ اغلب می‌نویسیم xy.

۱۵.۱ قضیه. از اصول موضوع جمع، ویژگی‌های زیر نتیجه می‌شوند.

(الف) اگر $x+y=x+z$**، آنگاه** $y=z$. **(قانون حذف برای جمع)**

(ب) اگر $x+y=x$**، آنگاه** $y=\circ$. **(یکتایی صفر)**

(پ) اگر $x+y=\circ$**، آنگاه** $y=-x$. **(یکتایی قرینه)**

(ت) به ازای هر x داریم $-(-x)=x$.

اثبات. تنها (الف) را ثابت می‌کنیم (زیرا گزاره‌های دیگر از (الف) نتیجه می‌شوند). با توجه به اصول موضوع جمع و با استفاده از فرض می‌بینیم که

$$\begin{aligned} y &= \circ+y=(-x+x)+y=-x+(x+y) \\ &= -x+(x+z)=(-x+x)+z=\circ+z=z\,. \blacksquare \end{aligned}$$

۱۶.۱ قضیه. از اصول موضوع ضرب، ویژگی‌های زیر نتیجه می‌شوند.

(الف) اگر $x\neq\circ$ **و** $xy=xz$**، آنگاه** $y=z$. **(قانون حذف برای ضرب)**

(ب) اگر $x\neq\circ$ **و** $xy=x$**، آنگاه** $y=۱$. **(یکتاییِ یک)**

(پ) اگر $x\neq\circ$ **و** $xy=۱$**، آنگاه** $y=x^{-۱}$. **(یکتایی وارون)**

(ت) به ازای هر $x\neq\circ$**، داریم** $(x^{-۱})^{-۱}=x$.

اثبات. تنها (الف) را ثابت می‌کنیم (زیرا گزاره‌های دیگر از (الف) نتیجه می‌شوند). مانند قضیهٔ قبل می‌بینیم که

$$y=۱\cdot y=(x^{-۱}x)y=x^{-۱}(xy)=x^{-۱}(xz)=(x^{-۱}x)z=۱\cdot z=z\,. \blacksquare$$

۱۷.۱ قضیه. از اصول موضوع هیأت، ویژگی‌های زیر نتیجه می‌شوند.

(الف) $\circ\cdot x=\circ$.

(ب) اگر $x\neq\circ$ **و** $y\neq\circ$**، آنگاه** $xy\neq\circ$ **(به سخن دیگر، اگر** $xy=\circ$ **باید دست کم یکی از دو عنصر x و y صفر باشد).**

(پ) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.

(ت) $(-x)(-y)=xy$.

اثبات. تنها (ب) را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم اتفاقاً $xy=\circ$. در این صورت با توجه به (الف) داریم

$$۱=۱\cdot۱=(xx^{-۱})(yy^{-۱})=(xy)(x^{-۱}y^{-۱})=\circ\cdot(x^{-۱}y^{-۱})=\circ$$

و این با اصل موضوع (ض ۳) تناقض دارد. ■

هیأت مرتب

۱۸.۱ تعریف. فرض کنیم $\le$ رابطهٔ ترتیبی تامی بر هیأت $(K\ ,\ +\ ,\ \cdot)$ باشد. می‌گوییم $(K\ ,\ +\ ,\ \cdot\ ,\ \le)$ یک **هیأت مرتب** است هرگاه رابطهٔ $\le$ در دو اصل موضوع زیر صدق کند.

(یک) اگر $y < z$، آنگاه به ازای هر $x \in K$، $x + y < x + z$.

(دو) اگر $x > 0$ و $y > 0$، آنگاه $xy > 0$.

به آسانی دیده می‌شود که $x > 0$ اگر و تنها اگر $-x < 0$. همچنین $y > z$ اگر و تنها اگر $y - z > 0$.

۱۹.۱ تعریف و نمادگذاری. فرض کنیم K یک هیأت مرتب باشد و $x \in K$. بنابر ویژگی سه‌گانگی، یک و تنها یکی از گزاره‌های زیر درست است:

$$x < 0 \qquad , \qquad x = 0 \qquad , \qquad x > 0$$

اگر $x > 0$، x را **مثبت** و اگر $x < 0$، x را **منفی** می‌نامیم. می‌گوییم x **نامنفی** است هرگاه $x \ge 0$ و می‌گوییم x **نامثبت** است هرگاه $x \le 0$. مجموعهٔ عنصرهای مثبت را با K_+ و مجموعهٔ عنصرهای منفی را با K_- نشان می‌دهیم.

می‌گوییم x و y **هم‌علامت‌**اند هرگاه $xy > 0$ و می‌گوییم **مختلف ـ علامت‌**اند هرگاه $xy < 0$.

۲۰.۱ مثال. هیأت مرتب K و عنصرهای $a, b, x \in K$ داده شده‌اند. اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le x < \varepsilon$، آنگاه $x = 0$. همین‌طور، اگر به ازای هر $c > b$ رابطهٔ $c > a$ برقرار باشد، آنگاه $a \le b$.

در حقیقت، اگر $x \neq 0$، آنگاه $x > 0$. در این صورت به ازای $\varepsilon = x$ از فرض نتیجه می‌شود که $x < x$ و این هم تناقض است. برای گزارهٔ دوم، می‌بینیم که اگر اتفاقاً $a > b$، آنگاه با فرض $c = a$ به تناقض $a > a$ می‌رسیم. پس باید $a \le b$.

۲۱.۱ قضیه. در هر هیأت مرتب گزاره‌های زیر درست‌اند.

(الف) اگر $x > 0$ **و** $y < z$**، آنگاه** $xy < xz$**. اگر** $x < 0$**، آنگاه** $x\ y > x\ z$.

(ب) اگر $x \neq 0$ **آنگاه** $xx > 0$**. در حالت خاص** $1 > 0$.

(پ) اگر $x \neq 0$**، آنگاه** x **و** x^{-1} **هم‌علامت‌اند.**

(ت) اگر $0 < x < y$**، آنگاه** $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$**. اگر** $x < y < 0$**، آنگاه** $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$**. اگر** $x < 0 < y$**، آنگاه** $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$.

اثبات. برای نمونه تنها (ب) را ثابت می‌کنیم. چون $x \neq ۰$، پس $x > ۰$ یا $x < ۰$. بنابراین،

$$x > ۰ \Rightarrow x > ۰ \,,\ x > ۰ \Rightarrow xx > ۰ \,,$$

$$x < ۰ \Rightarrow -x > ۰ \Rightarrow (-x)(-x) > ۰ \Rightarrow xx > ۰$$

در حالت خاص، چون $۰ \neq ۱$، پس $۱ = ۱ \cdot ۱ > ۰$. ■

۲۲.۱ تذکر. با توجه به «$۰ < ۱$» می‌بینیم که یک هیأت مرتب نه از بالا کراندار است و نه از پایین (چرا؟). بنابراین، از هیأت دو عضوی (و به طور کلی از هیأت‌های متناهی) هرگز نمی‌توان هیأت مرتب ساخت (چرا؟).

اگر x و y، $x < y$، دو عضو یک هیأت مرتب باشند عضوی مانند z وجود دارد به طوری که $x < z < y$. در حقیقت با فرض $\alpha = ۱ + ۱$ می‌بینیم که $\alpha > ۰$ و $x < \dfrac{x+y}{\alpha} < y$ (چرا؟).

قدرمطلق

۲۳.۱ تعریف. فرض کنیم K هیأتی مرتب باشد. به ازای هر $x \in K$ **قدرمطلق** x بنابر تعریف عبارت است از $\max\{x, -x\}$ که آن را با $|\, x \,|$ نشان می‌دهیم. پس

$$|\, x \,| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

روشن است که $|\, x \,| = |\, -x \,|$

۲۴.۱ قضیه. فرض کنیم K هیأتی مرتب باشد و $x, y, \alpha \in K$. در این صورت

(الف) $|\, x \,| \geq ۰$ و

$$|\, x \,| = ۰ \Leftrightarrow x = ۰$$

(ب) $-|\, x \,| \leq x \leq |\, x \,|$.

(پ) $|\, x\ y \,| = |\, x \,| \cdot |\, y \,|$.

(ت) $|\, x \,|^۲ = x^۲$.

(ث) $|\, x + y \,| \leq |\, x \,| + |\, y \,|$. **(نابرابری مثلثی)**

(ج) $\big|\, |\, x \,| - |\, y \,| \,\big| \leq |\, x - y \,|$.

(چ) اگر $\alpha \geq ۰$، **آنگاه**

$$|\, x \,| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

(ح) اگر $\alpha \geq ۰$، **آنگاه**

$$|\, x \,| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha \ \textbf{یا}\ x \leq -\alpha$$

اثبات. اثبات آسان این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۲۵.۱ تذکر. در گزاره‌های (ث) و (ج) در قضیهٔ بالا، $\leq$ بـه $=$ تبـدیل مـی‌شـود اگـر و تنهـا اگـر $xy \geq 0$ (چرا؟).

هیأت عددهای حقیقی

۲۶.۱ تعریف. دو هیأت مرتب K_1 و K_2 داده شده‌اند. تابع $f: K_1 \to K_2$ را یک **یکریختی هیأت مرتب** می‌نامیم هرگاه در شرط‌های زیر صدق کند.

(الف) f دو سویی است.

(ب) به ازای هر $x , y \in K_1$ داریم

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \quad f(x\ y) = f(x)f(y)$$

(پ) به ازای هر $x, y \in K_1$، اگر $x < y$، آنگاه $f(x) < f(y)$.

به آسانی دیده می‌شود که $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$. از این گذشـته، تـابع $f^{-1} : K_2 \to K_1$ نیز یک یکریختی هیأت مرتب است.

هنگامی که می‌گوییم هیـأت‌هـای مرتـب K_1 و K_2 **یکریخـت**انـد مقصـود ایـن اسـت کـه یکریختی‌ای مانند $f: K_1 \to K_2$ وجود دارد.

فرض کنیم K_1 و K_2 دو هیأت مرتب یکریخت باشند. به آسانی می‌توان ثابت کرد کـه K_1 دارای ویژگی $\sup$ است اگر و تنها اگر K_2 دارای این ویژگی باشد.

اگـر f یکریختـی‌ای بـین دو هیـأت مرتـب K_1 و K_2 باشـد، آنگـاه بـه ازای هـر $x \in K_1$، عنصرهای x و $f(x)$ را یکی می‌گیریم، یعنی می‌نویسیم $x = f(x)$. بنابراین، $K_1 = K_2$.

۲۷.۱ اصل موضوع وجود دستگاه عددهای حقیقی. دست کم یک هیـأت مرتـب وجـود دارد کـه دارای ویژگی $\sup$ است.

۲۸.۱ قضیه. اگر K_1 و K_2 دو هیأت مرتب با ویژگی sup باشند، آنگاه K_1 و K_2 یکریخت‌اند.

این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

۲۹.۱ تعریف و نمادگذاری. تنها هیأت مرتبی را که دارای ویژگی $\sup$ است (و وجـودش در اصـل موضوع ۲۷.۱ تضمین شده است) **هیأت عددهای حقیقی** می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهـیم. هر $x \in \mathbb{R}$ یک **عدد حقیقی** نام دارد.

۳۰.۱ قضیه. فرض می‌کنیم $\varnothing \neq E \subseteq \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. در این صورت $\alpha = \sup E$ اگر و تنها اگر

(الف) α یک کران بالای E باشد و

(ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$، عنصری مانند $x \in E$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha - \varepsilon < x$.

قضیهٔ مشابهی هم برای $\inf$ داریم.

اثبات. در حقیقت شرط‌های (الف) و (ب) می‌گویند α یک کران بالای E است و هیچ عدد کوچکتر از α نمی‌تواند یک کران بالای E باشد. یعنی α کوچکترین کران بالای E است. ■

۳۱.۱ قضیه. **فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}$ باشند که از بالا کراندارند.**

(الف) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.[1]

(ب) $-A$ **از پایین کراندار است و** $\inf(-A)=-\sup A$.

(پ) اگر A و B تنها از عددهای نامنفی ساخته شده باشند، آنگاه

$$\sup(AB)=(\sup A)(\sup B)$$

قضیهٔ مشابهی هم برای inf داریم.

اثبات. **(الف)** فرض کنیم $\sup A=\alpha$ و $\sup B=\beta$. عدد $\alpha+\beta$ آشکارا یک کران بالای $A+B$ است. اکنون فرض کنیم γ یک کران بالای دلخواه $A+B$ باشد. به ازای هر $x\in A$ و هر $y\in B$ داریم $x+y\le\gamma$ و از این‌رو، $x\le\gamma-y$. اگر y را «لحظه‌ای» ثابت نگه‌داریم از نابرابری اخیر نتیجه می‌شود که $\sup A\le\gamma-y$ یا $\alpha\le\gamma-y$. پس $y\le\gamma-\alpha$. چون این نابرابری به ازای هر $y\in B$ درست است، بنابراین، $\beta\le\gamma-\alpha$ یا $\alpha+\beta\le\gamma$. به این ترتیب $\alpha+\beta$ کوچکترین کران بالای $A+B$ است.

(ب) کافی است تعریف‌های sup و inf را به کار ببریم.

(پ) عدد $\alpha\beta$ آشکارا یک کران بالای AB است. همواره می‌توان فرض کرد که A و B تنها از عددهای مثبت ساخته شده‌اند. اکنون فرض کنیم γ یک کران بالای دلخواه AB باشد. به ازای هر $x\in A$ و هر $y\in B$ داریم $xy\le\gamma$ و از این‌رو، $x\le\frac{\gamma}{y}$. اگر y را « لحظه‌ای » ثابت نگه‌داریم از نابرابری اخیر نتیجه می‌شود که $\sup A\le\frac{\gamma}{y}$ یا $\alpha\le\frac{\gamma}{y}$. پس $y\le\frac{\gamma}{\alpha}$. چون این نابرابری به ازای هر $y\in B$ درست است، بنابراین، $\beta\le\frac{\gamma}{\alpha}$ یا $\alpha\beta\le\gamma$. به این ترتیب $\alpha\beta$ کوچکترین کران بالای AB است. ■

۳۲.۱ قضیه. **فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}$ باشند و** $A\subseteq B$.

(الف) اگر B از بالا کراندار باشد، آنگاه $\sup A\le\sup B$.

(ب) اگر B از پایین کراندار باشد، آنگاه $\inf B\le\inf A$.

اثبات. کافی است تعریف‌های sup و inf را به کار ببریم. ■

۱- اگر A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}$ باشند و $\lambda\in\mathbb{R}$، بنابر تعریف می‌نویسیم

$A+B=\{x+y:x\in A,y\in B\}$, $AB=\{x\,y:x\in A,y\in B\}$

$\lambda A=\{\lambda x:x\in A\}$, $-A=(-1)A$, $A-B=A+(-B)$

سه زیرمجموعهٔ مهم $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$

۳۳.۱ تعریف. زیرمجموعهٔ $S \subseteq \mathbb{R}$ را مجموعه‌ای **استقرایی** می‌نامیم هرگاه $1 \in S$ و اگر $x \in S$، آنگاه $x + 1 \in S$.

برای مثال، $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}_+$ و $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ مجموعه‌هایی استقرایی هستند. اشتراک (و اجتماع) هر خانوادهٔ ناتهی از مجموعه‌های استقرایی، مجموعه‌ای استقرایی است.

۳۴.۱ تعریف. اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های استقرایی $\mathbb{R}$ را **مجموعهٔ عددهای طبیعی** می‌نامیم و آن را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. هر $x \in \mathbb{N}$ یک **عدد طبیعی** نام دارد.

به این ترتیب $\mathbb{N}$ کوچکترین[1] زیرمجموعهٔ استقرایی $\mathbb{R}$ است.

۳۵.۱ قضیه. (الف) عدد ۱ کوچکترین عدد طبیعی است.

(ب) اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq 1$، آنگاه $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$.

اثبات. برای اثبات (الف) کافی است توجه کنیم که مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ استقرایی است. برای اثبات (ب) می‌بینیم که از $n > 1$ نتیجه می‌شود $\frac{1}{n} < 1$. ■

۳۶.۱ نمادگذاری. قرار می‌دهیم $2 = 1 + 1$، $3 = 2 + 1$، $4 = 3 + 1$، … . روشن است که این عددها همگی طبیعی‌اند (زیرا $\mathbb{N}$ استقرایی است).

اکنون فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ عدد دلخواهی باشد. بنابر تعریف، $x^1 = x$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x^{n+1} = x^n x$. بنابر قرارداد می‌نویسیم $x^0 = 1$.

۳۷.۱ قضیه (اصل استقرای ریاضی یا اصل استقرای متناهی). اگر S یک زیرمجموعهٔ استقرایی $\mathbb{N}$ باشد، آنگاه $S = \mathbb{N}$.

اثبات. از یک سو داریم $S \subseteq \mathbb{N}$ و از سوی دیگر، $\mathbb{N} \subseteq S$ (زیرا $\mathbb{N}$ کوچکترین زیرمجموعهٔ استقرایی $\mathbb{R}$ است). ■

۳۸.۱ تذکر. اکنون با استفاده از این اصل می‌توان بسیاری از ویژگی‌های $\mathbb{N}$ را ثابت کرد: اگر $n \in \mathbb{N}$، هیچ عدد طبیعی بین n و $n + 1$ وجود ندارد، $\mathbb{N}$ نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته است و … .

- خوش – ترتیبی یکی از مهمترین ویژگی‌های $\mathbb{N}$ است که در قضیهٔ بعد ثابت می‌شود.

۳۹.۱ قضیه. مجموعهٔ $\mathbb{N}$ خوش – ترتیب است.

اثبات. فرض کنیم زیرمجموعهٔ ناتهی $E \subseteq \mathbb{N}$ عضو آغازین نداشته باشد. قرار می‌دهیم

$$S = \{n \in \mathbb{N} : \forall x \in E \ , \ n < x\}$$

۱- کوچکترین نسبت به رابطهٔ شمول $\subseteq$.

روش است که $S \subseteq \mathbb{N}$ و $1 \in S$. فرض کنیم $k \in S$. اگر $k+1 \notin S$، آنگاه عنصری مانند $b \in E$ وجود دارد به طوری که $b \leq k+1$. همچنین، عنصری مانند $c \in E$ هست به طوری که $c < b$ (چرا؟). چون $k \in S$، نتیجه می‌گیریم که $k < c$ و از این‌رو، عدد طبیعی c به گونه‌ای است که $k < c < k+1$. این تناقض نشان می‌دهد که $k+1 \in S$. پس S استقرایی است و بنابراین، $S = \mathbb{N}$. به این ترتیب به ازای هر $x \in E$ به تناقض $x < x$ می‌رسیم. پس E باید عضو آغازین داشته باشد. ■

۴۰.۱ فرع. فرض کنیم زیرمجموعهٔ ناتهی $A \subseteq \mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$ از بالا کراندار باشد. در این صورت A عضو پایانی دارد.

اثبات. همواره می‌توان فرض کرد A بیش از یک عضو دارد. قرار می‌دهیم

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \forall x \in A \ , \ x < n\}$$

اگر m عضو آغازین E باشد، آنگاه $m - 1$ عضو پایانی A است. ■

۴۱.۱ قضیه. $\mathbb{N}$ از بالا کراندار نیست.

اثبات. فرض کنیم برعکس، $\mathbb{N}$ از بالا کراندار باشد و قرار می‌دهیم $\alpha = \sup \mathbb{N}$. در این صورت عددی طبیعی مانند n هست به طوری که $\alpha - 1 < n$ و از این‌رو، $\alpha < n + 1$ و این هم تناقض است. ■

۴۲.۱ فرع ۱ (ویژگی ارشمیدسی $\mathbb{R}$). فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند و $x > 0$. در این صورت عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $y < n\,x$.

اثبات. کافی است توجه کنیم که $\dfrac{y}{x}$ نمی‌تواند یک کران بالا برای $\mathbb{N}$ باشد. ■

۴۳.۱ فرع ۲. به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$.

اثبات. کافی است در فرع ۱ انتخاب کنیم $x = \varepsilon$ و $y = 1$. ■

۴۴.۱ تعریف. مجموعهٔ عددهای صحیح را برابر با $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ تعریف می‌کنیم و آن را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم. هر عضو $\mathbb{Z}$ را یک **عدد صحیح** می‌نامیم.

آشکارا داریم $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$[1]. با استفاده از ویژگی‌های $\mathbb{N}$ و تعریف $\mathbb{Z}$ می‌بینیم که $\mathbb{Z}$ نه از بالا کراندار است نه از پایین. اگر $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, 1\}$، آنگاه $\frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$. اگر $n \in \mathbb{Z}$، آنگاه هیچ عدد صحیحی بین n و $n+1$ وجود ندارد. اگر $A \subseteq \mathbb{Z}$ ناتهی و از پایین (یا از بالا) کراندار باشد، آنگاه

۱- نماد $A \subset B$ یعنی A یک **زیرمجموعهٔ سرهٔ** B است.

A عضو آغازین (یا عضو پایانی) دارد. $(\mathbb{Z},+)$ یک گروه آبلی است. $\mathbb{Z}$ نسبت به عمل ضرب بسته است[۱].

۴۵.۱ نمادگذاری. اگر n یک عدد صحیح منفی باشد و $x \in \mathbb{R} \setminus \{۰\}$، آنگاه x^n را برابر با $(x^{-۱})^{-n}$ تعریف می‌کنیم (شمارهٔ ۳۶.۱ را نیز ببینید).

۴۶.۱ قضیه. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ و $x \notin \mathbb{Z}$. در این صورت عدد صحیح یکتایی مانند n وجود دارد به طوری که $n < x < n+۱$.

اثبات. مجموعهٔ $S = \{m \in \mathbb{Z} : m < x\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت S یک زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{Z}$ است که از بالا کراندار است. عضو پایانی S را n می‌نامیم. با توجه به ویژگی سه‌گانگی برای $\le$ می‌بینیم که $n < x < n+۱$.

اگر n' عدد صحیح دیگری باشد که $n' < x < n'+۱$، از تعریف S نتیجه می‌گیریم که $n' < n < n'+۱$ و این تناقض است. ■

۴۷.۱ فرع. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$. در این صورت عدد صحیح یکتایی مانند n وجود دارد به طوری‌که $n \le x < n+۱$.

۴۸.۱ تعریف. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، عدد صحیح یکتای n را که در نابرابری‌های $n \le x < n+۱$ صدق می‌کند **جزء صحیح** x می‌نامیم و آن را با $\lfloor x \rfloor$ نشان می‌دهیم. عدد $x - \lfloor x \rfloor$ را **جزء کسری** x می‌نامیم و آن را با (x) نشان می‌دهیم. به این ترتیب به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم

$$۰ \le (x) < ۱ \quad , \quad x = \lfloor x \rfloor + (x)$$

۴۹.۱ مثال. (یک) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(دو) فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند و $x > ۰$. در این صورت

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \exists r \in \mathbb{R} \; : \; y = nx + r \quad , \quad ۰ \le r < x$$

و n و r یکتا هستند.[۲]

در حقیقت، کافی است $\lfloor y / x \rfloor$ را n و $y - nx$ را r بنامیم.

---

۱ - در حقیقت $(\mathbb{Z},+,.)$ یک **حلقهٔ تعویض‌پذیرِ یکدار** است.

۲ - این گزاره، مشابه الگوریتم تقسیم در $\mathbb{Z}$ است.

۵۰.۱ تعریف. مجموعهٔ عددهای گویا را برابر با $\{m/n : m\,, n\in\mathbb{Z}\ ,\ n\neq ۰\}$ تعریف مـی‌کنـیم و آن را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم. هر عضو $\mathbb{Q}$ را یک **عدد گویا** می‌نامیم.

به آسانی دیده می‌شود که $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}=\{m/n : m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$ و اینکـه $\mathbb{Q}$ نسـبت بـه دو عمل جمع و ضرب بسته است.

۵۱.۱ قضیه. مجموعهٔ $(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$ یک هیأت مرتب است.

اثبات (آسانِ) این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۵۲.۱ قضیه. بین هر دو عدد حقیقی متمایز دست کم یک عدد گویا وجود دارد.

اثبات. فرض کنـیم x و y دو عـدد حقیقـی متمـایز باشـند و $x<y$. بـا توجـه بـه ویژگـی ارشمیدسی $\mathbb{R}$ عددی طبیعی مانند n هست به طوری که $۱<n(y-x)$ یـا $۱+nx<ny$. قرار می‌دهـیم $m=\lfloor nx\rfloor$. بـه آسـانی دیـده مـی‌شـود کـه $nx<m+۱<ny$ و از ایـن‌رو، $x<\dfrac{m+۱}{n}<y$. ■

۵۳.۱. گاهی قضیهٔ بالا را به این صورت بیان می‌کنیم: $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ **چگال** است[۱].

۵۴.۱. در اینجا پرسشی بنیادی مطرح می‌شود: آیا $\mathbb{Q}$ یک زیرمجموعهٔ سرهٔ $\mathbb{R}$ است؟ بـه سـخن دیگر آیا عددهایی حقیقی وجود دارند که برابر با نسبت دو عدد صحیح نباشـند؟ بعـد از قضـیه و مثال زیر، پاسخ این پرسش آشکار می‌شود.

۵۵.۱ قضیه. هیچ عدد گویایی در معادلهٔ $x^۲=۲$ صدق نمی‌کند.[۲]

اثبات. فرض می‌کنیم برعکس، $\dfrac{m}{n}$ (که در آن $m\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$) یک جواب معادله باشد. همواره می‌توان فرض کرد که m و n نسبت به هـم اول‌انـد.[۳] اکنـون اگـر $\dfrac{m}{n}$ را بـه جـای x در $x^۲=۲$ قرار دهیم، یک استدلال ساده (بر پایهٔ مفهـوم بخـش‌پـذیری در $\mathbb{Z}$) مـا را بـه تنـاقض می‌کشاند. ■

۵۶.۱ مثـــال. دو مجموعـهٔ $A=\{x\in\mathbb{Q}_+ : x^۲<۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Q}_+ : x^۲>۲\}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

(الف) A و B ناتهی هستند.

(ب) A کراندار است و B تنها از پایین کراندار است.

---

۱ - به سخن ساده‌تر، «عددهای گویا در همه جای $\mathbb{R}$ حضور دارند.»

۲ - به سخن دیگر، معادلهٔ $x^۲=۲$ در مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ جواب ندارد.

۳ - از این پس هرجا لازم باشد از نظریهٔ مقدماتی اعداد برای « پیشبرد کارهایمان » یاری می‌گیریم.

(پ) A عضو ماکسیموم و B عضو مینیموم ندارد.

(ت) در $\mathbb{Q}$، $\sup A$ و $\inf B$ وجود ندارند.

در حقیقت،

(الف) روشن است که $۱ \in A$ و $۲ \in B$.

(ب) به ازای هر $x \in A$ داریم $۰ < x < ۲$ و به ازای هر $x \in B$ داریم $x > ۰$. از سوی دیگر، $\mathbb{N} \setminus \{۱\} \subseteq B$. پس B از بالا بیکران است.[1]

(پ) به ازای هر عدد گویای $x > ۰$ قرار می‌دهیم $y = x - \dfrac{x^۲ - ۲}{x + ۲}$. در این صورت y یک عدد گویای مثبت است. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $y^۲ - ۲ = \dfrac{۲(x^۲ - ۲)}{(x + ۲)^۲}$. اکنون می‌بینیم که

(یک) اگر $x \in A$، آنگاه $y \in A$ و $y > x$. پس A عضو ماکسیموم ندارد.

(دو) اگر $x \in B$، آنگاه $y \in B$ و $y < x$. پس B عضو مینیموم ندارد.

(ت) به آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ همهٔ کران‌های بالای A در $\mathbb{Q}$ برابر است با B. چون B عضو مینیموم ندارد پس A در $\mathbb{Q}$ سوپرموم ندارد. به همین ترتیب دیده می‌شود که B در $\mathbb{Q}$ اینفیموم ندارد.

۵۷.۱ قضیه. $\mathbb{Q}$ **یک زیرمجموعهٔ سرهٔ** $\mathbb{R}$ **است.**

اثبات. در بالا دیدیم که $\mathbb{Q}$ دارای ویژگی $\sup$ نیست. پس $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. ■

۵۸.۱ تعریف. عدد $x \in \mathbb{R}$ را **گنگ** می‌نامیم هرگاه $x \notin \mathbb{Q}$.

ریشهٔ nام عددهای حقیقی مثبت

۵۹.۱ قضیه. به ازای هر عدد حقیقی مثبت x و هر عدد طبیعی n، عدد حقیقی مثبتی مانند y وجود دارد به طوری که $y^n = x$ و این y مثبت، یکتاست.

اثبات. وجود به ازای $n = ۱$ کافی است y را برابر با x بگیریم. بنابراین، فرض کنیم $n \geq ۲$. مجموعهٔ

$$E = \{t \in \mathbb{R}_+ : t^n < x\}$$

را در نظر می‌گیریم. E ناتهی است، زیرا اگر قرار دهیم $u = \dfrac{x}{۱ + x}$، آنگاه $u^n < u < x$ و از این‌رو، $u \in E$. از سوی دیگر، E از بالا کراندار است. در حقیقت اگر قرار دهیم $v = ۱ + x$،

۱ - می‌گوییم مجموعهٔ ناتهی $C \subseteq \mathbb{R}$ از **بالا** (یا از **پایین**) **بیکران** است هرگاه C از بالا (یا از پایین) کراندار نباشد.

آنگاه $v^n > v > x$ و از این‌رو، v یک کران بالای E است. قرار می‌دهیم $y = \sup E$ و ثابت می‌کنیم که $y^n = x$.

(یک) فرض می‌کنیم $y^n < x$. نخست با استفاده از استقرای ریاضی به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $0 < a < b$، آنگاه به ازای هر $n \geq 2$ داریم

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$$

اکنون عدد حقیقی h را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 < h < 1$ و $h < \dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$. اگر در نابرابری بالا قرار دهیم $a = y$ و $b = y + h$، آنگاه $(y+h)^n < x$ و از این‌رو، $y + h \in E$. این هم‌تناقض است.

(دو) فرض کنیم $y^n > x$. عدد $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که $0 < k < y$. به ازای هر $s \geq y - k$، با توجه به نابرابری قبل می‌بینیم که

$$y^n - s^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x$$

و از این‌رو، $s^n > x$. بنابراین، $s \notin E$. به این ترتیب به ازای هر $t \in E$ داریم $t < y - k$ و این هم تناقض است.

یکتایی به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت متمایز y_1 و y_2 و هر عدد طبیعی n آشکارا داریم $y_1^n \neq y_2^n$. ■

۶۰.۱. *تعریف و نمادگذاری.* عدد حقیقی نامنفی x و عدد طبیعی n داده شده‌اند. عدد حقیقی نامنفی یکتای y در قضیهٔ قبل را **ریشهٔ** nام (نامنفی) x می‌نامیم و آن را با $\sqrt[n]{x}$ نشان می‌دهیم.[1]

برای مثال $\sqrt{2}$ تنها عدد حقیقی مثبتی است که در رابطهٔ $2 = (\sqrt{2})^2$ صدق می‌کند. همچنین، $\sqrt[n]{0} = 0$.

۶۱.۱ قضیه. فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی نامنفی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند. در این صورت

(الف) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ **(ب)** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ **(پ)** $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

۱ - دیدیم که $\sqrt[1]{x} = x$. اگر $n = 2$، به جای $\sqrt[2]{x}$ می‌نویسیم $\sqrt{x}$.

اثبات. تنها (الف) را ثابت می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ قبل و با فرض $\sqrt[n]{a} = \alpha$ و $\sqrt[n]{b} = \beta$، می‌بینیم که $\alpha \geq ٠$، و $\beta \geq ٠$ و

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n = ab \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \sqrt[n]{ab} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}. \ \blacksquare$$

۶۲.۱ مثال. فرض کنیم مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}_+$ ناتهی و از بالا کراندار باشد. به ازای عدد طبیعی n قرار می‌دهیم $A^{(n)} = \{x^n : x \in A\}$. در این صورت $\sup A^{(n)} = (\sup A)^n$. گزارهٔ مشابهی نیز برای $\inf$ داریم.

در حقیقت، اگر قرار دهیم $\alpha = \sup A$، آنگاه α^n آشکارا یک کران بالا برای $A^{(n)}$ است. با فرض $\beta = \sup A^{(n)}$، داریم $\beta \leq \alpha^n$. اگر اتفاقاً $\beta < \alpha^n$، آنگاه با فرض $\gamma = \sqrt[n]{\beta}$ داریم $٠ < \gamma < \alpha$. پس عنصری مانند $x_۱ \in A$ وجود دارد به طوری که $\gamma < x_۱$. در نتیجه، $\beta < x_۱^n$. این هم تناقض است، زیرا $x_۱^n \in A^{(n)}$.

۶۳.۱ تذکر. **(یک)** اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد و $x \in \mathbb{R}$، آنگاه داریم $\sqrt[n]{x^n} = |\, x \,|$.

(دو) اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد و $x < ٠$، بنابر **قرارداد**، $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{|x|}$.

۶۴.۱ قضیه. عدد حقیقی مثبت x، عددهای صحیح m و m' و عددهای طبیعی n و n' داده شده‌اند. اگر $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$، آنگاه $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$.

اثبات. قرار می‌دهیم $\sqrt[n]{x^m} = \alpha$ و $\sqrt[n']{x^{m'}} = \beta$. در این صورت $٠ < \alpha$، $٠ < \beta$، $\alpha^n = x^m$ و $\beta^{n'} = x^{m'}$. در نتیجه، $\alpha^{nn'} = \beta^{nn'}$ و از این‌رو، $\alpha = \beta$. $\blacksquare$

۶۵.۱ تعریف. عدد حقیقی مثبت x و عدد گویای $r = \frac{m}{n}$ که در آن $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$، داده شده‌اند. در این صورت x^r را برابر با $\sqrt[n]{x^m}$ تعریف می‌کنیم.

● قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که این تعریف خالی از ابهام است. در حالت خاص داریم $x^{۱/n} = \sqrt[n]{x}$.

۶۶.۱ تذکر. اکنون به آسانی دیده می‌شود که به شرط مثبت بودن پایه‌ها، قاعده‌های ضرب و تقسیم «عددهای توان‌دار» برای توان‌های گویا نیز معتبرند. از این گذشته فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا باشند. در این صورت

(الف) اگر $a > ۱$، آنگاه $r > ٠$ هم‌ارز است با $a^r > ۱$.

(ب) اگر $a > 1$، آنگاه $r > s$ هم‌ارز است با $a^r > a^s$.

(پ) اگر $a > b$، آنگاه $r > 0$ هم‌ارز است با $a^r > b^r$.

(ت) $a^r = b^r$ اگر و تنها اگر $r = 0$ یا $a = b$.

عددهای گنگ

● در شمارهٔ ۵۸.۱ با تعریف عدد گنگ آشنا شدیم. در اینجا چند ویژگی عددهای گنگ را معرفی می‌کنیم.

۶۷.۱ قضیه. $\sqrt{2}$ **عددی گنگ است.**

اثبات. چون $2 = (\sqrt{2})^2$ پس $\sqrt{2}$ یک جواب معادلهٔ $x^2 = 2$ در $\mathbb{R}$ است. از سوی دیگر، می‌دانیم که این معادله در $\mathbb{Q}$ جواب ندارد. پس $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. ■

۶۸.۱ تذکر. از این قضیه هم می‌توان نتیجهٔ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ را به دست آورد (زیرا $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ولی $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

۶۹.۱ قضیه. **(الف) اگر r گویا و x گنگ باشد، آنگاه $r + x$ گنگ است.**

(ب) اگر $r \neq 0$ گویا و x گنگ باشد، آنگاه rx گنگ است.

(پ) اگر x گنگ باشد، $1/x$ نیز گنگ است.

اثبات. در هر مورد کافی است از برهان خلف استفاده کنیم. ■

۷۰.۱ تذکر. به آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ عددهای گنگ، یعنی $\mathbb{Q}^c$[1]، نه نسبت به جمع بسته است نه نسبت به ضرب.

۷۱.۱ قضیه. بین هر دو عدد حقیقی متمایز، دست‌کم یک عدد گنگ وجود دارد (به سخن دیگر، $\mathbb{Q}^c$ در $\mathbb{R}$ چگال است)

اثبات. فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی متمایز باشند و $x < y$. در این صورت $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$. چون $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است عددی گویا مانند r، $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$، وجود دارد. به این ترتیب عدد گنگ $z = r + \sqrt{2}$ بین x و y است.■

● قضیهٔ بعد محک خوبی برای شناسایی برخی از عددهای گنگ است.

۷۲.۱ قضیه (منسوب به گاوس[2]). فرض کنیم عدد گویای p/q که در آن دو عدد صحیح

---

۱ - اگر X مجموعهٔ سخن باشد و $A \subseteq X$، **متمم** A را با نماد A^c نشان می‌دهیم.

2 - K.F. Gauss

p و q نسبت به هم اول‌اند، یک ریشهٔ معادلهٔ چند جمله‌ای با ضریب‌های صحیح $a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ باشد که در آن $n\geq 1$ و $a_0\neq 0$. در این صورت $p\mid a_n$ و $q\mid a_0$.

اثبات. چون p/q در معادله صدق می‌کند، پس

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0$$

یا $p(a_0p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}q^{n-1})=-a_nq^n$. این برابری نشان می‌دهد که $p\mid a_nq^n$ و از این‌رو، $p\mid a_n$ (زیرا p و q نسبت به هم اول‌اند). استدلال مشابهی هم برای $q\mid a_0$ داریم. ■

۷۳.۱ مثال. عدد طبیعی $k\geq 2$ داده شده است. اگر عدد طبیعی n، توان kام کامل نباشد[1]، آنگاه $\sqrt[k]{n}$ عددی گنگ است.

در حقیقت، با فرض $x=\sqrt[k]{n}$ داریم $x^k-n=0$. با استفاده از قضیهٔ قبل، اگر عدد گویای a یک ریشهٔ این معادله باشد، آنگاه a عددی صحیح است و $a^k-n=0$ یا $a^k=n$. این هم تناقض است.

● استدلال مشابهی نشان می‌دهد که به ازای هر عدد طبیعی $n\geq 2$، $\sqrt[n]{n}$ نیز عددی گنگ است.

عددهای جبری و متعالی

● مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را از دیدگاه دیگری هم می‌توان دو بخش کرد.

۷۴.۱ تعریف. می‌گوییم عدد $x\in\mathbb{R}$ **جبری** است هرگاه x ریشهٔ معادله‌ای چند جمله‌ای با ضریب‌های صحیح[2] باشد. در غیر این صورت x را **متعالی** می‌نامیم.

هر عدد گویا آشکارا عددی جبری است. عددهای $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$ جبری‌اند زیرا به ترتیب در معادله‌های چند جمله‌ای $x^2-2=0$ و $x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$ که ضریب‌های صحیح دارند، صدق می‌کنند. هر عدد متعالی آشکارا عددی گنگ است (ولی عکس این گزاره آشکارا نادرست است).

۷۵.۱ قضیه. اگر مجموعهٔ همهٔ عددهای جبری (حقیقی) را با $\mathbb{A}$ نشان دهیم، آنگاه $(\mathbb{A},+,.,\leq)$ یک هیأت مرتب است.

این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.[3]

---

۱ - یعنی به ازای هر $m\in\mathbb{N}$ داریم $n\neq m^k$.

۲ - یا با ضریب‌های گویا.

۳ - این اثبات را می‌توانید در مرجع [۱۵] بیابید.

۷۶.۱ قضیه. $\mathbb{A}$ **مجموعه‌ای شمارش‌پذیر است.**[۱]

اثبات. چند جمله‌ای با ضریب‌های صحیح $a_\circ x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ را که در آن $n \geq 1$ و $a_\circ \neq \circ$، در نظر می‌گیریم. عدد طبیعی $n + |a_\circ| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|$ را **شاخص** چند جمله‌ای می‌نامیم. به ازای هر عدد طبیعی $m \geq 2$، مجموعهٔ چند جمله‌ای‌های دارای شاخص m را با B_m نشان می‌دهیم. B_m آشکارا مجموعه‌ای متناهی است. اکنون فرض کنیم $\mathbb{A}_m$ مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی چند جمله‌ای‌های متعلق به B_m باشد. $\mathbb{A}_m$ نیز مجموعه‌ای متناهی است (چرا؟) و آشکارا داریم $\mathbb{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{A}_m$. به این ترتیب $\mathbb{A}$ حداکثر شمارش‌پذیر[۲] است. با توجه به رابطهٔ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ می‌بینیم که $\mathbb{A}$ شمارش‌پذیر است.

۷۷.۱ فرع. عدد متعالی وجود دارد.

اثبات. می‌دانیم که مجموعهٔ عددهای متعالی برابر است با $\mathbb{A}^c$. چون $\mathbb{A}$ شمارش‌پذیر و $\mathbb{R}$ شمارش‌ناپذیر است، رابطهٔ $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{A}^c$ نشان می‌دهد که $\mathbb{A}^c$ مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر است.[۳] ■

۷۸.۱ تذکر. ثابت می‌شود که e و π (که بعداً با تعریف دقیق آنها آشنا می‌شویم[۴]) دو عدد متعالی‌اند. همچنین، ثابت می‌شود که عدد x با بسط دهدهی[۵]

$$x = \circ/1\circ1\circ\circ1\circ\circ\circ\circ\circ\circ1\circ\circ\circ\circ\ldots$$

که در آن « تعداد صفرهای بعد از ممیز » به ترتیب برابر است با !۱، !۲، !۳، ... عددی متعالی است.

● قضیهٔ بسیار جالب گلفاند[۶] – اشنایدر[۷] می‌گوید « اگر α و β دو عدد جبری باشند به طوری که $\alpha > \circ$، $\alpha \neq 1$ و $\beta \in \mathbb{Q}^c$، آنگاه α^β عددی متعالی است ». از این گذشته، از قضیه‌های بیکر[۸] نتیجه می‌شود که

۱ - یعنی A با $\mathbb{N}$ **همتوان** است.

۲ - می‌گوییم مجموعه‌ای مانند S **حداکثر شمارش‌پذیر** است هرگاه S با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ همتوان باشد.

۳ - به این ترتیب « تعداد عددهای متعالی بسیار بیشتر از تعداد عددهای جبری است ».

۴ - برای تعریف e قضیهٔ ۱۵.۳ (الف) و برای تعریف π شمارهٔ ۱۳.۹ را ببینید.

۵ - بسط دهدهی را در پیوست فصل ۳ مورد بحث قرار می‌دهیم.

6 - A. Gelfond

7 - Th. Schneider

8 - A. Baker

(یک) اگر β عدد جبری ناصفر دلخواهی باشد، آنگاه e^{β} عددی متعالی است (در تعریف ۳ در پیوست فصل ۳، با تعریف دقیق a^x که در آن $a \in \mathbb{R}_+$ و $x \in \mathbb{R}$، آشنا می‌شویم).

(دو) اگر $\alpha > ۰$ و $\alpha \neq ۱$ عدد جبری دلخواهی باشد، آنگاه $\mathrm{Log}\alpha$ عددی متعالی است.

اکنون دستتان برای ساختن بینهایت عدد متعالی جالب « باز است ». برای مثال، عددهای $۲^{\sqrt{۲}}$ (**عدد هیلبرت**[1])، $e^{\sqrt[۳]{۴}}$، $\mathrm{Log}۲$ و $\mathrm{Log}(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt{۵})$ متعالی هستند.

- بد نیست بدانید هنوز ثابت نشده است که آیا عدد $\pi + e$ جبری است یا متعالی.

دستگاه گسترش یافتهٔ عددهای حقیقی

۷۹.۱ نمادگذاری. دو شیء متمایز دلخواه $\omega_۱$ و $\omega_۲$ را به طوری که $\omega_۱, \omega_۲ \notin \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega_۱, \omega_۲\}$$

به این ترتیب $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$.

۸۰.۱ قضیه. (الف) تابع

$$f : \mathbb{R} \to]-۱,۱[\quad , \quad f(x) = \frac{x}{۱+|x|}$$

دو سویی است و وارون آن عبارت است از

$$g :]-۱,۱[\to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{۱-|x|}$$

(ب) تابع

$$\overline{f} : \overline{\mathbb{R}} \to [-۱,۱] \quad , \quad \overline{f}(x) = \begin{cases} -۱ & x = \omega_۱ \\ f(x) & x \in \mathbb{R} \\ ۱ & x = \omega_۲ \end{cases}$$

دو سویی است و وارون آن عبارت است از

$$\overline{g} : [-۱,۱] \to \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad \overline{g}(x) = \begin{cases} \omega_۱ & x = -۱ \\ g(x) & -۱ < x < ۱ \\ \omega_۲ & x = ۱ \end{cases}$$

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد. ■

---

1 - D. Hilbert

۸۱.۱ قضیه. به ازای هر $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ می‌نویسیم $x \preceq y$ هرگاه داشته باشیم

$$\overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)$$

در این صورت

(الف) $\preceq$ یک رابطهٔ ترتیبی تام بر $\overline{\mathbb{R}}$ است.

(ب) به ازای هر $x \in \overline{\mathbb{R}}$ داریم $\omega_۱ \prec x \prec \omega_۲$.

(پ) رابطهٔ ترتیبی $\preceq$ رابطهٔ ترتیبی معمولی $\leq$ را بر $\mathbb{R}$ القا می‌کند.

(ت) فرض کنیم $\phi \neq A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. در این صورت A (نسبت به $\preceq$) هم $\sup$ **دارد هم** $\inf$.

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد. ■

۸۲.۱ تعویض نمادگذاری. (یک) از این پس به جای $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به ترتیب نمادهای $-\infty$ و ∞ (یا $+\infty$) را به کار می‌بریم و آنها را به ترتیب **بینهایتِ منفی** و **بینهایتِ مثبت** می‌نامیم.

(دو) از این پس به جای نماد $\preceq$ نیز نماد $\leq$ را به کار خواهیم برد.

۸۳.۱ تعریف. مجموعهٔ تماماً مرتب $(\overline{\mathbb{R}},\leq)$ را **دستگاه گسترش یافتهٔ عددهای حقیقی** می‌نامیم.

در این وضع، عضوهای $\mathbb{R}$ را نقطه‌های **متناهی** و نمادهای $-\infty$ و ∞ را نقطه‌های **نامتناهی** می‌نامیم.

۸۴.۱ قرارداد. هنگامی که مجموعهٔ مرتب $\overline{\mathbb{R}}$ مجموعهٔ سخن است، قرار می‌دهیم

$$\inf\phi = \infty \quad , \quad \sup\phi = -\infty$$

۸۵.۱ مثال. در مجموعهٔ مرتب $\overline{\mathbb{R}}$،

$$\begin{aligned}
&\inf\mathbb{N} = ۱ \quad , \quad \sup\mathbb{N} = \infty \\
&\inf\mathbb{Z} = -\infty \quad , \quad \sup\mathbb{Z} = \infty \\
&\inf\mathbb{Q} = -\infty \quad , \quad \sup\mathbb{Q} = \infty \\
&\inf\mathbb{R} = -\infty \quad , \quad \sup\mathbb{R} = \infty
\end{aligned}$$

۸۶.۱ تذکر. بر $\overline{\mathbb{R}}$ نه عمل جمع داریم نه عمل ضرب. با وجود این، برای آسانی در کارهای بعد، قراردهای زیر را می‌پذیریم:

(یک) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned}
&x + \infty = \infty \quad , \quad x + (-\infty) = -\infty \\
&x - (\infty) = -\infty \quad , \quad x - (-\infty) = \infty \\
&\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = ۰
\end{aligned}$$

(دو) اگر $x \in \mathbb{R}_+$، آنگاه $x \cdot \infty = \infty$ و $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(سه) اگر $x \in \mathbb{R}_-$، آنگاه $x \cdot \infty = -\infty$ و $x \cdot (-\infty) = \infty$.

(چهار) $\infty = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty\cdot\infty = \infty + \infty$،

$$(-\infty) + (-\infty) = \infty\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$$

● برای نمادهای $\infty - \infty$ و $-\infty + \infty$ هیچ معنی‌ای قائل نمی‌شویم.

بازه‌های $\mathbb{R}$

خواننده با تعریف بازه‌ها در $\mathbb{R}$ (و به‌طور کلی در مجموعه‌های مرتب) آشناست. در $\mathbb{R}$ چهار نوع بازهٔ کراندار و پنج نوع بازهٔ بیکران وجود دارد. بازه‌ها مشخصهٔ جالبی دارند که در قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

۸۷.۱ قضیه. فرض کنیم زیرمجموعهٔ $E \subseteq \mathbb{R}$ دست‌کم دو عضو داشته باشد. در این صورت دو گزارهٔ زیر هم‌ارزند.

(الف) E **یک بازه است.**

(ب) به ازای هر دو عضو $x, y \in E$ **به طوری که** $x < y$، **از** $x < z < y$ **نتیجه می‌شود** $z \in E$.

اثبات. «**(الف)** $\Leftarrow$ **(ب)**» بدیهی است.

«**(ب)** $\Leftarrow$ **(الف)**» E را زیرمجموعهٔ $\overline{\mathbb{R}}$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $a = \inf E$ و $b = \sup E$. یک استدلال ساده (بر پایهٔ تشخیص حالت‌های گوناگون) نشان می‌دهد که E بازه‌ای با دو سر چپ و راست a و b است. ■

۸۸.۱ قضیه. اشتراک هر دو بازهٔ باز در $\mathbb{R}$ یا تهی است یا بازه‌ای باز.

اثبات. فرض کنیم $I =]a, b[$ و $J =]\alpha, \beta[$ که در آن a، b، α و β به $\overline{\mathbb{R}}$ تعلق دارند و اینکه $a < b$ و $\alpha < \beta$. همچنین، فرض کنیم $E = I \cap J \neq \varnothing$. قرار می‌دهیم $u = \max\{a, \alpha\}$ و $v = \min\{b, \beta\}$. یک استدلال ساده نشان می‌دهد که $u < v$ و $E =]u, v[$. ■

۸۹.۱ تذکر. با استدلال مشابهی می‌توان ثابت کرد که به طور کلی اشتراک هر دو بازهٔ دلخواه در $\mathbb{R}$ یا تهی است یا بازه.[۱]

دستگاه عددهای مختلط

● دیدیم که به ازای هر $z \in \mathbb{R}$ داریم $z^۲ \geq ۰$ و از این‌رو، $z^۲ + ۱ > ۰$. این نشان می‌دهد که معادلهٔ $z^۲ + ۱ = ۰$ در $\mathbb{R}$ جواب ندارد. هدف ما در این بخش، ساختن مجموعه‌ای از

۱- به شرط بر اینکه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ قرار دهیم $[x, x] = \{x\}$. از این گذشته، اگر این دو بازه همنوع باشند و همدیگر را قطع کنند، اشتراکشان نیز بازه‌ای از همان نوع است.

« اشیا » به نام « عددهای مختلط » است به طوری که در چارچوب آنها معادلهٔ یاد شده جواب داشته باشد.

۹۰.۱ تعریف. هر جفت مرتب از عددهای حقیقی مانند (x,y) را یک **عدد مختلط** می‌نامیم و مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط، یعنی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، را با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم.

اگر $z=(x,y)\in\mathbb{C}$، x را **جزء حقیقی** و y را **جزء موهومی** z می‌نامیم[1] و می‌نویسیم $x=\operatorname{Re} z$ و $y=\operatorname{Im} z$.

۹۱.۱ قضیه. $\mathbb{C}$ مجهز به دو عمل جمع و ضرب

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad , \quad (x,y)\cdot(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')$$

یک هیأت است. عدد $(۰,۰)$ صفرِ $\mathbb{C}$ و عدد $(۱,۰)$ یکِ $\mathbb{C}$ است. قرینهٔ (x,y) عبارت است از $(-x,-y)$ و اگر عدد $z=(x,y)$ صفر نباشد، آنگاه

$$z^{-۱}=\left(\frac{x}{x^۲+y^۲},\frac{-y}{x^۲+y^۲}\right)$$

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد. ■

۹۲.۱ تعریف و نمادگذاری. عدد $(۱,۰)$ را یکه (یا واحد) حقیقی و عدد $(۰,۱)$ را **یکه (یا واحد) موهومی** می‌نامیم. یکهٔ موهومی را با i نشان می‌دهیم، یعنی $i=(۰,۱)$.

۹۳.۱ تذکر. هیأت عددهای مختلط را هرگز نمی‌توان به یک هیأت مرتب تبدیل کرد.

در حقیقت، فرض کنیم $\mathbb{C}$ مجهز به رابطه‌ای مانند $\leq$ یک هیأت مرتب بشود. چون $i\neq(۰,۰)$، پس $i^۲>(۰,۰)$ و از این‌رو،

$$\begin{aligned} i^۲>(۰,۰) &\Rightarrow (-۱,۰)>(۰,۰)\\ &\Rightarrow (۱,۰)<(۰,۰)\\ &\Rightarrow ((۱,۰))^۲>(۰,۰)\\ &\Rightarrow (۱,۰)>(۰,۰)\end{aligned}$$

و این هم با سطر دوم تناقض دارد.

۹۴.۱ قضیه. تابع $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ،

$$\varphi(x)=(x,۰)$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت

---

۱ - با توجه به هندسهٔ تحلیلی مقدماتی، هر عدد مختلط $z=(x,y)$ را می‌توان نقطه‌ای به مختصات (x,y) در صفحه (ی مجهز به یک دستگاه مختصات دکارتی) تلقی کرد. در این وضع، محور x را **محور حقیقی**، محور y را **محور موهومی** و صفحه را **صفحهٔ مختلط** می‌نامیم.

(الف) φ **یک به یک است ولی پوشا نیست.**

(ب) $\varphi(x+x') = \varphi(x) + \varphi(x')$.

(پ) $\varphi(xx') = \varphi(x)\varphi(x')$.

اثبات. همه چیز آشکار است.■

۹۵.۱ قرارداد. با توجه به قضیهٔ بالا، از این پس بین $x \in \mathbb{R}$ و $\varphi(x) = (x, ۰)$ فرقی قائل نمی‌شویم، یعنی می‌نویسیم $x = (x, ۰)$. با این قرارداد می‌بینیم که $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

۹۶.۱ قضیه. $i^۲ = -۱$ **(یا** $i^۲ + ۱ = ۰$**). به سخن دیگر، معادلهٔ** $z^۲ + ۱ = ۰$ **در** $\mathbb{C}$ **جواب دارد.**

اثبات. با توجه به تعریف ضرب عددهای مختلط و قرارداد قبل داریم

$$i^۲ = (۰,۱)\cdot(۰,۱) = (-۱,۰) = -۱. \ ■$$

۹۷.۱. صورت متعارف عددهای مختلط. فرض کنیم $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. در این صورت

$$z = (a,b) = (a,۰) + (۰,b) = (a,۰) + (b,۰)(۰,۱) = a + bi$$

از این پس هر عدد مختلط را تنها به همین صورت نشان می‌دهیم.

۹۸.۱ تعریف. فرض کنیم $z = a + bi$. **مزدوج (مختلط)** z را با $\overline{z}$ نشان می‌دهیم و آن را با رابطهٔ $\overline{z} = a - bi$ تعریف می‌کنیم.

۹۹.۱ قضیه. مزدوج‌گیری مختلط دارای ویژگی‌های زیر است.

(الف) $\overline{\overline{z}} = z$.

(ب) $\overline{z} = z$ **اگر و تنها اگر** $z \in \mathbb{R}$. **همچنین،** $\overline{z} = -z$ **اگر و تنها اگر** $z = \alpha i$ **که در آن** $\alpha \in \mathbb{R}$.[۱]

(پ) $\overline{z_۱ + z_۲} = \overline{z_۱} + \overline{z_۲}$ **و** $\overline{z_۱ z_۲} = \overline{z_۱} \cdot \overline{z_۲}$.

(ت) اگر $z_۲ \neq ۰$، آنگاه $\overline{z_۱ / z_۲} = \overline{z_۱} / \overline{z_۲}$.

(ث) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{۲}$ **و** $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{۲i}$.

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد.■

۱۰۰.۱ مثال. اگر $P(z)$ یک چندجمله‌ای یک متغیرهٔ مختلط با ضریب‌های حقیقی باشد، آنگاه $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. بنابراین، اگر $a + ib$ یک ریشهٔ معادلهٔ $P(z) = ۰$ باشد، $a - ib$ نیز یک ریشهٔ آن است.

۱۰۱.۱ تعریف. فرض کنیم $z = a + bi$. **قدرمطلق** z را با $|z|$ نشان می‌دهیم و آن را با رابطهٔ $|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف می‌کنیم.[۲]

---

۱ - هر عدد مختلط مانند αi را که در آن $\alpha \in \mathbb{R}$ یک عدد **موهومی محض** می‌نامیم.

۲ - از نظر هندسی، $|z|$ عبارت است از فاصلهٔ اقلیدسی نقطهٔ (a,b) تا مبدأ (در صفحهٔ مجهز به یک دستگاه مختصات دکارتی). به همین ترتیب، $|z_۱ - z_۲|$ عبارت است از فاصلهٔ اقلیدسی نقطه‌های $z_۱$ و $z_۲$.

۱۰۲.۱ قضیه. قدرمطلق دارای ویژگی‌های زیر است.

(الف) $|z| \geq 0$ **و اینکه** $|z| = 0$ **اگر و تنها اگر** $z = 0$.

(ب) $|z| = |\overline{z}|$.

(پ) $z\overline{z} = |z|^2$.

(ت) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(ث) اگر $z_2 \neq 0$، آنگاه $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

(ج) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ و $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(چ) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **(نابرابری مثلثی)**

(ح) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

اثبات. تنها (چ) را ثابت می‌کنیم. می‌بینیم که

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

۱۰۳.۱ پرسش. با کدام شرط داریم $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$؟

پاسخ. فرض کنیم $z_2 \neq 0$. در این صورت

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \\ &\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \cdot |z_1|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \geq 0 \end{aligned}$$

● به همین ترتیب، اگر $z_2 \neq 0$، می‌توان ثابت کرد که $|z_1 - z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$ اگر و تنها اگر $z_1/z_2 \geq 0$.

۱۰۴.۱ قضیه. (نابرابری $C.B.S$[1]). عددهای مختلط a_1، $\cdots$، a_n **و** b_1، $\cdots$، b_n **داده شده‌اند. در این صورت**

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b}_k\right|^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big)$$

این نابرابری به برابری تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر aها و bها متناسب باشند.

1– Cauchy- Bunyakowski-Schwarz

اثبات. روش یکم قرار می‌دهیم

$$u=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 \quad , \quad v=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$$

و فرض می‌کنیم که $u\neq 0$ و $v\neq 0$. به ازای $\lambda\in\mathbb{C}$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum|a_k-\lambda b_k|^2&=\sum(a_k-\lambda b_k)(\overline{a}_k-\overline{\lambda}\,\overline{b}_k)\\&=u+|\lambda|^2 v-\lambda\sum\overline{a}_k b_k-\overline{\lambda}\sum a_k\overline{b}_k\end{aligned}$$

با فرض $\lambda=\left(\sum a_k\overline{b}_k\right)/v$ رابطهٔ بالا به صورت

$$\sum|a_k-\lambda b_k|^2=u-|\lambda|^2 v \qquad (*)$$

در می‌آید. چون طرف چپ نامنفی است، پس

$$u-|\lambda|^2 v\geq 0$$

و این همان نابرابری $C.B.S$ است.

از سوی دیگر، با استفاده از $(*)$ داریم

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{b}_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)&\Leftrightarrow u-|\lambda|^2 v=0\\&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}|a_k-\lambda b_k|^2=0\\&\Leftrightarrow \forall k\ ,\ a_k=\lambda b_k\end{aligned}$$

روش دوم باز هم با فرض $u=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2$ و $v=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\sum_{k,j=1}^{n}|a_k b_j-a_j b_k|^2&=2uv-2\operatorname{Re}\sum_{k,j=1}^{n}a_k b_j.\overline{a}_j.\overline{b}_k\\&=2uv-2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{b}_k\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\overline{b}_j\right)}\\&=2uv-2\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{b}_k\right|^2 \qquad (**)\end{aligned}$$

(چرا ؟). چون طرف چپ نابرابری بالا نامنفی است، پس

$$2uv-2\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\overline{b}_k\right|^2\geq 0$$

و این همان نابرابری $C.B.S$ است.

از سوی دیگر، با استفاده از (**) می‌بینیم که

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big) \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{b}_k\right|^2 = uv$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k,j=1}^{n} |a_k b_j - a_j b_k|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k, j, a_k b_j - a_j b_k = 0$$

$\Rightarrow$ aها و bها متناسب‌اند

اکنون اثبات قضیه تمام است. ■

۱۰۵.۱ مثال. اگر a_1، $\cdots$ ، a_n عددهایی مثبت باشند، آنگاه

$$(a_1 + \ldots + a_n)\Big(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) \ge n^2$$

در حقیقت، با توجه به نابرابری $C.B.S$ داریم

$$n^2 = (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{جمله } n})^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$$

فضای n بعدی اقلیدسی

● فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. مجموعهٔ همهٔ nتایی‌های مرتب از عددهای حقیقی را با $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم. به آسانی دیده می‌شود که $\mathbb{R}^n$ با عمل‌های جمع و ضرب اسکالر، یعنی

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad , \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$، یک فضای برداری حقیقی n بعدی است. نقطهٔ $(0, \ldots, 0)$ مبدأ فضاست و می‌نویسیم $0 = (0, \ldots, 0)$.

۱۰۶.۱ نمادگذاری. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعهٔ ناتهی $\mathbb{R}^n$ باشند و $\lambda \in \mathbb{R}$. در این صورت معنی نمادهای $A + B$ و λA عبارت است از

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \qquad , \quad \lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$$

به جای $(-1) \cdot A$ می‌نویسیم $(-A)$. همچنین، $A - B$ را برابر با $A + (-B)$ تعریف می‌کنیم.[1]

۱ - اگر $A = \{u\}$، به جای $A + B$ می‌نویسیم $u + B$.

۱۰۷.۱ تعریف. به ازای هر دو عنصر

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad , \quad y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$$

عدد $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ را **حاصلضرب داخلی** x و y می‌نامیم و آن را با نماد $(x\mid y)$ یا $x.y$ نشان می‌دهیم. پس

$$(x\mid y)=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

در حالت خاص داریم $(x\mid x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2$. به ازای $n=1$ می‌بینیم که $(x\mid y)=xy$.

۱۰۸.۱ قضیه. ضرب داخلی دارای ویژگی‌های زیر است.

(الف) $(x\mid y)=(y\mid x)$.

(ب) $(x\mid y+z)=(x\mid y)+(x\mid z)$.

(پ) به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ **داریم**

$$(\lambda x\mid y)=(x\mid \lambda y)=\lambda(x\mid y)$$

(ت) $(x\mid x)\geq 0$ **و** $(x\mid x)=0$ **اگر و تنها اگر** $x=0$.

اثبات. به آسانی انجام می‌گیرد. ■

۱۰۹.۱ مثال. فرض کنیم $n\geq 2$، $x\in\mathbb{R}^n$ و $x\neq 0$. در این صورت عنصری مانند $y\in\mathbb{R}^n$، $y\neq 0$، هست به طوری که $(x\mid y)=0$.

در حقیقت، فرض $x=(x_1,\dots,x_n)$ و اینکه برای مثال، $x_1\neq 0$. با توجه به تعریف $(x\mid y)=\sum x_k y_k$، کافی است قرار دهیم

$$y_1=-\frac{1}{x_1}\sum_{k=2}^{n} x_k \quad , \quad y_2=\dots=y_n=1$$

● گزارهٔ بالا به ازای $n=1$ درست نیست، زیرا در این حالت رابطهٔ $xy=(x\mid y)=0$ نشان می‌دهد که باید $y=0$.

۱۱۰.۱ تعریف. به ازای هر $x\in\mathbb{R}^n$، عدد نامنفی $(x\mid x)^{1/2}$ را **نرُم (اقلیدسی)** x می‌نامیم و آن را با نماد $\|x\|$ نشان می‌دهیم. پس

$$\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}=\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}$$

به ازای $n=1$ آشکارا داریم $\|x\|=|x|$.

۱۱۱.۱ قضیه. نرم دارای ویژگی‌های زیر است.

(الف) $\|x\|^{۲} = (x \mid x)$.

(ب) $|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

(پ) $\|x\| \geq ۰$ **و** $\|x\| = ۰$ **اگر و تنها اگر** x **مبدأ باشد.**

(ت) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ **داریم** $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(ث) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. **(نابرابری مثلثی)**

(ج) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

اثبات. گزارهٔ (ب) حالت خاصی از نابرابری $C.B.S$ است. برای گزارهٔ (ث) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\|x + y\|^{۲} = (x + y \mid x + y) &= \|x\|^{۲} + (x \mid y) + (y \mid x) + \|y\|^{۲} \\ &\leq \|x\|^{۲} + ۲\|x\|\,\|y\| + \|y\|^{۲} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^{۲}\,. \blacksquare\end{aligned}$$

۱۱۲.۱ تذکر. یک استدلال ساده نشان می‌دهد که در گزاره‌های (ث) و (ج) در قضیهٔ بالا، برابری برقرار است اگر و تنها اگر به ازای عددی نامنفی مانند λ داشته باشیم $x = \lambda y$ یا $y = \lambda x$.

۱۱۳.۱ تعریف. $\mathbb{R}^n$ مجهز به عمل‌های جمع، ضرب اسکالر، ضرب داخلی و نرم (اقلیدسی)، **فضای** n **بعدی اقلیدسی** نام دارد.

۱۱۴.۱ مثال. اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$، آنگاه

$$\|x + y\|^{۲} + \|x - y\|^{۲} = ۲(\|x\|^{۲} + \|y\|^{۲}) \qquad \text{(قانون متوازی‌الاضلاع)}$$

$$\|x + y\|^{۲} - \|x - y\|^{۲} = ۴(x \mid y)$$

۱۱۵.۱ تعریف. مجموعهٔ $I \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک **بازه (ی n بعدی)** می‌نامیم هرگاه برابر باشد با حاصلضرب دکارتی n بازهٔ $\mathbb{R}$. در حالت خاص، بازه‌ای مانند $[a_{۱}, b_{۱}] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ یک **بازهٔ بستهٔ کراندار** یا **یک حجرهٔ n بعدی** نام دارد. اگر همهٔ بازه‌های « مؤلفه‌ای » باز باشند (کراندار یا بیکران)، حاصلضرب دکارتی را یک **بازهٔ باز n بعدی** می‌نامیم.

پیوست فصل ۱: چند نابرابری

I (**نابرابری برنولی**[1]). عدد حقیقی α به گونه‌ای است که $1+\alpha \geq 0$. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی n داریم $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$. از این گذشته، $(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$ اگر و تنها اگر $\alpha = 0$ یا $n = 1$. (تمرین ۱۸ را نیز ببینید.)

در حقیقت، اگر نابرابری به ازای k درست باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^{k+1} &= (1+\alpha)^k(1+\alpha)\\ &\geq (1+k\alpha)(1+\alpha)\\ &= 1+(k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1+(k+1)\alpha\end{aligned}$$

پس نابرابری به ازای $k+1$ نیز درست است. اکنون استقرای ریاضی را به کار می‌بریم.

اگر $\alpha = 0$ یا $n = 1$، آنگاه برابری آشکارا درست است. برعکس، با فرض $(1+\alpha)^n = 1+n\alpha$ و $n \neq 1$، بنابر آنچه در بالا آمد داریم

$$1+n\alpha = (1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha+(n-1)\alpha^2$$

و از این‌رو، $\alpha = 0$ (چرا؟).

II. اگر عدد حقیقی x متعلق به بازه‌ای با دو سر a و b (که در آن $a \neq b$) باشد، آنگاه

$$|\, x \,| \leq \max\{|\, a \,|, |\, b \,|\}$$

در حقیقت، کافی است ویژگی‌های قدرمطلق را به کار ببریم.

III. اگر عددهای حقیقی مثبت x_1، $\cdots$، x_n $(n \in \mathbb{N})$ در رابطهٔ $x_1\ x_2\ \cdots\ x_n = 1$ صدق کنند، آنگاه $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. شرط لازم و کافی برای برابری این است که $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

در حقیقت، با استفاده از استقرای ریاضی فرض کنیم نابرابری به ازای k برقرار باشد. همچنین، فرض کنیم عددهای مثبت x_1، $\cdots$، x_k، x_{k+1} در رابطه‌های

$$x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1} = 1 \quad , \quad x_k < 1 \quad , \quad x_{k+1} > 1$$

صدق کنند. در این صورت با توجه به فرض استقرا داریم

---

1 - Jacob Bernoulli

$$x_1 + x_2 + \ldots + (x_k x_{k+1}) \geq k$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1}$$
$$= k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_k) > k + 1$$

و اثبات نابرابری تمام می‌شود. از این گذشته، روند استدلال نشان می‌دهد که اگر دست کم یکی از xها مخالف ۱ باشد، آنگاه $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n$.

IV. فرض کنیم x_1، $\cdots$ ، x_n $(n \in \mathbb{N})$ عددهای حقیقی مثبت دلخواهی باشند و

$$A = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \quad , \quad G = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \quad , \quad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

در این صورت

$$H \leq G \leq A$$

شرط لازم و کافی برای برابری آن است که $x_1 = \cdots = x_n$.

عددهای A، G و H را به ترتیب **میانگین حسابی**، **میانگین هندسی** و **میانگین همساز** x_1، $\cdots$ ، x_n و نابرابری‌های بالا را **نابرابری‌های همساز –هندسی –حسابی** می‌نامیم.

در حقیقت، اگر قرار دهیم

$$y_1 = x_1 / G, \ldots, y_n = x_n / G$$

آنگاه $y_1 \ldots y_n = 1$ و از این‌رو، $y_1 + \ldots + y_n \geq n$ و این دقیقاً یعنی $A \geq G$. برای برابری لازم و کافی است که $y_1 = \ldots = y_n = 1$ یا $x_1 = \ldots = x_n (= G)$.

نابرابری دوم بی‌درنگ از نابرابری $G \leq A$ نتیجه می‌شود (چگونه ؟).

V. عددهای حقیقی مثبت دلخواه x_1، $\ldots$، x_n و عددهای گویای مثبت دلخواه p_1، $\ldots$، p_n داده شده‌اند. در این صورت با فرض $p = p_1 + \ldots + p_n$ داریم

$$x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p}\right)^p$$

برای برابری لازم و کافی است که $x_1 = \ldots = x_n$.

در حالت خاص، اگر a و b دو عدد مثبت باشند و اگر دو عدد گویای مثبت λ و μ در رابطهٔ $\lambda + \mu = 1$ صدق کنند، آنگاه

$$a^\lambda b^\mu \leq \lambda a + \mu b$$

در حقیقت، نخست فرض کنیم $p=1$. در این صورت هر p_i را می‌توان به صورت m_i / m نوشت که در آن m_i و m، عددهایی طبیعی هستند و $m = m_1 + \ldots + m_n$. اکنون با استفاده از IV می‌بینیم که

$$x_1^{p_1} \ \ldots \ x_n^{p_n} = \sqrt[m]{x_1^{m_1} \ \ldots \ x_n^{m_n}} \leq \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m}$$
$$= p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

با توجه به IV، برای برابری لازم و کافی است که $x_1 = \ldots = x_n$.

در حالت کلی با فرض $q_i = p_i / p$ داریم $q_1 + \ldots + q_n = 1$ و از این‌رو، بنابر آنچه در بالا آمد،

$$x_1^{q_1} \ \ldots \ x_n^{q_n} \leq q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n \Rightarrow x_1^{p_1} \ \ldots \ x_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p}\right)^p$$

VI. عددهای حقیقی a_1، …، a_n و b_1، …، b_n که در آن $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ داده شده‌اند. به ازای هر $1 \leq p \leq n$ قرار می‌دهیم $s_p = a_1 + \ldots + a_p$ و فرض می‌کنیم به ازای دو عدد m و M و هر $1 \leq p \leq n$ داشته باشیم $m \leq s_p \leq M$. در این صورت

$$m b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1$$

در حقیقت، با فرض $s_0 = 0$ می‌بینیم که

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} s_k b_{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n$$

و نابرابری‌های خواسته شده به دست می‌آیند (چگونه؟).

چند مسألهٔ حل شده

۱. فرض کنیم $(A_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های ناتهیِ $\mathbb{R}$ باشد. اگر مجموعهٔ $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ از بالا کراندار باشد، ثابت کنید که $\sup A = \sup_{i\in I} (\sup A_i)$. گزارهٔ مشابهی هم برای $\inf$ داریم.

حل. به ازای هر $i \in I$ قرار می‌دهیم $a_i = \sup A_i$. طرف چپ و راست رابطهٔ بالا را به ترتیب a و b می‌نامیم. از $A_i \subseteq A$ نتیجه می‌شود که به ازای هر i داریم $a_i \le a$ و از این‌رو، $b = \sup a_i \le a$. برعکس،

$$x = A \Rightarrow \exists j : x \in A_j \Rightarrow x \le a_j \Rightarrow x \le b$$

پس $a = \sup \le b$.

۲. فرض کنیم مجموعهٔ ناتهی $M \subseteq \mathbb{R}$ از بالا کراندار باشد و $a \in \mathbb{R}$. نشان دهید که

$$\sup_{x\in M} \inf\{a, x\} = \inf\{a, \sup M\}$$

حل. طرف چپ رابطهٔ بالا را α و طرف راست را β می‌نامیم. می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\gamma < \alpha \;&\Rightarrow\; \exists x \in M : \gamma < \inf\{a, x\}\\ &\Rightarrow\; \gamma < a \;\;,\;\; \gamma < x\\ &\Rightarrow\; \gamma < a \;\;,\;\; \gamma < \sup M \;\;\Rightarrow\;\; \gamma < \beta\end{aligned}$$

بنابراین، $\alpha \le \beta$ (چرا؟). از سوی دیگر،

$$\begin{aligned}\delta < \beta \;&\Rightarrow\; \delta < a \;\;,\;\; \delta < \sup M\\ &\Rightarrow\; \delta < a \;\;,\;\; \exists x \in M : \delta < x\\ &\Rightarrow\; \delta < \inf\{a, x\} \;\;\Rightarrow\;\; \delta < a\end{aligned}$$

و از این رو، $\beta \le \alpha$. در نتیجه، $\alpha = \beta$.

● به آسانی می‌بینیم که اگر مجموعهٔ ناتهی $M \subseteq \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد و $a \in \mathbb{R}$، آنگاه

$$\inf_{x\in M} \sup\{a, x\} = \sup\{a, \inf M\}$$

۳. فرض کنیم A یک زیرمجموعهٔ ناتهی کراندار $\mathbb{R}$ باشد و m و M به ترتیب $\inf$ و $\sup$ آن را نشان دهند. ثابت کنید که

$$M - m = \sup\{x - y : x, y \in A\} = \sup\{|\, x - y\,| : x, y \in A\}$$

حل. قرار می‌دهیم

$$E = A - A \qquad , \qquad F = \{| x - y | : x, y \in A\}$$

روشن است که F مجموعهٔ عنصرهای نامنفی E است. پس

$$\begin{aligned}\sup F &= \sup E \\ &= \sup A - \inf A = M - m\end{aligned}$$

۴. فرض کنیم زیرمجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}_+$ ناتهی و از بالا کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\inf\{۱/x : x \in A\} = \frac{۱}{\sup A}$$

حل. فرض کنیم $\alpha = \sup A$ و $B = \{۱/x : x \in A\}$. در این صورت

$$x \in A \Rightarrow ۰ < x \leq \alpha \Rightarrow \frac{۱}{\alpha} \leq \frac{۱}{x} \Rightarrow \frac{۱}{\alpha} \leq \inf B$$

اکنون فرض کنیم $۱/\alpha < \gamma$. در این صورت با توجه به ویژگی‌های $\sup$ داریم

$$\begin{aligned}&۰ < \frac{۱}{\alpha} < \gamma \Rightarrow \frac{۱}{\gamma} < \alpha \\ &\Rightarrow \exists x \in A : \frac{۱}{\gamma} < x \leq \alpha \Rightarrow \frac{۱}{\alpha} \leq \frac{۱}{x} < \gamma\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که γ یک کران پایین برای B نیست. پس $\inf B = ۱/\alpha$.

● **تذکر.** اگر A « **دور از صفر** » باشد، یعنی اگر همهٔ عنصرهای A از عدد مثبت ثابتی مانند m بیشتر باشند، آنگاه $\sup B = ۱ / \inf A$ (چرا ؟). در غیر این صورت $\sup B = \infty$ (چرا ؟).

۵. فرض کنیم $n \geq ۲$ عدد طبیعی دلخواهی باشد. با فرض $u = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{n}}$ نشان دهید که

$$۲\sqrt{n+۱} - ۲ < u < ۲\sqrt{n} - ۱$$

حل. نخست می‌بینیم که

$$k \geq ۲ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{k}} = \frac{۲}{۲\sqrt{k}} < \frac{۲}{\sqrt{k} + \sqrt{k-۱}} = ۲(\sqrt{k} - \sqrt{k-۱})$$

و از این‌رو، $u < ۲\sqrt{n} - ۱$. از سوی دیگر،

$$k \geq ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{k}} = \frac{۲}{۲\sqrt{k}} > \frac{۲}{\sqrt{k+۱} + \sqrt{k}} = ۲(\sqrt{k+۱} - \sqrt{k})$$

بنابراین، $u > ۲\sqrt{n+۱} - ۲$.

● به ازای $n = ۱۰^۶$ داریم $۱۹۹۸ < u < ۱۹۹۹$. پس $\lfloor u \rfloor = ۱۹۹۸$.

● **پرسش** به ازای $n = ۱۰^۳$، $\lfloor u \rfloor$ کدام است؟

۶. نشان دهید که $\cos ۲۰^\circ$ عددی گنگ است.[۱]

حل. قرار می‌دهیم $x = \cos ۲۰^\circ$. با استفاده از رابطهٔ $\cos ۳\alpha = ۴\cos^۳ \alpha - ۳\cos\alpha$ و انتخاب $\alpha = ۲۰^\circ$، می‌بینیم که $۸x^۳ - ۶x - ۱ = ۰$. بنابر قضیهٔ ۷۲.۱ ریشه‌های گویای این معادله، در صورت وجود، متعلق‌اند به مجموعهٔ $\{\pm ۱ , \pm ۱/۲ , \pm ۱/۴ , \pm ۱/۸\}$. چون $۱/۲ < \cos ۲۰^\circ < ۱$، پس $\cos ۲۰^\circ$ عددی گنگ است.

۷. اگر $n \geq ۲$ عددی طبیعی باشد، نشان دهید که $\sqrt{n^۲ - ۱}$ گنگ است. همچنین، عددهای $\sqrt{n^۲ + ۱}$ و $\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱}$ به ازای هر عدد طبیعی n گنگ هستند.

حل. اگر $\sqrt{n^۲ - ۱}$ گویا باشد باید برابر باشد با عددی طبیعی مانند m (چرا ؟). در نتیجه، $n^۲ - ۱ = m^۲$ و از این‌رو، $n + m = ۱$ و $n - m = ۱$. به این ترتیب داریم $n = ۱$ و این خلاف فرض $n \geq ۲$ است.

استدلال مشابهی برای $\sqrt{n^۲ + ۱}$ (به ازای $n \geq ۱$) داریم.

اگر عدد $\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱}$ گویا باشد، آنگاه $\sqrt{n^۲ - ۱}$ نیز گویا می‌شود (چرا؟) و دیدیم که این هم ناممکن است.

۸. نشان دهید که عدد $x = \sqrt[۳]{۲} - \sqrt{۳}$ گنگ است.

حل. اگر دو طرف $x + \sqrt{۳} = \sqrt[۳]{۲}$ را به توان سه برسانیم رابطهٔ

$$x^۳ + ۹x - ۲ = -۳\sqrt{۳}(x^۲ + ۱)$$

به دست می‌آید. اگر x گویا باشد، آنگاه طرف چپ گویاست و از این‌رو، طرف راست نیز گویا می‌شود و این هم آشکارا تناقض است. پس x گنگ است.

۹. اگر a، b و c سه عدد گویا باشند و $a\sqrt{۲} + b\sqrt{۳} + c\sqrt{۵} = ۰$، ثابت کنید که $a = b = c = ۰$.

حل. از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌گیریم که $۳b^۲ + ۵c^۲ + ۲bc\sqrt{۱۵} = ۲a^۲$. بنابراین، باید $bc = ۰$. اگر $b = ۰$، آنگاه رابطهٔ داده شده به صورت $a\sqrt{۲} = -c\sqrt{۵}$ یا $۲a = -c\sqrt{۱۰}$ درمی‌آید. چون $\sqrt{۱۰}$ گنگ است باید $a = c = ۰$. به همین ترتیب اگر $c = ۰$، نتیجه می‌گیریم که $a = b = ۰$.

۱۰. اگر a، b و c سه عدد گویا باشند و $a + b\sqrt[۳]{۲} + c\sqrt[۳]{۴} = ۰$، ثابت کنید که $a = b = c = ۰$.

---

۱ - در فصل ۹ با تعریف دقیق (یعنی تعریف تحلیلی) توابع $\sin$ و $\cos$ آشنا می‌شویم.

حل. اگر $b=\circ$، به آسانی دیده می‌شود که $a=c=\circ$. استدلال مشابهی نشان می‌دهد که اگر $c=\circ$، آنگاه $a=b=\circ$. پس فرض می‌کنیم اتفاقاً $b\neq\circ$ و $c\neq\circ$. قرار می‌دهیم $x=\sqrt[3]{۲}$ و $y=\sqrt[3]{۴}$. می‌بینیم که

$$a+bx+cy=\circ \Rightarrow bx+cy=-a \Rightarrow \begin{cases} bx+cy=-a \\ ۲c^۲x+b^۲y=a^۲-۴bc \end{cases}$$

با توجه به $b^۳-۲c^۳\neq\circ$ (چرا؟) از حل دستگاه بالا نتیجه می‌شود که $\sqrt[3]{۲}=x\in\mathbb{Q}$ و $\sqrt[3]{۴}=y\in\mathbb{Q}$ و این هم تناقض است.

۱۱. اگر $|z|=۱$، ثابت کنید که به ازای هر دو عدد مختلط دلخواه a و b به طوری که $\bar{b}z+\bar{a}\neq\circ$ داریم $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=۱$.

حل. از $|z|=۱$ نتیجه می‌شود که $\bar{z}=۱/z$. پس

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=\frac{|z|\cdot|a+b\cdot z^{-۱}|}{|\bar{a}+\bar{b}z|}=\frac{|a+b\bar{z}|}{|\bar{a}+\bar{b}z|}=۱$$

۱۲. اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید که همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $\left(\dfrac{۱+iz}{۱-iz}\right)^n=\dfrac{۱+ia}{۱-ia}$، در صورت وجود، حقیقی‌اند.

حل. با فرض $z=x+iy$، می‌بینیم که

$$\left(\frac{۱-y+ix}{۱+y-ix}\right)^n=\frac{۱+ia}{۱-ia}\Rightarrow\left(\frac{|۱-y+ix|}{|۱+y-ix|}\right)^n=۱$$
$$\Rightarrow |۱-y+ix|=|۱+y-ix|$$
$$\Rightarrow ۴y=\circ\Rightarrow y=\circ$$

۱۳. اگر $z,z'\in\mathbb{C}$، ثابت کنید که $|z|+|z'|\leq|z+z'|+|z-z'|$.

حل. می‌بینیم که

$$۲|z'|=|۲z'|=|(z'-z)+(z'+z)|\leq|z+z'|+|z-z'|$$

به همین ترتیب،

$$۲|z|\leq|z+z'|+|z-z'|$$

از جمع دو نابرابری بالا، نابرابری خواسته شده به دست می‌آید.

● **پرسش** تعبیر هندسی این مسأله چیست؟

۱۴. اگر a و b دو عدد مختلط باشند، ثابت کنید که $|a-b| = |1-\overline{a}b|$ اگر و تنها اگر $|a|=1$ یا $|b|=1$. به ازای کدام مقدارهای a و b داریم $|a-b| < |1-\overline{a}b|$؟

حل. با توجه به $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$ داریم

$$\begin{aligned}|a-b| = |1-\overline{a}b| &\Leftrightarrow |a-b|^2 = |1-\overline{a}b|^2\\ &\Leftrightarrow |a|^2+|b|^2 = 1+|a|^2|b|^2\\ &\Leftrightarrow (|a|^2-1)(1-|b|^2)=0\\ &\Leftrightarrow |a|=1 \text{ یا } |b|=1\end{aligned}$$

استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $|a-b| < |1-\overline{a}b|$ اگر و تنها اگر «$|a|>1$ و $|b|>1$» یا «$|a|<1$ و $|b|<1$».

۱۵. سه عدد مختلط z_1، z_2 و z_3 به گونه‌ای هستند که $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ و $z_1+z_2+z_3=0$. ثابت کنید که z_1، z_2 و z_3 سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

حل. در حقیقت، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}z_1+z_2+z_3=0 &\Rightarrow z_3 = -(z_1+z_2)\\ &\Rightarrow |z_3|^2 = |z_1+z_2|^2\\ &\Rightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) = -1\\ &\Rightarrow |z_1-z_2|^2 = 3 \Rightarrow |z_1-z_2| = \sqrt{3}\end{aligned}$$

به همین ترتیب داریم $|z_2-z_3| = |z_3-z_1| = \sqrt{3}$ و کار تمام می‌شود.

۱۶. عدد مختلط ناصفر $w=u+iv$ داده شده است. نشان دهید که معادلهٔ $z^2=w$ دقیقاً دو جواب متمایز دارد و آنها را بیابید.

حل. اگر z یک جواب معادله باشد، آشکارا $-z$ نیز یک جواب آن است و اینکه $-z \neq z$ (چرا؟). از این گذشته، معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، پس بیش از دو جواب ندارد. می‌ماند اینکه نشان دهیم این معادله دست کم یک جواب دارد.

فرض کنیم $a+ib$ یک جواب معادله باشد. در این صورت

$$(a+ib)^2 = w \Rightarrow a^2-b^2+2iab = w \;,\; a^2+b^2 = |w|$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2-b^2 = u\\ a^2+b^2 = |w|\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2 = \frac{|w|+u}{2}\\ b^2 = \frac{|w|-u}{2}\end{cases}$$

قرار می‌دهیم

$$a = \left(\frac{|\, w \,| + u}{۲}\right)^{۱/۲} \quad , \quad b = \left(\frac{|\, w \,| - u}{۲}\right)^{۱/۲}$$

(یک) فرض کنیم $v \geq ۰$. در این وضع، با فرض $z = a + ib$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} z^۲ &= \frac{|\, w \,| + u}{۲} - \frac{|\, w \,| - u}{۲} + i\sqrt{|\, w \,|^۲ - u^۲} \\ &= u + i.|\, v \,| = u + iv = w \end{aligned}$$

پس z یک جواب معادله است.

(دو) فرض کنیم $v < ۰$. در این وضع، با فرض $\xi = a - ib$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \xi^۲ &= \frac{|\, w \,| + u}{۲} - \frac{|\, w \,| - u}{۲} - i\sqrt{|\, w \,|^۲ - u^۲} \\ &= u - i.|\, v \,| = u + iu = w \end{aligned}$$

پس ξ یک جواب معادله است.

به این ترتیب، به ازای $v \geq ۰$ جواب‌های معادله عبارت‌اند از $\pm(a + ib)$. اگر $v < ۰$، جواب‌ها عبارت‌اند از $\pm(a - ib)$.

● **تذکر**. برای یافتن جواب‌های معادلهٔ کلی $z^n = w$ که در آن $n \in \mathbb{N}$، شمارهٔ ۲۹.۹ (در فصل ۹) را ببینید.

۱۷. فرض کنیم a و b دو نقطهٔ متمایز در $\mathbb{R}^n$ باشند. «مکان هندسی» xهایی متعلق به $\mathbb{R}^n$ را بیابید که در رابطهٔ $\|x - a\| = ۲\|x - b\|$ صدق کنند.

حل. می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \|x - a\| = ۲\|x - b\| &\Leftrightarrow \|x - a\|^۲ = ۴\|x - b\|^۲ \\ &\Leftrightarrow \|x\|^۲ - ۲\left(x \middle| \frac{۴b - a}{۳}\right) + \frac{۴\|b\|^۲ - \|a\|^۲}{۳} = ۰ \\ &\Leftrightarrow \left\|x - \frac{۴b - a}{۳}\right\|^۲ - \frac{\|۴b - a\|^۲}{۹} + \frac{۴\|b\|^۲ - \|a\|^۲}{۳} = ۰ \\ &\Leftrightarrow \left\|x - \frac{۴b - a}{۳}\right\| = \frac{۲}{۳}\|b - a\| \end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم $c = \frac{۴b - a}{۳}$ و $r = \frac{۲}{۳}\|b - a\|$، آنگاه مکان خواسته شده عبارت می‌شود از مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c\| = r\}$$

● **تذکر**. به طورکلی اگر $\lambda > ۰$ و $\lambda \neq ۱$، آنگاه نقطه‌ای مانند $c \in \mathbb{R}^n$ و عـددی مانـند $r > ۰$ وجـود دارنـد بـه طـوری کـه مکـان هندسـی xهـایی متعلـق بـه $\mathbb{R}^n$ کـه در رابطـهٔ $\|x-b\| \lambda = \|x-a\|$ صدق می‌کنند عبارت است از مجموعهٔ

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x-c\| = r\}$$ [۱]

به ازای $n = ۳$ و $n = ۲$، مکان این xها به ترتیب کره و دایرهٔ به مرکز c و شعاع r است.

۱۸. اگر x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند، ثابت کنید که

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲ \leq \frac{x^۲+y^۲}{۲} \quad , \quad \left(\frac{x+y}{۲}\right)^۴ \leq \frac{x^۴+y^۴}{۲} \quad , \quad \left(\frac{x+y}{۲}\right)^۸ \leq \frac{x^۸+y^۸}{۲}$$

حل. تنها نابرابری یکم را ثابت می‌کنیم، زیرا دو نابرابری دیگر بی‌درنگ از آن نتیجه مـی‌شـوند. می‌بینیم که

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲ \leq \frac{x^۲+y^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \leq x^۲+y^۲ \Leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$$

● **تذکر**. تعریف ۱ و فرع ۱۳ در پیوست فصل ۵ را نیز ببینید.

۱۹. اگر دو عدد حقیقی دلخـواه x و y بـه گونـه‌ای باشـند کـه $x+y \geq ۰$، آنگـاه بـه ازای هـر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{۲}$$

حل. فرض کنیم این نابرابری به ازای k برقرار باشد. همواره می‌تـوان فـرض کـرد کـه $y \leq x$. پس $|y| \leq x$ و از این‌رو،

$$x^{k+۱}+y^{k+۱}-xy^k-yx^k = (x-y)(x^k-y^k) \geq ۰$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{۲}\right)^{k+۱} &= \left(\frac{x+y}{۲}\right)^k \cdot \frac{x+y}{۲} \\ &\leq \frac{x^k+y^k}{۲} \cdot \frac{x+y}{۲} \\ &= \frac{x^{k+۱}+y^{k+۱}+x^ky+y^kx}{۴} \leq \frac{x^{k+۱}+y^{k+۱}}{۲}\end{aligned}$$

اکنون استقرای ریاضی را به کار می‌بریم.

۱- یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$c = \frac{\lambda^۲ b - a}{\lambda^۲ - ۱} \quad , \quad r = \frac{\lambda}{\lambda^۲-۱} \cdot \|b-a\|$$

۲۰. عددهای حقیقی $h > ۱$ و $b > ۰$ داده شده‌اند. در این صورت عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری‌که $h^n > b$.

حل. فرض کنیم به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $h^n \leq b$. عددی مانند $\alpha > ۰$ هست به طوری که $h = ۱ + \alpha$. در این صورت با توجه به نابرابری برنولی، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۱$ داریم

$$۱ + n\alpha \leq (۱ + \alpha)^n = h^n \leq b \;\Rightarrow\; n \leq \frac{b - ۱}{\alpha}$$

و این هم تناقض است (زیرا $\mathbb{N}$ از بالا کراندار نیست).

۲۱. عدد حقیقی x به گونه‌ای است که $۱ + x \geq ۰$. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n داریم

$$(۱ + x)^{۱/n} \leq ۱ + x \,/\, n$$

از این گذشته، $\leq$ به $=$ تبدیل می‌شود اگر و تنها اگر $x = ۰$ یا $n = ۱$.

حل. قرار می‌دهیم $\alpha = x \,/\, n$. در این صورت $۱ + \alpha \geq ۰$. پس با استفاده از نابرابری برنولی داریم $(۱ + \alpha)^n \geq ۱ + n\alpha$ و از این رو، $(۱ + n\alpha)^{۱/n} \leq ۱ + \alpha$ یا $(۱ + x)^{۱/n} \leq ۱ + x \,/\, n$.

● این مسأله را با نابرابری برنولی مقایسه کنید.

۲۲. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $۰ < a < ۱$، ثابت کنید که $(۱ - a)^n < \dfrac{۱}{۱ + na}$.

حل. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $۱ + a < \dfrac{۱}{۱ - a}$. پس نابرابری به ازای $n = ۱$ برقرار است. به ازای $n \geq ۲$، با توجه به مسألهٔ قبل داریم

$$(۱ + na)^{۱/n} < ۱ + a < \frac{۱}{۱ - a} \;\Rightarrow\; ۱ + na < \frac{۱}{(۱ - a)^n}$$
$$\Rightarrow\; (۱ - a)^n < \frac{۱}{۱ + na}$$

۲۳. اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند و $n \in \mathbb{N}$، ثابت کنید که

$$\sqrt[n]{a + b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

برای برابری، شرط لازم و کافی آن است که $a = ۰$ یا $b = ۰$.

حل. قرار می‌دهیم $\sqrt[n]{a} = \alpha$ و $\sqrt[n]{b} = \beta$. در این صورت

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})^n = a + \sum_{k=۱}^{n-۱} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k + b \geq a + b$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{a + b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

۲۴. اگر x و y دو عدد حقیقی نامنفی باشند و $n \in \mathbb{N}$، ثابت کنید که

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| \leq \sqrt[n]{|\,x-y\,|}$$

حل. فرض کنیم $x \geq y$. با استفاده از مسألهٔ قبل داریم

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{(x-y)+y} \leq \sqrt[n]{x-y} + \sqrt[n]{y}$$

۲۵. عدد حقیقی α به ازای هر عدد طبیعی n در نابرابری‌های $(۱+۱/n)^n < \alpha < ۳$ صدق می‌کند. ثابت کنید که به ازای هر $n \geq ۱$ داریم $n! > (n/\alpha)^n$ و سپس نتیجه بگیرید که $۳۰۰! > ۱۰۰^{۳۰۰}$.

حل. فرض کنیم نابرابرای بالا به ازای k برقرار باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}(k+۱)! &= (k+۱)\cdot k!\\ &> (k+۱)\cdot(k/\alpha)^k\\ &= \Big(\frac{k+۱}{\alpha}\Big)^{k+۱}\cdot\frac{\alpha}{\big(۱+۱/k\big)^k}\\ &> \Big(\frac{k+۱}{\alpha}\Big)^{k+۱}\end{aligned}$$

اکنون استقرای ریاضی را به کار می‌بریم.

از سوی دیگر، با توجه به $\alpha < ۳$ داریم

$$۳۰۰! > \Big(\frac{۳۰۰}{\alpha}\Big)^{۳۰۰} > \Big(\frac{۳۰۰}{۳}\Big)^{۳۰۰} = ۱۰۰^{۳۰۰}$$

۲۶. عددهای حقیقی مثبت $a_۱$، $\cdots$ ،a_n داده شده‌اند. فرض کنیم $b_۱$، $\cdots$ ،b_n یک بازآرایش دلخواه aها باشد. ثابت کنید که $\frac{a_۱}{b_۱} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$. همچنین، ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای برابری این است که آرایش آغازین aها عوض نشود.

حل. روشن است که $\Big(\frac{a_۱}{b_۱}\Big)\Big(\frac{a_۲}{b_۲}\Big)\ldots\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big) = ۱$. اکنون کافی است نابرابری III در پیوست را به کار ببریم. از این گذشته، می‌بینیم که $\frac{a_۱}{b_۱} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = n$ اگر و تنها اگر $a_۱/b_۱ = \ldots = a_n/b_n = ۱$ یا $a_۱ = b_۱$، $\cdots$ ،$a_n = b_n$.

۲۷. دو عدد مثبت متمایز a و b داده شده‌اند. ثابت کنید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$$

حل. کافی است نابرابری هندسی - حسابی را به کار ببریم.

۲۸. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید که

(یک) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

(دو) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

حل. **(یک)** کافی است در مسألهٔ قبل قرار دهیم $a=1$ و $b = 1+1/n$.

(دو) قرار می‌دهیم

$$x_0 = 1 \ , \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1+1/n$$

در این صورت با توجه به نابرابری همساز – هندسی داریم

$$\frac{n+2}{1+\frac{n+1}{1+1/n}} < \sqrt[n+2]{(1+1/n)^{n+1}} \Rightarrow \frac{n+2}{n+1} < \sqrt[n+2]{(1+1/n)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

● **تذکر**. چون به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ آشکارا داریم

$$(1+1/n)^n < (1+1/n)^{n+1}$$

پس به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$،

$$(1+1/m)^m < (1+1/n)^{n+1}$$

(چرا ؟). به سخن دیگر، اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهیم

$$x_n = (1+1/n)^n \qquad , \quad y_n = (1+1/n)^{n+1}$$

آنگاه

$$x_1 < x_2 < \ldots < \ldots < y_2 < y_1$$

(چرا؟) و از این‌رو، $\sup_{n\geq 1} x_n = \inf_{n \geq 1} y_n$ (چرا ؟).

۲۹. دو عدد گویای $\beta > \alpha > 0$ داده شده‌اند. ثابت کنید که

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha < \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^\beta$$

حل. با توجه به نابرابری V در پیوست، داریم

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot 1^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} < \frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{\beta-\alpha}{\beta}\cdot 1$$
$$=1+\frac{1}{\beta}$$

بنابراین، $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < \left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}$

۳۰. اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند و $\gamma > 0$، آنگاه

$$\frac{|a+b|}{1+\gamma|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+\gamma|a|}+\frac{|b|}{1+\gamma|b|}$$

حل. نخست فرض کنیم α و β دو عدد حقیقی نامنفی باشند. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $\alpha \leq \beta$ اگر و تنها اگر $\frac{\alpha}{1+\gamma\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\gamma\beta}$. اکنون با فرض $\alpha = |a+b|$ و $\beta = |a|+|b|$ می‌بینیم که

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$
$$\Rightarrow \frac{|a+b|}{1+\gamma|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+\gamma|a|+\gamma|b|}$$
$$= \frac{|a|}{1+\gamma|a|+\gamma|b|}+\frac{|b|}{1+\gamma|a|+\gamma|b|}$$
$$\leq \frac{|a|}{1+\gamma|a|}+\frac{|b|}{1+\gamma|b|}$$

تمرین‌ها

۱. اگر $A=\left\{\frac{1000^n}{n!}: n\in\mathbb{N}\right\}$، $\sup A$ و $\inf A$ را بیابید. آیا A ماکسیموم و مینیموم دارد؟

۲. اگر $A=\{2^{-m}+3^{-n}+5^{-p} : m,n,p\in\mathbb{N}\}$، $\sup A$ و $\inf A$ را بیابید. آیا A ماکسیموم و مینیموم دارد؟

۳. فرض کنیم a و b دو عدد طبیعی باشند. ثابت کنید که $\sqrt{2}$ همواره بین دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{a+2b}{a+b}$ قرار دارد. کدام یک از این دو کسر به $\sqrt{2}$ نزدیکتر است؟

۴. ثابت کنید که $\sin 20^\circ$ عددی گنگ است.

۵. ثابت کنید که $\log_{10} 7$ عددی گنگ و در حقیقت، عددی متعالی است. (**راهنمایی:** برای اثبات گزارهٔ دوم مسأله، قضیهٔ گلفاند –اشنایدر را به کار ببرید.)

۶. فرض کنیم $\alpha\in\mathbb{Q}^c$ و $n\in\mathbb{N}$. نشان دهید که

$$\exists p_n\in\mathbb{Z}, q_n\in\mathbb{N} : |\alpha-p_n/q_n|<1/nq_n$$

همچنین، نشان دهید که عدد q_n را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که

$$|\alpha-p_n/q_n|<1/q_n^2$$

۷. فرض کنیم $x\in\mathbb{R}$. نشان دهید که

$$\tan(x/2)\in\mathbb{Q} \Leftrightarrow \cos x\ ,\ \sin x\in\mathbb{Q}$$

۸. اگر عددهای حقیقی مثبت a، b و c طول‌های سه ضلع یک مثلث باشند، ثابت کنید که عددهای $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ نیز طول‌های سه ضلع یک مثلث هستند. آیا عکس این گزاره هم درست است؟

۹. اگر a یک ریشهٔ معادلهٔ $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ باشد، ثابت کنید که $|a|<1+|a_1|+\ldots+|a_n|$.

۱۰. اگر a_1، $\cdots$، a_{n-1}، $n\geq 2$، عددهایی صحیح باشند، شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x=-1$$

جواب گویا داشته باشد چیست؟

۱۱. تابع $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ در معادلهٔ تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق می‌کند. نشان دهید که یک و تنها یکی از سه گزارهٔ زیر درست است.

(یک) f تابع ثابت $-\infty$ است.

(دو) f تابع ثابت ∞ است.

(سه) به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $f(x)\in\mathbb{R}$.

۱۲. همهٔ zهای مختلطی را بیابید که در برابری‌های $|z|=|۱-z|=|۱/z|$ صدق می‌کنند.

۱۳. همهٔ zهای مختلطی را بیابید به طوری که نقطه‌های i، z و iz بر یک خط راست قرار گیرند.

۱۴. دستگاه معادله‌های $|z+۱|=|z-i|$ و $|z-۲|=|z+i|$ را حل کنید.

۱۵. اگر $z\in\mathbb{C}$ و $|z|=۱$، ثابت کنید که $|z+۱|\ge ۱$ یا $|z^۲+۱|\ge ۱$.

۱۶. به ازای هر سه عدد مختلط دلخواه a، b و c ثابت کنید که

$$|a+b|+|b+c|+|c+a|\le |a|+|b|+|c|+|a+b+c|$$

۱۷. ثابت کنید که به ازای هر $z\in\mathbb{C}$ داریم $|۲z+۱|\ge ۱$ یا $|z^۲+z+۱|\ge ۱$.

۱۸. عددهای حقیقی $a_۱$ ، … ، a_n و عددهای حقیقی مثبت $b_۱$ ، … ، b_n داده شده‌اند. اگر قرار دهیم

$$m=\min\{a_k/b_k:۱\le k\le n\}\quad,\quad M=\max\{a_k/b_k:۱\le k\le n\}$$

ثابت کنید که

$$m\le\frac{a_۱+\ldots+a_n}{b_۱+\ldots+b_n}\le M$$

۱۹. اگر $n\in\mathbb{N}$، $n\ge ۲$ و

$$۰<\alpha_۱<\alpha_۲<\ldots<\alpha_n<\pi/۲$$

ثابت کنید که

$$\tan\alpha_۱<\frac{\sin\alpha_۱+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_۱+\ldots+\cos\alpha_n}<\tan\alpha_n$$

۲۰. عددهای حقیقی $x_۱$، …، x_n به گونه‌ای هستند که

(الف) به ازای هر $۱\le i\le n$، $۱+x_i\ge ۰$ و

(ب) به ازای هر $۱\le i\le n$، $x_i\ge ۰$ (یا به ازای هر $۱\le i\le n$، $x_i\le ۰$).

ثابت کنید که

$$(1+x_1)\ldots(1+x_n) \geq 1+x_1+\ldots+x_n$$

و سپس نابرابری برنولی را نتیجه بگیرید.

۲۱. اگر $n > 3$ عددی طبیعی باشد، ثابت کنید که $\sqrt[n]{2} - 1 > \frac{1}{n+1}$.

۲۲. اگر $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد، ثابت کنید که $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

۲۳. عدد طبیعی n و عدد حقیقی a به گونه‌ای هستند که $0 < a < 1/n$. ثابت کنید که $(1+a)^n < \frac{1}{1-na}$.

۲۴. فرض کنیم $a_1 \leq \ldots \leq a_n$ و $b_1 \leq \ldots \leq b_n$ عددهایی حقیقی باشد. در این صورت

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}$$

شرط لازم و کافی برای برابری این است که $a_1 = \ldots = a_n$ یا $b_1 = \ldots = b_n$.

۲۵. به ازای $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید که

(یک) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}$

(دو) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$

(سه) اگر $n \geq 2$، آنگاه

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < n(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1})$$

۲۶. ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی $x > 0$ و هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$$

به ازای کدام xها $\leq$ به $=$ تبدیل می‌شود؟

۲۷. اگر عددهای a_1، ...، a_n، b_1، ...، b_n مثبت باشند، ثابت کنید که

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1+\ldots+a_n} + \sqrt[n]{b_1+\ldots+b_n}$$

۲۸. فرض کنیم $x > 1$ یک عدد حقیقی دلخواه و m و n، $m < n$، دو عدد طبیعی دلخواه باشند. ثابت کنید که

$$n(\sqrt[n]{x} - 1) < m(\sqrt[m]{x} - 1) < x - 1$$