فهرست

پیشگفتار .... شش

فصل ۰. پیشنیازها ۱

نمادگذاری ۱

گروه متقارن درجهٔ n ۲

حلقهٔ چندجمله‌ای‌های یک متغیره ۴

تابع چندجمله‌ای ۷

صفرهای چندجمله‌ای‌ها ۸

فرمول درونیابی لاگرانژ ۹

مشتق چندجمله‌ای‌ها ۹

رابطه‌های موجود بین ضریب‌ها و ریشه‌ها ۱۱

کسرهای گویای یک متغیره ۱۲

اصل موضوع انتخاب و چند بیان هم‌ارز با آن ۱۳

تمرینات ۱۶

فصل ۱ . ماتریس‌ها ۱۷

تعریف‌ها ۱۷

عمل‌های جبری بر ماتریس‌ها ۱۹

ترانهاد ماتریس‌ها ۲۴

ماتریس‌های وارون‌پذیر ۲۹

دترمینان ۳۲

دستور لاپلاس برای محاسبهٔ دترمینان ۳۸

ماتریس الحاقی کلاسیک ۴۳

یکاهای ماتریسی ۴۶

اثر ماتریس‌های مربعی ۴۸

ماتریس‌های متشابه ۵۱

عمل‌های مقدماتی بر ماتریس‌ها ۵۲

صورت نرمال ماتریس‌ها ۵۹

چند مسألهٔ حل شده ۶۲

تمرینات ۷۸

فصل ۲. دستگاه‌های معادله‌های خطی ۸۱
تعریف‌ها ۸۱
روش حذفی گاوس برای حل دستگاه‌ها ۸۳
دستور کرامر برای حل دستگاه ۸۵
چند مسألهٔ حل شده ۸۷
تمرینات ۹۳

فصل ۳. فضاهای برداری ۹۵
تعریف‌ها ۹۵
زیرفضاهای برداری ۹۷
پایه و بعد ۱۰۲
مجموع مستقیم زیرفضاها ۱۱۱
فضای سطری ماتریس‌ها ۱۱۳
رتبهٔ دترمینانی ماتریس‌ها ۱۲۲
کاربرد دیگری از صورت سطری متعارف ماتریس‌ها ۱۲۵
تعویض مختصات ۱۲۷
حاصلضرب دکارتی فضاهای برداری ۱۳۰
فضای برداری خارج قسمت ۱۳۱
زیرفضاهای برداری ماکسیمال ۱۳۳
جهتدهی فضاهای برداری حقیقی متناهی – بعد ۱۳۴
پیوست فصل ۳. اثبات چند قضیه، جواب‌های پایهٔ دستگاه، چند فرمول «شمارشی»،
مجموعه‌های محدب و آفین، نقطهٔ رأسی ۱۳۷
چند مسألهٔ حل شده ۱۴۹
تمرینات ۱۶۵

فصل ۴. تبدیل‌های خطی ۱۷۱
تعریف‌ها ۱۷۱
قاعدهٔ کلی برای ساختن تبدیل‌های خطی ۱۷۸
چند قضیه دربارهٔ رتبهٔ تبدیل‌های خطی ۱۸۱
ماتریس نمایش تبدیل خطی ۱۸۵
فضای دوگان ۱۹۰
پوچساز ۱۹۵
فضای دوگان دوم ۲۰۰
زیرفضاهای $T-$ناوردا ۲۰۲
$T-$ناوردایی و خود – توانی ۲۰۶
پیوست فصل ۴. تابع آفین، ترانهاد تبدیل‌های خطی، دو فرمول «شمارشی» ۲۰۹
چند مسألهٔ حل شده ۲۱۵
تمرینات ۲۳۸

فصل ۵. فضاهای با ضرب داخلی ۲۴۱
تعریف‌ها ۲۴۱
ماتریس نمایش ضرب داخلی ۲۴۳
نرم وابسته به ضرب داخلی ۲۴۵
مجموعه‌های متعامد ۲۴۷
فرایند (یکا) متعامدسازی گرام ــ اشمیت ۲۵۲
متمم ــ متعامد ۲۵۴
ضرب داخلی متعارف بر $\mathbb{K}^n$ و ماتریس‌ها ۲۵۶
ضرب داخلی و عملگرهای خطی ۲۵۹
عملگر الحاقی ۲۶۲
پیوست فصل ۵. ماتریس و دترمینان گرام ۲۷۱
چند مسألهٔ حل شده ۲۷۵
تمرینات ۲۹۰

فصل ۶. صورت‌های متعارف ۲۹۳
تعریف‌ها ۲۹۳
چندجمله‌ای مشخصه ۲۹۶
چندجمله‌ای مینیمال ۳۰۵
قضیهٔ کیلی ــ همیلتون ۳۱۰
عملگرهای خطی و ماتریس‌های قطری ــ شدنی ۳۱۲
ماتریس وارون‌پذیر قطری ــ ساز ۳۱۷
قطری ــ سازی عملگرهای خطی ارمیتی ۳۱۸
قطری ــ سازی همزمان ۳۲۱
عملگرهای خطی و ماتریس‌های مثلثی ــ شدنی ۳۲۲
مثلثی ــ سازی همزمان ۳۲۵
پیوست فصل ۶. $t-$ماتریس‌ها، صورت متعارف ژوردان، قضیهٔ تجزیهٔ بنیادی، آنالیز ماتریسی ۳۲۷
چند مسألهٔ حل شده ۳۵۴
تمرینات ۳۷۳
کتابنامه ۳۷۷
فهرست راهنما ۳۷۹
پیوست ۱. مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۳۸۵
پیوست ۲. پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای ۴۴۳
مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای سال ۱۳۹۵ .... ۴۹۷
مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای دکتری سال ۱۳۹۶ .... ۵۲۳
مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای جبر خطی کارشناسی ارشد ریاضی سال ۱۳۹۶ .... ۵۲۶

پیشگفتار

کتابی که پیش روی خواننده قرار دارد بر پایهٔ برنامهٔ آموزشی و سرفصل‌های «جدید» وزارت علوم، تحقیقات و فناوری تدوین و تنظیم شده است. در عین حال، در فصل‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ مطالبی کم و بیش فراتر گنجانده شده‌اند چرا که به باور نگارنده، بسیاری از اینها موارد و مفاهیمی هستند که هر دانشجوی مخاطب جبر خطی الزاماً باید بیاموزد. نباید تصور کرد که جبر خطی در نهایت خلاصه می‌شود به انجام تعدادی محاسبهٔ جبری با ماتریس‌ها. برعکس، بسیاری از مفاهیم و ساختارها در شاخه‌های ریاضی را نه فقط بدون کمک جبر خطی نمی‌توان بیان کرد، بلکه روشن ساختن زوایای پنهان آنها نیز بدون یاری گرفتن از جبر خطی ناممکن است.

روح کلی حاکم بر نگارش این کتاب و روش ارائهٔ مطالب، همانند الگویی است که پیشتر در کتاب «مبانی آنالیز ریاضی»، انتشارات پوران پژوهش، به کار برده‌ام و خواننده را به مطالعهٔ پیشگفتار آن ارجاع می‌دهم.

چون یکی از هدف‌های اصلی این کتاب، آماده‌سازی دانشجویان برای کنکور کارشناسی ارشد و دکتری است (البته در گرایش‌هایی که جبر خطی یکی از مواد امتحانی آنهاست) پرسش‌های چهارگزینه‌ای و پاسخ‌های تشریحی آنها از سال ۱۳۷۴ به بعد (و برای دکتری از سال ۱۳۹۱ به بعد) به صورت دو پیوست در پایان کتاب آورده شده‌اند.

در اینجا لازم می‌دانم به سبب تشویق‌های گرم و صمیمانهٔ همیشگی مدیریت انتشارات پوران پژوهش، آقای دکتر احمد هژبر و سرکار خانم افسانه عبدی، برای تألیف این کتاب سپاس و امتنان خود را ابراز دارم. زحمات مدیر محترم تولید، آقای حسین رحیمی، و دقت و ظرافت وصف‌ناپذیر تایپیست محترم، سرکار خانم طاهره خسروی، شایستهٔ تقدیر ویژه هستند.

محمدعلی رضوانی
بهار ۱۳۹۴

فصل ۱ ماتریس‌ها

۱.۱ تعریف. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند. در این صورت هر تابع مانند
$$A : J_m \times J_n \to \mathbb{K}$$
را[1] یک **ماتریس** $m \times n$ (بخوانید: m در n) می‌نامیم. هر مقدار A را یک **درایه** یا یک **عنصر** A می‌نامیم. درایهٔ متناظر با (i, j) یعنی $A(i, j)$ را معمولاً با a_{ij} (یا گاهی با A_{ij}) نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $A = (a_{ij})$. نماد $m \times n$ یا جفت مرتب (m, n) را **اندازهٔ** ماتریس A می‌نامیم.

ماتریس‌ها را اغلب با حرف‌های بزرگ و درایه‌هایشان را با حرف‌های کوچک (همنام) در الفبای لاتین نشان می‌دهیم.

۲.۱ نمایش ماتریس با آرایه. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times n$ باشد. در این صورت، ماتریس A را با آرایه‌ای مستطیلی نیز که از m سطر و n ستون تشکیل شده و درایهٔ a_{ij} در نقطهٔ برخورد سطر iام و ستون jام واقع شده است نشان می‌دهیم:
$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
آرایهٔ بالا را گاهی **صورت گسترده** و نماد $A = (a_{ij})$ را **صورت فشردهٔ** ماتریس A می‌نامیم.

---

۱. که در آن به ازای هر $p \in \mathbb{N}$ داریم $J_p = \{۱, \ldots, p\}$.

۳.۱ قرارداد. اگر A ماتریسی ۱×۱ مانند $[a]$ (که در آن $a \in \mathbb{K}$) باشد معمولاً می‌نویسیم $[a] = a$، یعنی ماتریس $[a]$ را با اسکالر a «یکی می‌گیریم».

۴.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times n$ باشد. می‌گوییم A

(الف) ماتریسی **سطری** (یا به اختصار، یک **سطر**) است هرگاه $m = ۱$.

(ب) ماتریسی **ستونی** (یا به اختصار، یک **ستون**) است هرگاه $n = ۱$.

(پ) ماتریسی **مربعی** است هرگاه $m = n$. در این حالت، گاهی می‌گوییم A یک ماتریس (مربعی) **مرتبهٔ** n است.

(ت) ماتریس **صفر** است هرگاه همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. برای نشان دادن ماتریس صفر، اغلب نماد O را به کار می‌بریم.

۵.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times n$ باشد. در این صورت ماتریس‌های سطری

$$R_۱ = [a_{۱۱} \ \ a_{۱۲} \ \dots \ a_{۱n}] , \dots , R_m = [a_{m۱} \ \ a_{m۲} \ \dots \ a_{mn}]$$

را **سطرهای** A و ماتریس‌های ستونی

$$C_۱ = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}, \dots , C_n = \begin{bmatrix} a_{۱n} \\ a_{۲n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

را **ستون‌های** A می‌نامیم و گاهی برای نشان دادن A یکی از نمادهای

$$A = \begin{bmatrix} R_۱ \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \quad , \quad A = [C_۱ \ \dots \ C_n]$$

را به کار می‌بریم.

۶.۱ قرارداد. اگر C یک ماتریس ستونی $m \times ۱$ با درایه‌های، به ترتیب از بالا به پایین، $c_۱$، ... ، c_m باشد، آنگاه (هر جا لازم باشد) برای سهولت می‌نویسیم

$$C = (c_۱ , \dots , c_m)$$

۷.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد. در این صورت

(الف) درایه‌های $a_{۱۱}$، ... ، a_{nn} را **درایه‌های قطر اصلی** یا **درایه‌های قطری** A می‌نامیم.

(ب) اگر درایه‌های قطری A همگی ۱ و درایه‌های دیگر همگی صفر باشند، A را **ماتریس یکه** (ی $n \times n$) می‌نامیم و آن را با نماد I یا I_n نشان می‌دهیم. پس با توجه به تعریف «δی کرونکر» داریم

$$I_n = I = (\delta_{ij})$$

معمولاً ستون‌های ماتریس یکه را (از چپ به راست) با

$$e_1, \ldots, e_n$$

و سطرهای آن را (از بالا به پایین) با

$$e_1^t, \ldots, e_n^t$$

نشان می‌دهیم.

۸.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $n \times n$ باشد. می‌گوییم A

(الف) بالا - مثلثی است هرگاه به ازای هر دو اندیس $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. به سخن دیگر، هرگاه همهٔ درایه‌های «زیر» قطر اصلی صفر باشند. اگر به ازای هر دو اندیس $i \geq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$، می‌گوییم A **اکیداً بالا - مثلثی** است.

تعریف مشابهی هم برای ماتریس **پایین - مثلثی** و **اکیداً پایین - مثلثی** داریم.

(ب) مثلثی است هرگاه A بالا - مثلثی یا پایین - مثلثی باشد. ماتریس اکیداً مثلثی نیز به طور مشابهی تعریف می‌شود.

(پ) قطری است هرگاه هم بالا - مثلثی باشد و هم پایین - مثلثی. به سخن دیگر، هرگاه به ازای هر دو اندیس $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. پس صورت گستردهٔ ماتریس قطری عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری بالا را اغلب با نماد $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ نشان می‌دهیم.

(ت) اسکالر است هرگاه A قطری بوده و همهٔ درایه‌های قطری آن برابر باشند.

۹.۱ نمادگذاری. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های $m \times n$ را با $\mathcal{M}_{mn}$ نشان می‌دهیم. اگر $m = n$، به جای $\mathcal{M}_{nn}$ نماد $\mathcal{M}_n$ را به کار می‌بریم.

می‌گوییم ماتریس $A = (a_{ij})$ **حقیقی** است هرگاه درایه‌های آن حقیقی باشند. در این وضع، نماد $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ را نیز به کار می‌بریم.

عمل‌های جبری بر ماتریس‌ها

۱۰.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ باشند (یعنی $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$). می‌گوییم A و B **برابرند** و می‌نویسیم $A = B$ هرگاه به ازای هر دو اندیس i

و j داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$.[۱]

۱۱.۱ تعریف جمع و ضرب اسکالر در $\mathcal{M}_{mn}$. فرض کنیم $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ در $\mathcal{M}_{mn}$ باشند و $\alpha\in\mathbb{K}$. در این صورت **مجموع** A و B را با $A+B$ و **حاصلضرب** α و A را با αA نشان می‌دهیم و آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \quad , \quad \alpha A=(\alpha a_{ij})$$

روشن است که $\alpha A=O$ اگر و فقط اگر $\alpha=0$ یا $A=O$.

۱۲.۱ قضیه. فرض کنم A، B و C در $\mathcal{M}_{mn}$ و α، β و γ سه اسکالر باشند. در این صورت

۱. $A+B=B+A$.

۲. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

۳. $A+O=A$

۴. $A+(-A)=O$ **که در آن،** $-A$ **یعنی ماتریس** $(-a_{ij})$.

۵. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

۶. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

۷. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

۸. $1.A=A$.

اثبات. اثبات آسان این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۱۳.۱ تعریف و نمادگذاری. اگر $A,B\in\mathcal{M}_{mn}$، آنگاه **تفاضل** A و B را با $A-B$ نشان می‌دهیم و آن را با رابطهٔ $A-B=A+(-B)$ تعریف می‌کنیم.

۱۴.۱ تعریف ضرب ماتریس‌ها. فرض کنیم $A=(a_{ij})$ ماتریسی $m\times n$ و $B=(b_{ik})$ ماتریسی $n\times p$ باشد. به ازای هر $1\le i\le m$ و هر $1\le k\le p$ قرار می‌دهیم

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{jk}$$

در این صورت ماتریس $C=(c_{ik})$، با اندازهٔ $m\times p$، را **حاصلضرب** A و B می‌نامیم و می‌نویسیم $C=AB$.

به سخن دیگر، برای یافتن (i,k)–درایهٔ AB باید

«عنصرهای سطر iام A را (با حفظ ترتیب) در عنصرهای ستون kام B (با حفظ ترتیب) ضرب و اسکالرهای به دست آمده را جمع کنیم».

---

۱. خواننده حق دارد ادعا کند که این تعریف، زائد است (چرا؟).

بدین سان، اگر A و B را به ترتیب برحسب سطرها و ستون‌هایشان بنویسیم، یعنی اگر

$$A = \begin{bmatrix} R_۱ \\ R_۲ \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \quad , \quad B = [C_۱ \ \ C_۲ \ \dots \ C_p]$$

آنگاه می‌بینیم که

$$AB = \begin{bmatrix} R_۱C_۱ & R_۱C_۲ & \dots & R_۱C_p \\ R_۲C_۱ & R_۲C_۲ & \dots & R_۱C_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_mC_۱ & R_mC_۲ & \dots & R_۱C_p \end{bmatrix}$$

۱۵.۱ قضیه. فرض کنیم A، B و C سه ماتریس باشند و $\alpha \in \mathbb{K}$. در این صورت

(الف) $(AB)C = A(BC)$.

(ب) $A(B+C) = AB + AC$.

(پ) $(B+C)A = BA + CA$.

(ت) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

اثبات. فقط (الف) را ثابت می‌کنیم و اثبات سه قسمت دیگر را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. فرض کنیم

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn} \quad , \quad B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np} \quad , \quad C = (c_{kl}) \in \mathcal{M}_{pq}$$

همچنین، فرض کنیم $D = AB = (d_{ik})$ که در آن $d_{ik} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{jk}$ و $E = BC = (e_{jl})$ که در آن $e_{jl} = \sum_{k=۱}^{p} b_{jk} c_{kl}$. سرانجام فرض کنیم $F = (AB)C = DC = (f_{il})$ و $G = A(BC) = AE = (g_{il})$ که در آنها

$$f_{il} = \sum_{k=۱}^{p} d_{ik}\, c_{kl} \quad , \quad g_{il} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\, e_{jl}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} f_{il} &= \sum_{k=۱}^{p} d_{ik}\, c_{kl} = \sum_{k=۱}^{p} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kl} \\ &= \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} \sum_{k=۱}^{p} b_{jk}\, c_{kl} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\, e_{jl} = g_{il} \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $F = G$ یعنی $(AB)C = A(BC)$. ■

۱۶.۱ تذکر. (**یک**) حتی اگر هر دو حاصلضرب AB و BA تعریف شده و هم‌اندازه هم باشند، باز هم نمی‌توان ادعا کرد که $AB = BA$. برای مثال، فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

● می‌گوییم دو ماتریس A و B **تعویض‌پذیرند** هرگاه $AB = BA$. روشن است که در این وضع A و B دو ماتریس مربعی هم - مرتبه هستند.

(**دو**) اگر $AB = O$، آنگاه نمی‌توان ادعا کرد که $A = ۰$ یا $B = O$. برای مثال، فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

(**سه**) اگر $A \neq O$ و $AB = AC$، آنگاه نمی‌توان ادعا کرد که $B = C$ یعنی قانون حذف از چپ در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. قانون حذف از راست هم برقرار نیست. (برای هر دو حالت مثال بیاورید.)

۱۷.۱ مثال. (**الف**) اگر

$$A = (x_۱ , x_۲ , \ldots , x_m) \quad , \quad B = [y_۱ \; y_۲ \; \ldots \; y_n]$$

که در آنها xها و yها اسکالر هستند، آنگاه

$$AB = \begin{bmatrix} x_۱y_۱ & x_۱y_۲ & \ldots & x_۱y_n \\ x_۲y_۱ & x_۲y_۲ & \ldots & x_۲y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_my_۱ & x_my_n & \ldots & x_my_n \end{bmatrix}$$

(**ب**) اگر سطر iام A صفر باشد، آنگاه سطر iام AB نیز صفر است. به همین ترتیب اگر ستون jام B صفر باشد، آنگاه ستون jام AB نیز صفر است. پس

$$A.O = O \quad , \quad O.A = O$$

(**پ**) فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_{mn}$. در این صورت با توجه به نمادهای ارائه شده در تعریف ۷.۱ داریم

$$Ae_j = A \text{ ستون } j\text{ام} \quad , \quad e_i^t A = A \text{ سطر } i\text{ام}$$

(چرا؟). بنابراین، $AI_n = A$ و $I_mA = A$.

(**ت**) فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_{mn}$. اگر به ازای هر ستون دلخواه X داشته باشیم $AX = O$، آنگاه $AX = O$. در حقیقت کافی است Xرا به ترتیب برابر با $e_۱$، ... ، e_n بگیریم و قسمت (پ) را به کار ببریم.

به طور مشابهی اگر به ازای هر سطر دلخواه Y داشته باشیم $YA = O$، آنگاه $A = O$.

(ث) فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$. در این صورت به ازای هر $1 \leq i \leq m$ و هر $1 \leq j \leq n$ داریم

$$e_i^t A \varepsilon_j = a_{ij}$$

که در آن، e_i^tها سطرهای I_m و ε_jها ستون‌های I_n هستند.

(ج) فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس بالا (پایین) مثلثی $n \times n$ باشند. در این صورت AB نیز بالا (پایین) مثلثی است و درایه‌های قطری آن عبارت‌اند از $a_{11} b_{11}$، ... ، $a_n b_n$ (چرا؟).

در حالت خاص،

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) . \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_n \mu_n)$$

(چ) اگر $A = [a_1 \ldots a_n]$ و B دارای سطرهای B_1، ... ، B_n باشد، آنگاه

$$AB = a_1 B_1 + \ldots + a_n B_n$$

همچنین، فرض کنیم D دارای ستون‌های D_1، ... ، D_n باشد و $C = (c_1, \ldots, c_n)$. در این صورت

$$DC = c_1 D_1 + \ldots + c_n D_n$$

(ح) دو ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$ و $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}$ به گونه‌ای هستند که مجموع درایه‌های هر سطر A برابر با r و مجموع درایه‌های هر سطر B برابر با s است. در این صورت مجموع درایه‌های هر سطر AB برابر است با rs.

در حقیقت اگر $AB = (c_{ik})$، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} b_{jk}) a_{ij} = s \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = sr$$

● **تذکر.** حکم مشابهی هم برای ستون‌ها داریم.

۱۸.۱ تعریف. فرض کنیم A ماتریسی مربعی باشد. توان‌های طبیعی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^1 = A \quad , \quad A^{n+1} = A^n . A \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

● **قرارداد.** اگر $A \neq O$، آنگاه قرار می‌دهیم $A^0 = I$.

۱۹.۱ تعریف. ماتریس مربعی A و چندجمله‌ای $f(X) = a_0 X^k + a_1 X^{k-1} + \ldots + a_{k-1} X + a_k$ مفروض‌اند. در این صورت $f(A)$ بنابر تعریف عبارت است از ماتریس

$$f(A) = a_0 A^k + a_1 A^{k-1} + \ldots + a_{k-1} A + a_k I$$

اگر $f(A) = O$، آنگاه می‌گوییم A یک **صفر (ماتریسیِ)** چندجمله‌ای $f(X)$ است.

۲۰.۱ مثال. **(یک)** اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad f(X) = X^{۲} - (a+d)X + ad - bc$$

آنگاه یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $f(A) = O$.

(دو) اگر $A = \operatorname{diag}(\lambda_{۱}, \ldots, \lambda_n)$ و $f \in \mathbb{K}[X]$، آنگاه یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$f(A) = \operatorname{diag}\left(f(\lambda_{۱}), \ldots, f(\lambda_n)\right)$$

پس در این حالت $f(A) = O$ اگر و فقط اگر هر λ یک صفر (اسکالرِ) چندجمله‌ای $f(X)$ باشد.

(سه) اگر $A = (a_{ij})$ ماتریسی بالا (پایین) مثلثی $n \times n$ باشد و $f(X) \in \mathbb{K}[X]$، آنگـاه $f(A)$ نیز بالا (پایین) مثلثی است و درایه‌های قطری آن عبارت‌اند از $f(a_{۱۱})$، ... ، $f(a_{nn})$ (چرا؟).

۲۱.۱ قضیه. ماتریس مربعی A، دو عدد صحیح نامنفی p و q و دو چندجمله‌ای $f(X)$ و $g(X)$ مفروض‌اند. در این صورت

(الف) $A^p . A^q = A^{p+q}$.

(ب) $(A^p)^q = A^{pq}$.

(پ) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$.

(ت) $(fg)(A) = f(A)\, g(A)$.

(ث) $f(A)g(A) = g(A)\, f(A)$.

(ج) اگر $f(X) = a(X - \lambda_{۱})\ldots(X - \lambda_k)$ که در آن a، $\lambda_{۱}$، ... ، λ_k اسکالر هستند، آنگاه

$$f(A) = a(A - \lambda_{۱} I) \ldots (A - \lambda_k I)$$

اثبات. اثبات آسان این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

ترانهاد ماتریس‌ها

۲۲.۱ تعریف. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی $m \times n$ باشد. در این صـورت **ترانهاد** A ماتریـسی $n \times m$ مانند (a'_{ji}) است که در آن به ازای هر $۱ \le i \le m$ و هر $۱ \le j \le n$ داریم $a'_{ji} = a_{ij}$. ترانهاد A را با نماد A^t نشان می‌دهیم.

به سخن دیگر، برای یافتن A^t جای سطرها و ستون‌های A را (با حفظ ترتیب) عوض می‌کنیم.

روشن است که $O^t = O$ و $I^t = I$.

۲۳.۱ قضیه. فرض کنیم A و B دو ماتریس باشند و $\alpha \in \mathbb{K}$. در این صورت

(الف) $(A^t)^t = A$.

(ب) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

(پ) $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(ت) $(AB)^t = B^t A^t$.

(ث) اگر A مربعی باشد و $f(t) \in \mathbb{K}[X]$، آنگاه $\big(f(A)\big)^t = f(A^t)$.

اثبات. فقط قسمت (ت) را ثابت می‌کنیم و اثبات قسمت‌های دیگر را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$، $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}$ و $AB = (c_{ik})$ که در آن

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \qquad , \qquad (1 \le i \le m \,, 1 \le k \le p)$$

از سوی دیگر، فرض کنیم $A^t = (a'_{ji})$، $B^t = (b'_{kj})$ و $B^t A^t = (d_{ki})$ که در آن

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji} \qquad , \qquad (1 \le k \le p \,, 1 \le i \le m)$$

اکنون با فرض $(AB)^t = (c'_{ki})$ که در آن $c'_{ki} = c_{ik}$، می‌بینیم که

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji}\, b'_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}\, a'_{ji} = d_{ki}$$

و از این رو، $(AB)^t = B^t A^t$. ■

۲۴.۱ تعریف. می‌گوییم ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ **متقارن** است هرگاه $A^t = A$ و می‌گوییم A **پادمتقارن** است هرگاه $A^t = -A$.

به سخن دیگر، A متقارن است هرگاه

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad , \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

و پاد متقارن است هرگاه

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad , \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

روشن است که اگر A پاد متقارن باشد، آنگاه درایه‌های قطری A صفر هستند. (چرا؟).

۲۵.۱ مثال. **(الف)** اگر $A \in \mathcal{M}_{mn}$، آنگاه ماتریس‌های AA^t و A^tA متقارن هستند.

(ب) اگر $A \in \mathcal{M}_n$، آنگاه $A + A^t$ متقارن و $A - A^t$ پادمتقارن است.

(پ) اگر دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ متقارن باشند، آنگاه $A + B$ و αA $(a \in \mathbb{K})$ نیز متقارن هستند. AB متقارن است اگر و فقط اگر $AB = BA$.

(ت) اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ متقارن باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی k، A^k هم متقارن است.

(ث) تنها ماتریسی که همزمان متقارن و پادمتقارن است، ماتریس صفر است.

(ج) ماتریسِ حقیقی $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ پادمتقارن است اگر و فقط اگر به ازای هر ستون X داشته باشیم $X^tAX = ۰$.

در حقیقت اگر A پادمتقارن باشد، رابطهٔ بالا آشکارا برقرار است. برعکس، اگر این رابطه برقرار باشد، آنگاه از یک سو به ازای هر $۱ \leq i \leq n$،

$$e_i^t A e_i = ۰ \quad \Rightarrow \quad a_{ii} = ۰$$

از سوی دیگر، به ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$ می‌بینیم که

$$(e_i + e_j)^t A(e_i + e_j) = ۰ \;\Rightarrow\; a_{ij} + a_{ji} = ۰ \;\Rightarrow\; a_{ij} = -a_{ji}$$

(چ) هر ماتریس مربعی دلخواه A را می‌توان به طور یکتا به صورت $A = S + T$ نوشت که در آن، S متقارن و T پادمتقارن است. در حقیقت کافی است قرار دهیم

$$S = \frac{۱}{۲}(A + A^t) \qquad , \qquad T = \frac{۱}{۲}(A - A^t)$$

۲۶.۱ قرارداد. از این پس واژه‌های متقارن و پادمتقارن را فقط برای ماتریس‌های حقیقی به کار می‌بریم مگر اینکه خلاف آن صریحاً بیان شود.

۲۷.۱ تعریف. ماتریس $A = (a_{ij})$ مفروض است. در این صورت **مزدوج** A را با $\overline{A}$ نشان می‌دهیم و آن را با رابطهٔ $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ تعریف می‌کنیم. **ماتریس الحاقی (اِرمیتیِ**[۱]**)** A بنابر تعریف عبارت است از

$$A^* = \overline{A}^t (= \overline{A^t})$$

اگر A ماتریسی حقیقی باشد، آشکارا داریم $A^* = A^t$.

۱. منسوب به شارل ارمیت (Charles Hermite).

۲۸.۱ قضیه. دو ماتریس A و B و اسکالر $\alpha \in \mathbb{K}$ مفروض‌اند. در این صورت

(الف) $(A^*)^* = A$.

(ب) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

(پ) $(A+B)^* = A^* + B^*$.

(ت) $(AB)^* = B^* A^*$.

(ث) اگر A مربعی باشد و $f(X) \in \mathbb{K}[X]$، آنگاه $(f(A))^* = \overline{f}(A^*)$. در حالت خاص، اگر ضریب‌های $f(X)$ حقیقی باشند، آنگاه $(f(A))^* = f(A^*)$.

اثبات. اثبات این قضیه کاملاً مشابه اثبات قضیهٔ ۲۳.۱ است. ■

۲۹.۱ تعریف. می‌گوییم ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ **اِرمیتی** (یا **خود - الحاقی**) است هرگاه $A^* = A$ و می‌گوییم A **پادارمیتی** است هرگاه $A^* = -A$.

به سخن دیگر، A ارمیتی است هرگاه

$$a_{ij} = \overline{a_{ij}} \qquad , \qquad (i, j = ۱, \dots, n)$$

و پادارمیتی است هرگاه

$$a_{ij} = -\overline{a_{ij}} \qquad , \qquad (i, j = ۱, \dots, n)$$

درایه‌های قطری هر ماتریس ارمیتی حقیقی‌اند (چرا؟). اگر A پادارمیتی باشد، درایه‌های قطری آن موهومی محض هستند (چرا؟).

برای مثال، ماتریس‌های A و B که در زیر می‌آیند به ترتیب ارمیتی و پادارمیتی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱-i \\ ۱+i & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۲i & -۲+۳i \\ ۲+۳i & ۰ \end{bmatrix}$$

۳۰.۱ مثال. (الف) اگر $A \in \mathcal{M}_{mn}$، آنگاه AA^* و A^*A ارمیتی هستند.

(ب) اگر $A \in \mathcal{M}_n$، آنگاه $A + A^*$ ارمیتی و $A - A^*$ پادارمیتی است.

(پ) اگر $A \in \mathcal{M}_n$ ارمیتی (پادارمیتی) باشد، آنگاه iA پادارمیتی (ارمیتی) است.

(ت) اگر دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ ارمیتی باشند، آنگاه $A + B$ و $(\alpha \in \mathbb{R})\alpha A$ نیز ارمیتی هستند. AB ارمیتی است اگر و فقط اگر $AB = BA$. به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، A^k ارمیتی است.

(ث) هر ماتریس دلخواه $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $A = H + iK$ نوشت که در آن H و K ارمیتی هستند. در حقیقت، کافی است قرار دهیم

$$H = \frac{۱}{۲}(A + A^*) \qquad , \qquad K = \frac{۱}{۲i}(A - A^*)$$

● **پرسش.** آیا درست است که $HK = KH$؟

۳۱.۱ تعریف. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. می‌گوییم A

(الف) **نرمال** است هرگاه $AA^* = A^*A$.

(ب) **یکانی** است هرگاه $AA^* = A^*A = I$.

اگر A حقیقی باشد و در رابطهٔ اخیر صدق کند، یعنی

$$AA^t = A^tA = I$$

آنگاه می‌گوییم A ماتریسی **متعامد** است.

۳۲.۱ مثال. **(یک)** هر ماتریس ارمیتی یا پادارمیتی، نرمال است.

(دو) هر ماتریس یکانی، نرمال است.

(سه) فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ و $A = H + iK$ که در آن H و K ارمیتی هستند. در این صورت A نرمال است اگر و فقط اگر $HK = KH$ (چرا؟).

(چهار) اگر دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ نرمال باشند و $AB = BA$، آنگاه $A + B$ و AB نیز نرمال هستند (چرا؟).

(پنج) ماتریس مثلثی $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ نرمال است اگر و فقط اگر قطری باشد (مثال ۴۹.۵ را نیز ببینید.)

در حقیقت فرض کنیم A نرمال باشد، در این صورت $AA^* = A^*A = O$. بنابراین، درایه‌های قطر اصلی ماتریس اخیر هم صفر هستند و از این رو،

$$\sum_{k=۱}^{n} \left(| a_{ik} |^۲ - | a_{ki} |^۲ \right) = ۰ \qquad , \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که به ازای هر $i \neq j$ داریم $a_{ij} = ۰$ (چرا؟) و بدین سان، A ماتریسی قطری است.

(شش) در مسأله‌های حل شدهٔ ۱۵.۵ و ۱۴.۵ خواهیم دید که ماتریس $A \in \mathcal{M}_۲(\mathbb{C})$ یکانی است اگر و فقط اگر

$$\exists \theta \in \mathbb{R} , \exists a, b \in \mathbb{C} , | a |^۲ + | b |^۲ = ۱ \ : \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ e^{-i\theta}\,\overline{b} & e^{i\theta}\,\overline{a} \end{bmatrix}$$

و اینکه ماتریس $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ متعامد است اگر و فقط اگر

$$\exists\, a,b \in \mathbb{R}\,,\ a^۲ + b^۲ = ۱\ :\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

برای مثال، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، ماتریس $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ متعامد است.

ماتریس‌های وارون‌پذیر

۳۳.۱ تعریف. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_{mn}$. می‌گوییم ماتریس $B \in \mathcal{M}_{nm}$ یک **وارون راست** A است هرگاه $AB = I$. به همین ترتیب، ماتریس $C \in \mathcal{M}_{nm}$ را یک **وارون چپ** A می‌نامیم هرگاه $CA = I$.

۳۴.۱ مثال. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

در این صورت می‌توان نشان داد که A بینهایت وارون چپ دارد که عبارت‌اند از

$$C = \begin{bmatrix} -۸\alpha - ۲ & ۳\alpha + ۱ & \alpha \\ -۸\beta + ۳/۲ & ۳\beta - ۱/۲ & \beta \end{bmatrix} \quad , \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

● **پرسش.** آیا می‌توانید بدون محاسبه بگویید A وارون راست دارد یا نه[۱]؟

۳۵.۱ قضیه. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$. اگر B یک وارون راست و C یک وارون چپ A باشد، آنگاه $B = C$.

اثبات. می‌بینیم که

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = I\,. \blacksquare$$

۳۶.۱ تعریف. می‌گوییم ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ **وارون‌پذیر** است هرگاه هم وارون راست داشته باشد هم وارون چپ. در این صورت این وارون راست (یا چپ) یکتا را **وارون** A می‌نامیم و آن را با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

می‌گوییم ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ **تکین** (یا **وارون‌ناپذیر**) است هرگاه وارون‌پذیر نباشد.

برای مثال، I وارون‌پذیر است و $I^{-۱} = I$. ماتریس O آشکارا تکین است.

---

۱. مثال ۵۶.۱ (دو) را نیز ببینید.

● در قضیهٔ ۶۹.۱ (ث) و نیز فرع ۱۱۰.۱ خواهیم دید که هر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ که دارای یکی از دو وارون راست یا چپ باشد، وارون‌پذیر است. همچنین، در مثال ۳۹.۶ (چهار) خواهیم دید که اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ تکین باشد، آنگاه

$$\exists\, B \in \mathcal{M}_n\ ,\ B \neq O\ :\ AB = BA = O$$

۳۷.۱ مثال. (**یک**) اگر A سطر یا ستون صفر داشته باشد، آنگاه A تکین است (چرا؟).

(**دو**) فرض کنیم $A = \mathrm{diag}(\lambda_۱, \ldots, \lambda_n)$. در این صورت A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\lambda_۱ \neq ۰$، ...، $\lambda_n \neq ۰$ (چرا؟). در این وضع،

$$A^{-۱} = \mathrm{diag}(\lambda_۱^{-۱}, \ldots, \lambda_n^{-۱})$$

(**سه**) اگر $f(X)$ چندجمله‌ای با جملهٔ ثابت ناصفر و ماتریس مربعی A یک صفر آن باشد، آنگاه A وارون‌پذیر است.

در حقیقت با فرض $f(X) = a_۰ X^k + \ldots + a_{k-۱}X + a_k$ که در آن $a_k \neq ۰$، می‌بینیم که

$$f(A) = O \Rightarrow a_۰ A^k + \ldots + a_{k-۱}A + a_k I = O$$

$$\Rightarrow A\Big(-\frac{۱}{a_k}(a_۰ A^{k-۱} + \ldots + a_{k-۱}I)\Big) = I \ \Rightarrow\ AB = I$$

به طور مشابهی ثابت می‌شود که $BA = I$. پس A وارون‌پذیر است (و $A^{-۱} = B$).

(**چهار**) هر ماتریس یکانی A وارون‌پذیر است و $A^{-۱} = A^*$. در حالت خاص، هر ماتریس متعامد A وارون‌پذیر است و $A^{-۱} = A^t$.

۳۸.۱ مثال. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$. می‌گوییم A **خود – توان** است هرگاه $A^۲ = A$. روشن است که در این صورت به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $A^k = A$.

برای مثال، ماتریس‌های O و I خود – توان هستند. تنها ماتریس خود – توان وارون‌پذیر، ماتریس یکه است (چرا؟).

● **تذکر.** بعداً (در مسألهٔ حل شدهٔ ۳۳ در پایان فصل ۴) خواهیم دید که اگر A خود – توان باشد و $A \neq O$، آنگاه ماتریس $I - \lambda A$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\lambda \neq ۱$ و از این گذشته، در این وضع داریم

$$(I - \lambda A)^{-۱} = I - \frac{\lambda}{\lambda - ۱} A$$

● **پرسش.** فرض کنیم A خود - توان باشد. به ازای کدام اسکالرهای λ، ماتریس $I - \lambda A$ نیز خود - توان است؟

۳۹.۱ قضیه. فرض کنیم A و B دو ماتریس هم‌اندازهٔ وارون‌پذیر باشند و $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. در این صورت

(الف) A^{-1} **وارون‌پذیر است و** $A = (A^{-1})^{-1}$.

(ب) αA **وارون‌پذیر است و** $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.

(پ) AB **وارون‌پذیر است و** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ت) A^t **وارون‌پذیر است و** $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(ث) A^* **وارون‌پذیر است و** $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(ج) اگر A ارمیتی (پادارمیتی) باشد، آنگاه A^{-1} نیز ارمیتی (پادارمیتی) است.

اثبات. فقط (پ) را ثابت می‌کنیم. می‌بینیم که

$$(AB).(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = I$. ■

۴۰.۱ تعریف. فرض کنیم A ماتریسی وارون‌پذیر باشد. در این صورت به ازای هر عدد صحیح منفی مانند k قرار می‌دهیم $A^k = (A^{-1})^{-k}$.

۴۱.۱ قضیه. فرض کنیم A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، $k \in \mathbb{N}$ و $p, q \in \mathbb{Z}$. در این صورت

(الف) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$.

(ب) $A^p.A^q = A^{p+q}$.

(پ) $(A^p)^q = A^{pq}$.

اثبات. اثبات آسان این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۴۲.۱ تعریف. می‌گوییم ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ **پوچ - توان** است هرگاه

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \;:\; A^k = O$$

کوچکترین kی طبیعی با ویژگی بالا را **مرتبه** (یا **اندیس**) **پوچ - توانی** A می‌نامیم.

اگر A پوچ - توان باشد، آنگاه A^* نیز پوچ - توان با همان مرتبهٔ پوچ - توانی است. همچنین، روشن است که هر ماتریس پوچ - توان، ماتریسی تکین است.

چند مسألهٔ حل شده

۱. A ماتریس قطری با درایه‌های قطری متمایز است و ماتریس B نیز به گونه‌ای است که $AB = BA$، نشان دهید که B نیز قطری است.

حل. فرض کنیم $A = \operatorname{diag}(\lambda_۱,\dots,\lambda_n)$ و $B = (b_{ij})$. در این صورت

$$Ab = BA \Rightarrow e_۱^t\, AB = e_۱^t\, BA$$

$$\Rightarrow \lambda_۱ e_۱^t B = [b_{۱۱} \quad b_{۱۲} \dots b_{۱n}]A$$

$$\Rightarrow \lambda_۱ [b_{۱۱} \quad b_{۱۲} \dots b_{۱n}] = [\lambda_۱ b_{۱۱} \quad \lambda_۲ b_{۱۲} \dots \lambda_{۱۱} b_{۱n}]$$

$$\Rightarrow b_{۱۲} = \dots = b_{۱n} = ۰$$

به طور مشابهی می‌بینیم که به طور کلی به ازای هر $i \neq j$ داریم $b_{ij} = ۰$.

● **تذکر**. متمایز بودن λها شرطی اساسی است و نمی‌توان آن را حذف کرد. برای مثال، ماتریس $A = I$ را در نظر می‌گیریم.

۲. فرض کنیم $e_۱$، ... ، e_n ستون‌های ماتریس یکهٔ I_n باشند و $A = [O \quad e_۱ \dots e_{n-۱}]$. نشان دهید که $A^{n-۱} \neq O$ ولی $A^n = O$. صورت گستردهٔ A را بنویسید.

حل. به آسانی دیده می‌شود که

$$A^n e_۱ = \dots = A^n e_n = O \quad , \quad A^{n-۱} e_n = e_۱ \neq O$$

۳. فرض کنیم E_{ij}ها یکاهای ماتریسی $\mathcal{M}_n$ باشند. کدام ماتریس‌های $A \in \mathcal{M}_n$ در رابطهٔ $AE_{۱۲} = E_{۱۲}A$ صدق می‌کنند؟

حل. فرض کنیم $A = (a_{ij})$. در این صورت از فرض مسأله نتیجه می‌شود که

$$a_{۲۱} = ۰ \ , \ a_{۲۳} = \dots = a_{۲n} = ۰ \ , \ a_{۳۱} = \dots = a_{n۱} = ۰ \ , \ a_{۱۱} = a_{۲۲}$$

۴. فرض کنیم ستون‌های ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ عبارت باشند از $A_۱$، ... ، A_n. در این صورت

(یک) $A^*A = (A_i^* A_j)$.

(دو) A یکانی است اگر و فقط اگر به ازای هر i و j، $A_i^* A_j = \delta_{ij}$.

(سه) اگر A یکانی و عددهای مختلط $\lambda_۱$، ... ، λ_n دارای قدرمطلق ۱ باشند، آنگاه ماتریس $B = [\lambda_۱ A_۱ \dots \lambda_n A_n]$ نیز یکانی است.

گزاره‌های مشابهی هم برای $A^t A$ و ماتریس‌های متعامد داریم.

حل. **(یک)** در حقیقت باتوجه به

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* \\ \vdots \\ A_n^* \end{bmatrix}$$

کافی است تعریف ضرب را به کار ببریم.

(سه) به آسانی دیده می‌شود که

$$B^*B = (\overline{\lambda}_i \lambda_j A_i^* A_j) = (\overline{\lambda}_i \lambda_j \delta_{ij}) = (\delta_{ij}) = I$$

۵. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریسی بالا - مثلثی باشد. در این صورت A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $a_{11} \neq 0$، ... ، $a_{nm} \neq 0$. در این وضع، A^{-1} نیز بالا - مثلثی است و درایه‌های قطری A^{-1} عبارت‌اند از a_{11}^{-1}، ... ، a_{nn}^{-1}.

حل. روش اول. نخست فرض کنیم درایه‌های قطری A ناصفر باشند. کوشش می‌کنیم ماتریس $B = (b_{ij})$ را طوری می‌یابیم که $BA = I$. اگر تعریف ضرب را بنویسیم و درایه‌های متناظر در دو طرف $=$ را برابر بگیریم، می‌بینیم که b_{ij}ها به گونه‌ای به دست می‌آیند که B بالا - مثلثی می‌شود و

$$b_{11} = a_{11}^{-1}, \ldots, b_{nn} = a_{nn}^{-1}$$

به طور مشابهی اگر فرض کنیم $C = (c_{ij})$ و بنویسیم $AC = I$، آنگاه می‌بینیم که c_{ij}ها به گونه‌ای به دست می‌آیند که C بالا - مثلثی می‌شود و

$$c_{11} = a_{11}^{-1}, \ldots, c_{nn} = a_{nn}^{-1}$$

چون A وارون چپ و راست دارد پس A وارون‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم A وارون‌پذیر باشد و $A^{-1} = (b_{ij})$. در این صورت (با استفاده از محاسبه‌های قبل) می‌بینیم که

$$A^{-1}A = I \;\Rightarrow\; b_{11}a_{11} = 1, \ldots, b_{nn}a_{nn} = 1$$
$$\Rightarrow\; a_{11} \neq 0, \ldots, a_{nn} \neq 0$$

● **تذکر.** **(یک)** حکم مشابهی هم برای ماتریس‌های پایین مثلثی داریم.

(دو) با استفاده از $\det$ هم می‌بینیم که A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر درایه‌های قطری A ناصفر باشند.

۶. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. اگر A وارون‌پذیر باشد و $A + B = AB$، نشان دهید که B و $A - I$ نیز وارون‌پذیرند.

حل. می‌بینیم که

$$A + B = AB \Rightarrow A^{-۱}(A + B) = B \Rightarrow (I - A^{-۱})B = I$$

پس B وارون‌پذیر است و $B^{-۱} = I - A^{-۱}$. همچنین، از وارون‌پذیری B، وارون‌پذیری $A - I$ نتیجه می‌شود. از این گذشته، روشن است که

$$A + B = AB \Rightarrow A^{-۱} + B^{-۱} = I$$

۷. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید که **(یک)** $I - A$ پوچ − توان است و **(دو)** وارون A را بیابید.

حل. به آسانی دیده می‌شود که $(I - A)^۲ = O$. اکنون با استفاده از مثال ۴۳.۱ (ج) می‌بینیم که A وارون‌پذیر است و

$$A^{-۱} = (I - (I - A))^{-۱} = ۲I - A$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸. اسکالر ناصفر λ مفروض است و

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & \lambda & ۱ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \lambda & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

(درایه‌های بی‌درنگ بالای قطر اصلی همگی ۱ هستند). فرمولی برای وارون D بیابید.

حل. اگر قرار دهیم $A = [O \;\; e_1 \; \dots \; e_{n-1}]$، آنگاه A پوچ – توان با مرتبهٔ پوچ – توانی n است. از سوی دیگر، روشن است که $D = \lambda I + A$. اکنون با استفاده از مثال ۴۳.۱ (ج) و با فرض $B = -\lambda^{-1} A$ می‌بینیم که

$$D = \lambda(I - B) \Rightarrow D^{-1} = \lambda^{-1}(I - B)^{-1}$$
$$= \lambda^{-1}(I + B + \dots + B^{n-1})$$

۹. در ماتریس وارون‌پذیر $A \in \mathcal{M}_n$ مجموع درایه‌های هر سطر برابر است با r. نشان دهید که $r \neq 0$ و اینکه مجموع درایه‌های هر سطر A^{-1} برابر است با r^{-1}. گزارهٔ مشابهی هم برای «ستون‌ها» داریم.

حل. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $A^{-1} = (b_{ij})$. بنابر فرض،

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r \quad , \quad (i = 1, \dots, n)$$

از سوی دیگر، با توجه به $A^{-1}A = I$، به ازای هر i و j داریم $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj} = \delta_{ij}$. بنابراین،

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj} = 1$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj}) b_{ik} = 1$$
$$\Rightarrow r \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = 1 \Rightarrow r \neq 0 \;,\; \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = 1 / r$$

۱۰. فرض کنیم دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ خود – توان باشند. نشان دهید که $A + B$ هم خود – توان است اگر و فقط اگر $AB = BA = O$.

حل. قسمت «اگر» بدیهی است. برای اثبات قسمت «فقط اگر» می‌بینیم که

$$(A + B)^2 = A + B \Rightarrow AB + BA = O \qquad (1)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} AB + ABA = O \\ ABA + BA = O \end{cases}$$
$$\Rightarrow AB - BA = O \qquad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که $AB = BA = O$.

۱۱. دو ماتریس $A,B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که $A+B=I$ و $AB=O$. نشان دهید که A و B خود ـ توان‌اند و $BA=O$.

حل. می‌بینیم که

$$A+B=I \;\Rightarrow\; A^۲+AB=A \;\Rightarrow\; A^۲=A$$

یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که ماتریس $B=I-A$ نیز خود ـ توان است و اینکه $BA=O$.

۱۲. دترمینان

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱\\ ۱ & ۱-x & ۱ & \dots & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲-x & \dots & ۱\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & n-x \end{vmatrix}$$

را محاسبه کنید.

حل. Δ آشکارا یک تابع چندجمله‌ای درجهٔ $n-۱$ برحسب x است (چرا؟) که صفرهای آن عبارت‌اند از ۰، ۱، ... ، $n-۱$. پس

$$\Delta=(-۱)^n x(x-۱)\dots(x-n+۱)$$

۱۳. دترمینان

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۰ & \dots & ۰ & ۰ & a_{۱n}\\ ۰ & \dots & ۰ & a_{۲(n-۱)} & a_{۲n}\\ ۰ & \dots & ۰ & a_{۳(n-۲)} & a_{۳n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n۱} & \dots & a_{n(n-۲)} & a_{n(n-۱)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

را محاسبه کنید.

حل. ستون آخر را با $n-۱$ تعویض متوالی به ستون اول می‌بریم. سپس در دترمینان جدید، ستون آخر را با $n-۲$ تعویض متوالی به ستون دوم می‌بریم و این فرایند را ادامه می‌دهیم تا به دترمینانی پایین - مثلثی با درایه‌های قطری $a_{۱n}$، $a_{۲(n-۱)}$، ... ، $a_{n۱}$ برسیم. بنابراین،

$$\Delta=(-۱)^{n(n-۱)/۲}\, a_{۱n}\, a_{۲(n-۱)}\cdots a_{n۱}$$

(چرا؟). همچنین، توجه داریم که $(-۱)^{\lfloor n/۲\rfloor}=(-۱)^{n(n-۱)/۲}$ (چرا؟).

۱۴. فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} M & P \\ O & N \end{bmatrix}$ کـه در آن M و N دو مـاتریس مربعـی (نـه لزومـاً هـم‌انـدازه) هستند. در این صورت

$$\det A = (\det M).(\det N)$$

حل. با استفاده از عمل سطری - مقدماتی «نوع ۳» ماتریس A را به صورت بـالا - مثلثـی در می‌آوریم (که در این فرایند، M و N هم بالا - مثلثی می‌شوند):

$$A' = \begin{bmatrix} M' & P' \\ O & N' \end{bmatrix}$$

با توجه به قضیهٔ ۵۱.۱ (پ) داریم

$$\det M' = \det M \quad , \quad \det N' = \det N \quad , \quad \det A' = \det A$$

و از این رو،

$$\begin{aligned} \det A = \det A' &= (\det M').(\det N') \\ &= (\det M).(\det N) \end{aligned}$$

● **تذکر.** مثال ۶۶.۱ را نیز ببینید.

۱۵. دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{vmatrix}$$

را محاسبه کنید.

حل. با استفاده از عمل سـطری مقـدماتی «نـوع ۳» (و سـپس بـا بـه کـارگیری مـسألهٔ بـالا) می‌بینیم که

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۴ & -۴ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۴ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -۴ & -۸ \\ ۴ & ۰ \end{vmatrix} = ۱۲۸$$

۱۶. ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ (که در آن $n \geq ۲$) به گونه‌ای است که هر سـتون آن فقـط یـک درایـهٔ ناصفر دارد که آن هم ۱ است. نشان دهید که

$$\det A \in \{-۱\,,\,۰\,,\,۱\}$$

حل. اگر دو تا از ۱ها در یک سطر باشند، آنگاه آشکار $\det A = 0$. اگر هیچ دو «یکی» در یک سطر نباشند، آنگاه جایگشتی مانند $a \in S_n$ هست که ستون‌های I براساس آن جابه‌جا شده‌اند تا A به دست آمده است. پس با توجه به قضیهٔ ۴۹.۱ داریم

$$A = \varepsilon_\sigma \det I = \pm 1$$

● برای مثال، می‌بینیم که

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \qquad , \qquad \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-3)}{2}+1}$$

۱۷. عدد طبیعی n و اسکالرهای α_1، ... ، α_n مفروض‌اند. نشان دهید که

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)$$

این را **دترمینان واندرموند**[1] می‌نامیم. برای مثال،

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)$$

حل. به ازای $n = 2$، رابطهٔ مورد نظر برقرار است. فرض کنیم حکم به ازای عدد طبیعی $n \geq 2$ درست باشد. با استفاده از ویژگی‌های دترمینان و نیز فرض استقرا می‌بینیم که

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \\ 1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

1- A. T. Vandermonde

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^n - \alpha_1\alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n^2 - \alpha_1\alpha_n & \cdots & \alpha_n^n - \alpha_1\alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \alpha_{n+1}^2 - \alpha_1\alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_1\alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{(چرا؟)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^n - \alpha_1\alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n^2 - \alpha_1\alpha_n & \cdots & \alpha_n^n - \alpha_1\alpha_n^{n-1} \\ 0 & \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \alpha_{n+1}^2 - \alpha_1\alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_1\alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_1) \prod_{n+1 \geq i > j \geq 2} (\alpha_i - \alpha_j)$$

$$= \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)$$

● **تذکر**. تمرین ۱۰ رانیز ببینید.

۱۸. **(یک)** فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$ و اینکه ماتریس $E \in \mathcal{M}_n$ سطری مقدماتی باشد. ثابت کنید که

$$\det(EA) = (\det E).(\det A)$$

(دو) فرض کنیم دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ سطری ــ هم‌ارز باشند. ثابت کنید که

$$\det A \neq 0 \iff \det B \neq 0$$

(سه) فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$. ثابت کنید که A وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

(چهار) فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. ثابت کنید که

$$\det(AB) = (\det A).(\det B)$$

(قضیهٔ ۵۳.۱ را نیز ببینید.)

حل. **(یک)** کافی است برای E سه حالت در نظر بگیریم و قضیهٔ ۹۶.۱ را نیز به کار ببریم.

● اکنون با استفاده از استقرای ریاضی می‌بینیم که اگر ماتریس‌های E_1، ... ، E_k سطری مقدماتی باشند، آنگاه

$$\det(E_k \dots E_1 A) = (\det E_k)\dots(\det E_1)(\det A)$$

در حالت خاص (با انتخاب $A = I$) داریم

$$\det(E_k \dots E_1) = (\det E_k)\dots(\det E_1)$$

(دو) بی‌درنگ از (یک) نتیجه می‌شود (چگونه؟).

(سه) فرض کنیم Bعبارت باشد از صورت پلکانی تحویل یافتهٔ سطری A. اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه $B = I$. پس $\det B \neq 0$ و بنابر (دو)، $\det A \neq 0$. برعکس، اگر $\det A \neq 0$، آنگاه بنابر (دو) داریم $\det B \neq 0$. بنابراین، B سطر صفر ندارد و از این رو، $B = I$. این نشان می‌دهد که A وارون‌پذیر است.

(چهار) اگر A تکین باشد، آنگاه AB نیز تکین است (چرا؟) و از این رو، بنابر (سه) داریم

$$\det(AB) = 0 = 0 . \det B = (\det A).(\det B)$$

اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه ماتریس‌هایی سطری مقدماتی مانند E_1، ... ، E_k وجود دارند به طوری که $A = E_1 \dots E_k$. اکنون با استفاده از (یک) می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 \dots E_k B)\\ &= (\det E_1)\dots(\det E_k)(\det B)\\ &= \big(\det(E_1 \dots E_k)\big)(\det B) = (\det A)(\det B)\end{aligned}$$

۱۹. فرض کنیم ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ بالا - مثلثی باشد. نشان دهید که $\mathrm{adj}A$ نیز بالا - مثلثی است و درایه‌های قطری آن عبارت‌اند از

$$A_{ii} = \prod_{k \neq i} a_{kk} \qquad , \qquad (i = 1, \dots, n)$$

حکم مشابهی هم برای ماتریس‌های پایین - مثلثی داریم.

حل. به ازای هر $j > i$، ماتریس کهاد M_{ij} بالا - مثلثی است که درایهٔ صفر بر قطر اصلی دارد (چرا؟) و از این رو،

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij} = 0$$

به این ترتیب، ماتریس (A_{ij}) پایین - مثلثی و بنابراین، ماتریس $\mathrm{adj}A = (A_{ij})^t$ بالا - مثلثی است.

از سوی دیگر، به ازای هر i، ماتریس کهاد M_{ii} بالا - مثلثی است و آشکارا داریم

$$A_{ii} = (-۱)^{i+i} \det M_{ii} = \prod_{k \neq i} a_{kk}$$

۲۰. فرض کنیم ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ وارون‌پذیر و همهٔ درایه‌های آن عدد صحیح باشند. در این صورت درایه‌های $A^{-۱}$ عدد صحیح هستند اگر و فقط اگر $\det A = \pm ۱$.

حل. فرض کنیم $\det A = \pm ۱$. چون درایه‌های A عدد صحیح هستند پس هر همسازهٔ A هم عددی صحیح است. اکنون رابطهٔ

$$A^{-۱} = \frac{۱}{\det A} . \operatorname{adj} A = \pm (A_{ij})^t$$

نشان می‌دهد که درایه‌های $A^{-۱}$ نیز عدد صحیح هستند.

برعکس، اگر درایه‌های $A^{-۱}$ عدد صحیح باشند، آنگاه چون $\det A$ و $\det A^{-۱}$ عدد صحیح هستند،

$$(\det A) . (\det A^{-۱}) = ۱ \;\Rightarrow\; \det A = \pm ۱$$

۲۱. قضیهٔ ۷۲.۱ (الف) را در حالت کلی ثابت کنید.

حل. اسکالری مانند c هست به طوری که به ازای $|t| \geq c$، ماتریس‌های $tI - A$ و $tI - B$ وارون‌پذیرند (چرا؟). پس

$$\operatorname{adj}(tI - A)(tI - B) = \Big(\operatorname{adj}(tI - B)\Big) . \Big(\operatorname{adj}(tI - A)\Big)$$

بنابراین، درایه‌های متناظر در دو طرف، به ازای هر $|t| \geq c$ برابرند. چون این درایه‌ها چندجمله‌ای هستند، پس به ازای هر t برابرند (چرا؟). در حالت خاص، به ازای $t = ۰$ می‌بینیم که

$$\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$$

۲۲. قضیهٔ ۷۲.۱ (ت) را در حالتی که A تکین است ثابت کنید.

حل. اسکالری مانند c هست به طوری که به ازای $|t| \geq c$، ماتریس $tI - A$ وارون‌پذیر است. پس

$$\operatorname{adj}\Big(\operatorname{adj}(tI - A)\Big) = |tI - A|^{n-۲} \; (tI - A)$$

اکنون با استدلالی مانند مسألهٔ قبل می‌بینیم که رابطهٔ بالا به ازای $t = ۰$ هم درست است، یعنی

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-۲} \; . \; A$$

۲۳. ماتریس $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مفروض است.

(یک) فرض کنیم $|A| = ۱$. در این صورت

$$\text{متعامد است } A \Leftrightarrow \operatorname{adj} A = A^t \Leftrightarrow A_{ij} = a_{ij} \quad , \quad (i, j = ۱, \ldots, n)$$

(دو) فرض کنیم $|A| = -۱$. در این صورت

$$\text{متعامد است } A \Leftrightarrow \operatorname{adj} A = -A^t \Leftrightarrow A_{ij} = -a_{ij} \quad , \quad (i, j = ۱, \ldots, n)$$

حل. کافی است تعریف‌های مربوط را به کار ببریم.

۲۴. **(الف)** ماتریس وارون‌پذیر $A \in \mathcal{M}_n$ و ماتریس $B \in \mathcal{M}_n$ مفروض‌اند. در این صورت $\operatorname{tr}(A^{-۱}BA) = \operatorname{tr} B$.

(ب) اگر $A, B \in \mathcal{M}_n$، آنگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$\operatorname{tr}(AB)^k = \operatorname{tr}(BA)^k$$

(پ) اگر α اسکالری ناصفر باشد، آنگاه هیچ دو ماتریس $n \times n$ای مانند A و B در رابطهٔ $AB - BA = \alpha I$ صدق نمی‌کنند.

حل. کافی است قضیهٔ ۸۸.۱ را به کار ببریم.

۲۵. **(یک)** ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای است که به ازای هر $B \in \mathcal{M}_n$ داریم $\operatorname{tr}(AB) = ۰$ نشان دهید که $A = O$.

(دو) دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که به ازای هر $C \in \mathcal{M}_n$ داریم $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CBA)$. نشان دهید که $AB = BA$.

حل. (یک) **روش اول**. فرض کنیم $A = (a_{ij})$. در این صورت به ازای هر $۱ \leq i, j \leq n$ می‌بینیم که

$$۰ = \operatorname{tr}(AE_{j۱}E_{۱i}) = \operatorname{tr}(E_{۱i}AE_{j۱}) = \operatorname{tr}(a_{ij} \,.\, E_{۱۱}) = a_{ij}$$

و این دقیقاً یعنی $A = O$.

روش دوم. با فرض $B = A^*$، از $\operatorname{tr}(AA^*) = ۰$ نتیجه می‌گیریم که $A = O$.

(دو) حل این قسمت را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۲۶. ماتریس‌های $A \in \mathcal{M}_n$ و $AA^* - A^*A$ تعویض‌پذیرند. نشان دهید که A نرمال است.

حل. قرار می‌دهیم $B = AA^* - A^*A$. ماتریس B آشکارا ارمیتی است و از این رو، برای اثبات $B = O$ کافی است ثابت کنیم که $\operatorname{tr} B^۲ = ۰$ (چرا؟). ولی با فرض $C = A^*(AA^* - A^*A)$ داریم

$$B^{۲} = (AA^* - A^*A)(AA^* - A^*A)$$
$$= AA^*(AA^* - A^*A) - A^*A(AA^* - A^*A) = AC - CA$$

بنابراین، $\mathrm{tr}B^{۲} = ۰$.

۲۷. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. اگر A پادارمیتی باشد و $AB = B$، نشان دهید که $B = O$.

حل. از رابطهٔ $AB = B$ نتیجه می‌شود که $A^{۲}B = B$ و از این رو،

$$B^*B = (AB)^*(AB) = B^*(A^*A)B = -B^*A^{۲}B = -B^*B$$

بنابراین $\mathrm{tr}(B^*B) = ۰$ و در نتیجه، $B = O$.

۲۸. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. نشان دهید که

(یک) اگر $BAA^* = O$، آنگاه $BA = O$.

(دو) اگر A ارمیتی باشد، $k \in \mathbb{N}$ و $BA^k = O$، آنگاه $BA = O$.

حل. **(یک)** داریم

$$BAA^* = O \Rightarrow BAA^*B^* = O \Rightarrow (BA)(BA)^* = O \Rightarrow BA = O$$

(دو) نخست با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم که اگر $BA^{۲^n} = O$، آنگاه $BA = O$. در حقیقت، با توجه به (یک) می‌بینیم که

$$O = BA^{۲^n} = BA^{۲^{n-۱}}.A^{۲^{n-۱}} = BA^{۲^{n-۱}}(A^{۲^{n-۱}})^*$$
$$\Rightarrow BA^{۲^{n-۱}} = O \Rightarrow \ldots \Rightarrow BA = O$$

اکنون فرض کنیم k عدد طبیعی دلخواهی باشد. عدد $n \in \mathbb{N}$ را طوری می‌گیریم که $۲^n \geq k$. بنابراین،

$$BA^k = O \;\Rightarrow\; BA^{۲^n} = O \;\Rightarrow\; BA = O$$

۲۹. دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که A و $AB - BA$ تعویض‌پذیرند. نشان دهید که

$$\mathrm{tr}(AB - BA)^k = ۰ \qquad , \qquad (k \in \mathbb{N})$$

حل. با فرض $k \geq ۲$ و $C = B(AB - BA)^{k-۱}$ داریم

$$(AB - BA)^k = (AB - BA)(AB - BA)^{k-۱}$$
$$= AB(AB - BA)^{k-۱} - BA(AB - BA)^{k-۱}$$
$$= AC - CA$$

۳۰. ماتریس نرمال $A \in \mathcal{M}_n$ و ماتریس $B \in \mathcal{M}_n$ تعویض‌پذیرند. نشان دهید که

(یک) $A^*B = BA^*$. **(دو)** $AB^* = B^*A$.

(سه) اگر B نرمال باشد، آنگاه AB نیز نرمال است.

حل. فقط (یک) را حل می‌کنیم. قرار می‌دهیم $C = A^*B - BA^*$. برای اثبات $C = O$ کافی است ثابت کنیم که $\operatorname{tr} CC^* = 0$. اکنون با توجه به $AC = CA$ (چرا؟) می‌بینیم که

$$\begin{aligned} CC^* &= C(B^*A - AB^*) \\ &= (CB^*)A - (CA)B^* \\ &= (CB^*)A - A(CB^*) = DA - AD \end{aligned}$$

بنابراین، $\operatorname{tr} CC^* = 0$.

۳۱. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. نشان دهید که

$$|\operatorname{tr}(AB)|^2 \le \left(\operatorname{tr}(AA^*)\right).\left(\operatorname{tr}(BB^*)\right)$$

حل. با فرض $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ و با استفاده از نابرابری $C.B.S.$ داریم

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(AB)|^2 &= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}\right|^2 \\ &\le \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big).\Big(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2\Big) = \left(\operatorname{tr}(AA^*)\right).\left(\operatorname{tr}(BB^*)\right) \end{aligned}$$

۳۲. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$ و اینکه A وارون‌پذیر باشد. نشان دهید که AB و BA متشابه هستند.

حل. در حقیقت می‌بینیم که $BA = A^{-1}(AB)A$.

● **تذکر.** اگر هر دو ماتریس A و B تکین باشند، گزارهٔ بالا درست نیست. برای مثال، فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$AB = O \quad , \quad BA = \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

۳۳. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$.

(الف) اگر جای سطرهای rام و sام و سپس جای ستون‌های rام و sام را عوض کنیم، ماتریس به دست آمده با A متشابه است.

(ب) اگر سطر rام را در اسکالر ناصفر α ضرب و سپس ستون rام را در $1/\alpha$ ضرب کنیم، ماتریس به دست آمده با A متشابه است.

(پ) اگر سطر rام را در اسکالر α ضرب و آن را به سطر sام بیفزاییم و سپس ستون sام را در $\alpha-$ضرب و آن را به ستون rام بیفزاییم، ماتریس به دست آمده با A متشابه است.

حل. در هر یک از سه مورد بالا ماتریس به دست آمده را B می‌نامیم.

(الف) اگر ماتریس‌های مقدماتی

$$E : R_r \leftrightarrow R_s \qquad , \qquad F : C_r \leftrightarrow C_s$$

را در نظر بگیریم، آنگاه آشکارا داریم

$$B = EAF = E^{-1}AE$$

(ب) اگر ماتریس‌های مقدماتی

$$E : R_r \to \alpha R_r \qquad , \qquad F : C_r \to \frac{1}{\alpha} C_r$$

را در نظر بگیریم، آنگاه آشکارا داریم $E^{-1} = F$ (چرا؟) و از این رو،

$$B = EAF = F^{-1}AF$$

(پ) اگر ماتریس‌های مقدماتی

$$E : R_s \to R_s + \alpha R_r \qquad , \qquad F ; C_r \to C_r - \alpha C_s$$

را در نظر بگیریم، آنگاه آشکارا داریم $E^{-1} = F$ و از این رو،

$$B = EAF = F^{-1}AF$$

۳۴. فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ و $\sigma \in S_n$. در این صورت ماتریس‌های A و $B = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ متشابه‌اند.

حل. نخست فرض کنیم σ ترانهشی باشد که r را به s و s را به r تبدیل می‌کند. در این وضع، B همان است که در حالت (الف) در مسألهٔ ۳۳ به دست آمده بود. حالت کلیِ $\sigma \in S_n$ به آسانی نتیجه می‌شود (چگونه؟).

۳۵. فرض کنیم

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \qquad , \qquad B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$$

اگر bها یک تجدید آرایش aها باشند، آنگاه A و B متشابه‌اند.

حل. کافی است «عمل الف» در مسألهٔ ۳۳ را «چند بار» تکرار کنیم.

● **تذکر.** در مثال ۳۶ (دو) در پیوست فصل ۶ خواهیم دید که برعکس، اگر A و B متشابه باشند، آنگاه bها یک تجدید آرایش aها هستند.

۳۶. با استفاده از عمل‌های سطری - مقدماتی نشان دهید که اگر اسکالرهای λ_1، ... ، λ_n ناصفر باشند، آنگاه ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است و وارون آن را بیابید.

حل. ماتریس $[A \mid I]$ را در نظر می‌گیریم و آن را با «عمل تعویض سطرها» به صورت

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} \lambda_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

در می‌آوریم. اکنون سطرها را از بالا به پایین به ترتیب در λ_n^{-1}، ... ، λ_1^{-1} ضرب می‌کنیم و می‌بینیم که

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2}^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۷. با استفاده از عمل‌های سطری مقدماتی نشان دهید که ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

وارون‌پذیر است و آن را به صورت حاصلضرب ماتریس‌های مقدماتی بنویسید.

حل. اگر عمل‌های سطری مقدماتی

$$E_1 : R_1 \to R_3 \quad , \quad E_2 : R_2 \to R_2 - R_1 \quad , \quad E_3 : R_3 \to R_3 - 4R_1$$
$$E_4 : R_3 \to -R_3 \quad , \quad E_5 : R_2 \to R_2 - R_3 \quad , \quad E_6 : R_1 \to R_1 - R_3$$
$$E_7 : R_3 \to R_3 - R_1 \quad , \quad E_8 : R_3 \to \frac{1}{5} R_3 \quad , \quad E_9 : R_2 \to R_2 - 20R_3$$
$$E_{10} : R_1 \to R_1 + 20R_3$$

را انجام دهیم آنگاه می‌بینیم که $E_{10}\, E_9 \dots E_2\, E_1 A = I$ و از این رو،

$$A = E_{10}^{-1}\, E_9^{-1} \dots E_2^{-1}\, E_1^{-1}$$

تمرینات

۱. با استفاده از یکاهای ماتریسی، حاصلضرب

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

را بیابید.

۲. نشان دهید که بینهایت ماتریس ۲×۲ مانند A هست به طوری که $A^۲ = I$.

۳. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$. با استفاده از یکاهای ماتریسی، A^nها را بیابید.

۴. چهار ستون $X, Y, U, V \in \mathcal{M}_{n۱}$ مفروض‌اند. برای یافتن ماتریس XY^tUV^t چند بار عمل ضرب اسکالرها را به کار می‌بریم؟

۵. اسکالر $\alpha \neq -۱$ و ماتریس مربعی ناصفر A به گونه‌ای هستند که $A^۲ = \alpha A$. به ازای کدام اسکالرهای γ می‌توان ادعا کرد که $I + A$ و $I + \gamma A$ وارون یکدیگرند؟

۶. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$ و $A^۲ = I$. قرار می‌دهیم

$$B = \frac{۱}{۲}(I + A) \quad , \quad C = \frac{۱}{۲}(I - A)$$

نشان دهید که **(یک)** B و C خود ـ توان‌اند، **(دو)** $B - C = A$، **(سه)** $B + C = I$ و **(چهار)** $BC = O$.

۷. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$ و $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$. اگر A ارمیتی باشد، $B \neq O$ و $AB = \lambda B$، نشان دهید که $b = ۰$.

۸. ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ و اسکالر ناصفر λ مفروض‌اند. اگر هر a_{ij} را در λ^{i-j} ضرب کنیم، $\det A$ چه تغییری می‌کند؟

۹. فرض کنیم اسکالرهای $\lambda_۱$، ... ، λ_n ناصفر باشند و

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & \lambda_۱ \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & \lambda_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \cdots & \lambda_۳ & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با روشی غیر از مسألهٔ حل شدهٔ ۳۶، $A^{-۱}$ را بیابید.

۱۰. عدد طبیعی n و اسکالرهای α_1، ... ، α_n مفروض‌اند. نشان دهید که

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

با مسألهٔ حل شدهٔ ۱۷ مقایسه کنید.

۱۱. فرض کنیم a، b و c سه اسکالر باشند و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

ثابت کنید که

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -bc & -ca & -ab \\ b+c & c+a & a+b \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b-c & 0 & 0 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

۱۲. **(الف)** فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$. نشان دهید که ماتریسی متقارن با اثر صفر مانند S، ماتریسی پادمتقارن مانند T و اسکالری مانند c وجود دارند به طوری که

$$A = S + T + cI$$

(ب) باتوجه به نمادهای بالا، نشان دهید که

$$\operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} S^2 + \operatorname{tr} T^2 + (\operatorname{tr} A)^2/n$$

۱۳. تابع $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{K}$ به گونه‌ای است که

(الف) $f(I) = n$.

(ب) $f(A+B) = f(A) + f(B)$.

(پ) $f(\lambda A) = \lambda f(A)$.

(ت) به ازای هر $A \in \mathcal{M}_n$ و هر ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathcal{M}_n$ داریم $f(P^{-1}AP) = f(A)$.

ثابت کنید که $f = \operatorname{tr}$.

● **تذکر.** اگر شرط (الف) را کنار بگذاریم، ثابت کنید که به ازای اسکالری مانند α داریم $f = \alpha \operatorname{tr}$.

۱۴. نشان دهید که ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ نرمال است اگر و فقط اگر A و AA^* تعویض‌پذیر باشند.

۱۵. فرض کنیم دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ نرمال باشند و $AB = O$. نشان دهید که $BA = O$.

۱۶. اگر دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ ارمیتی باشند، نشان دهید که $\mathrm{tr}(AB) \in \mathbb{R}$.

۱۷. ثابت کنید که در $\mathcal{M}_n$، بـه ازای هـر $1 \le i \le n$ داریـم $E_{ii} \approx E_{11}$ و بـه ازای هـر $i \neq j$ داریم $E_{ij} \approx E_{12}$.

● **تذکر**. قضیهٔ ۳۹ در پیوست فصل ۶ را نیز ببینید.

۱۸. نشان دهید که هر ماتریس بالا - مثلثی Δ با ماتریسی پایین - مثلثی مانند B متـشابه اسـت. آیا درایه‌های قطری A و B یکسان‌اند؟

۱۹. صورت نرمال ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

و نیز ماتریس‌های وارون‌پذیر متناظر P و Q (در قضیهٔ ۱۱۳.۱) را بیابید.

۲۰. نشان دهید که صورت نرمال ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ عبارت است از $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. آیا می‌توان این صـورت نرمال را فقط با استفاده از عمل‌های سطری - مقدماتی بـه دسـت آورد؟ فقـط بـا عمـل‌هـای ستونی - مقدماتی چطور؟

پیوست ۱)

مجموعهٔ پرسش‌های

چهار گزینه‌ای

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ۱

۱. **کدام گزینه درست است؟** **(ریاضی ۷۴)**

۱) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ ۲) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}A.trB$

۳) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}A + \operatorname{tr}B$ ۴) $\operatorname{tr}A^۲ = (\operatorname{tr}A)^۲$

۲. **اگر ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_n$ در رابطهٔ $A^t = -A$ صدق کند، آنگاه ...** **(ریاضی ۷۴)**

۱) $\det A = ۰$ ۲) $\det A \neq ۰$

۳) اگر n زوج باشد، $\det A = ۰$. ۴) اگر n فرد باشد، $\det A = ۰$.

۳. **اگر ماتریس مربعی A خود – توان باشد، آنگاه ...** **(ریاضی ۷۴)**

۱) A پوچ – توان است. ۲) A وارون‌پذیر است.

۳) $I - A$ وارون‌پذیر است. ۴) $I - \frac{۱}{۲}A$ وارون‌پذیر است.

۴. **اگر $A, B \in \mathcal{M}_n$، $r(A) = n$ و $AB = O$، آنگاه ...** **(ریاضی ۷۴)**

۱) $B = O$ ۲) $A^n = O$

۳) $BA^n \neq O$ ۴) $BA \neq O$

۵. **اگر A و B دو ماتریس (حقیقی) متعامد باشند و $\det A + \det B = ۰$، آنگاه** **(ریاضی ۷۶)**

۱) $\det(A + B) = ۱$ ۲) $\det(AB) = ۱$

۳) $A + B$ تکین است. ۴) $A + B$ وارون‌پذیر است.

۶. **ماتریس حقیقی وارون‌پذیر $A \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای است که بـه ازای هـر $X \in \mathbb{R}^n$ داریـم $X^tAX = O$. در این صورت** **(ریاضی ۷۶)**

۱) n مضرب ۴ است. ۲) n دلخواه است.

۳) n مضرب ۳ است. ۴) n زوج است.

۷. **اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ پوچ – توان باشد، آنگاه اثر $I + A$ کدام است؟** **(ریاضی ۷۶)**

۱) n ۲) $۲n$ ۳) -۱ ۴) ۱

۸. ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ با کدام ماتریس زیر متشابه است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} i & ۰ & ۰ \\ ۰ & -i & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & i \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$

۹. اگر $A \in \mathcal{M}_n$، آنگاه به ازای هر عدد λ، $\operatorname{adj}(\lambda A)$ برابر است با (ریاضی ۷۷)

۱) $\lambda^{n-۱} \operatorname{adj} A$
۲) $\lambda^n \operatorname{adj} A$
۳) $\lambda \operatorname{adj} A$
۴) $\operatorname{adj} A$

۱۰. دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که $AB - BA = A$. در این صورت (ریاضی ۷۷)

۱) $A = I$
۲) $\det A = ۰$
۳) $A = A^t$
۴) A وارون‌پذیر است.

۱۱. اگر ماتریس مربعی A فقط با خودش متشابه باشد، آنگاه (ریاضی ۷۷)

۱) $A = I$
۲) $A = O$
۳) A قطری است.
۴) A اسکالر است.

۱۲. فرض کنیم ماتریس‌های A، B و $A+B$ وارون‌پذیر باشند. در این صورت ... نیز وارون‌پذیر است. (ریاضی ۷۸)

۱) $A - B$
۲) $A + B^{-۱}$
۳) $A - B^{-۱}$
۴) $A^{-۱} + B^{-۱}$

۱۳. فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i \neq j \\ ۰ & i = j \end{cases}$. در این صورت $\det A$ برابر است با (ریاضی ۷۸)

۱) ۰
۲) $(-۱)^{n-۱}(n-۱)$
۳) $(-۱)^n(n-۱)$
۴) $(-۱)^n n$

۱۴. دو ماتریس $A \in \mathcal{M}_{mn}$ و $B \in \mathcal{M}_{nm}$ به گونه‌ای هستند که AB وارون‌پذیر است. در این صورت کدام رابطه بین m و n برقرار است؟ **(ریاضی ۷۸)**

۱) $m \leq n$ ۲) $m \geq n$ ۳) $m = n$ ۴) $m > n$

۱۵. رتبهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ **برابر است با** **(ریاضی ۷۸)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. اگر $A \in \mathcal{M}_{mn}$ و $B \in \mathcal{M}_{np}$ و $AB = O$، آنگاه **(ریاضی ۷۹)**

۱) $r(A) + r(B) < n$ ۲) $r(A) + r(B) > n$

۳) $r(A) + r(B) \leq n$ ۴) $r(A) + r(B) \geq n$

۱۷. فرض کنیم A و B دو ماتریس هم‌اندازه با رتبه‌های r و s باشند. در این صورت رتبهٔ $۲A - ۳B$ برابر است با **(ریاضی ۷۹)**

۱) $۲r - ۳s$ ۲) $r + s$ ۳) $\max\{r, s\}$ ۴) $\min\{r, s\}$

۱۸. فرض کنیم ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ وارون‌پذیر و ماتریس $B \in \mathcal{M}_n$ از تعویض سطرهای iام و jام A به دست آمده باشد. در این صورت **(ریاضی ۸۰)**

۱) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام A به دست می‌آید.

۲) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام $A^{-۱}$ به دست می‌آید.

۳) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام $A^{-۱}$ به دست می‌آید.

۴) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام A به دست می‌آید.

۱۹. تعداد ماتریس‌های مقدماتی ۲×۲ بر هیأت $\mathbb{Z}_{۳۱}$ عبارت است از **(ریاضی ۸۰)**

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۳ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۲۵

۲۰. اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ پادمتقارن باشد، آنگاه $\operatorname{adj} A$ ... **(ریاضی ۸۱)**

۱) متقارن است.

۲) پادمتقارن است.

۳) متقارن است هرگاه n فرد باشد و پادمتقارن است هرگاه n زوج باشد.

۴) پادمتقارن است هرگاه n فرد باشد و متقارن است هرگاه n زوج باشد.

۲۱. دترمینان $\begin{bmatrix}-2&3&4\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$ **برابر است با** **(ریاضی ۸۱)**

۱) -72 ۲) -36 ۳) 36 ۴) 72

۲۲. اگر ماتریس $A\in\mathcal{M}_n$ در رابطهٔ $A^2+2A-2I=O$ صدق کند، آنگاه **(ریاضی ۸۱)**

۱) $\det A=0$ ۲) $\det A\neq 0$

۳) صفر یک ویژه − مقدار A است. ۴) $AA^t=O$

۲۳. فرض کنیم $A,B\in\mathcal{M}_n$ و A وارون‌پذیر باشد. به ازای چند اسکالر c، ماتریس $cA+B$، وارون‌پذیر است؟ **(ریاضی ۸۱)**

۱) بیش از n ۲) حداکثر n ۳) n ۴) 0

۲۴. ماتریس‌های $A,B\in\mathcal{M}_n$ و ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q به گونه‌ای هستند که $PAQ=B$. در این صورت **(ریاضی ۸۱)**

۱) $r(A)<r(B)$ ۲) $r(B)<r(A)$

۳) $r(A)=r(B)$ ۴) $r(B)=r(A)+2$

۲۵. ماتریس $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&2&0\\2&0&4\end{bmatrix}$ **با کدام ماتریس زیر متشابه است؟** **(ریاضی ۸۲)**

۱) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

۲۶. اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\-1&0&3\\3&1&-2\end{bmatrix}$**، آنگاه $\mathrm{adj}A$ برابر است با** **(ریاضی ۸۲)**

۱) $\begin{bmatrix}-3&-1&7\\8&5&-14\\6&2&-7\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-3&8&6\\-1&5&2\\7&-14&-7\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}-3&7&-1\\8&-14&5\\6&-7&2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}-3&8&6\\7&-14&-7\\-1&5&2\end{bmatrix}$

۲۷. کدام گزاره نادرست است؟ **(ریاضی ۸۲)**

۱) اگر A و B متشابه باشند، آنگاه A^{-1} و B^{-1} نیز متشابه‌اند.

۲) اگر A و B متشابه باشند، آنگاه A^{2} و B^{2} نیز متشابه‌اند.

۳) اگر A و B متشابه باشند، آنگاه A^{*} و B^{*} نیز متشابه‌اند.

۴) اگر A و I متشابه باشند، آنگاه $A = I$.

۲۸. کدام گزینه نادرست است؟ **(ریاضی ۸۲)**

۱) $\det(A^nB^n) = \left(\det(AB)\right)^n$ ۲) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

۳) $\det(AB) = \det A . \det B$ ۴) $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

۲۹. تعداد ماتریس‌های مقدماتی 2×2 بر هیأت $\mathbb{Z}_{11}$ برابر است با **(ریاضی ۸۲)**

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۳

۳۰. تعداد ماتریس‌های وارون‌پذیر 3×3 با درایه‌های متعلق به هیأتی ۵ عضوی، برابر است با **(ریاضی ۸۲)**

۱) 3^{25} ۲) $2^{4}.3.5^{3}.31$

۳) $2^{6}.3.5^{3}.31$ ۴) $2^{7}.3.5^{3}.31$

۳۱. کدام گزارهٔ زیر دربارهٔ ماتریس‌های $n \times n$ درست است؟ **(ریاضی ۸۲)**

۱) $r(AB) > r(A)$ ۲) $r(AB) > r(B)$

۳) $r(A+B) > r(A) + r(B)$ ۴) $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

۳۲. دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که $P^2 = P$، $Q^2 = Q$ و اینکه $I - (P + Q)$ وارون‌پذیر است. در این صورت **(ریاضی ۸۳)**

۱) $r(P) = r(Q)$ ۲) $r(P) = n$

۳) Q قطری ـ شدنی نیست. ۴) $P + Q$ خود ـ توان است.

۳۳. شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس $A \in \mathcal{M}_2$ در رابطهٔ $\det(I + A) = 1 + \det A$ صدق کند، آن است که **(ریاضی ۸۴)**

۱) $\mathrm{tr}A = 0$ ۲) $\mathrm{tr}A = -1$ ۳) $\mathrm{tr}A = 1$ ۴) $\mathrm{tr}A = \det A$

۳۴. **فرض کنیم $A = xe + I$ که در آن $x = (x_۱, x_۲, x_۳)$، $e = [۱ \ ۱ \ ۱]$ و I ماتریس یکه است. در این صورت $\det A$ برابر است با** **(ریاضی ۸۴)**

۱) $x_۱ + x_۲ + x_۳ - ۱$ ۲) $۱ + x_۱ + x_۲ + x_۳$

۳) $x_۱ + x_۲ + x_۳$ ۴) $۱ - x_۱ - x_۲ - x_۳$

۳۵. **دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که رتبهٔ ماتریس $C = AB - BA$ برابر است با ۱. در این صورت** **(ریاضی ۸۴)**

۱) $C^۲ = O$ ۲) C وارون‌پذیر است.

۳) $C^۳ = O$ ولی $C^۲ \neq O$. ۴) C خود ــ توان است.

۳۶. **چند جفت ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_۳$ در رابطهٔ**

$$AB - BA = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix}$$

صدق می‌کنند؟ **(ریاضی ۸۵)**

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بینهایت

۳۷. **ماتریس $D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$ و ماتریس وارون‌پذیر $P \in \mathcal{M}_۲$ در رابطهٔ $A = P^{-۱}DP$ صدق می‌کنند. در این صورت ماتریس $۵I - ۳A + A^۲$ با کدام ماتریس زیر متشابه است؟** **(ریاضی ۸۵)**

۱) A ۲) P ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

۳۸. **اگر u و v دو بردار (ستونی) ناصفر در $\mathbb{R}^n$ باشند، رتبهٔ ماتریس uv^t کدام است؟** **(ریاضی ۸۵)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) n ۴) $n^۲$

۳۹. **دو ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_{۶\times۴}$ و $B \in \mathcal{M}_{۴\times۶}$ مفروض‌اند. ماتریس AB دارای کدام ویژگی است؟** **(ریاضی ۸۶)**

۱) وارون‌پذیر نیست. ۲) وارون‌پذیر است.

۳) سطرهای مسقل خطی دارد. ۴) با BA برابر نیست.

۴۰. اگر

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۲ & ۲ & \dots & ۲ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}$$

آنگاه $\operatorname{tr}(AA^t)$ برابر است با **(ریاضی ۸۶)**

۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{n^۲(n+۱)}{۲}$

۳) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۴) $\frac{n^۲(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۴۱. کدام گزارهٔ زیر درست است؟ **(ریاضی ۸۶)**

۱) ماتریس الحاقی کلاسیک هر ماتریس قطری الزاماً قطری نیست.

۲) اگر A ماتریسی حقیقی، وارون‌پذیر و متقارن باشد، آنگاه $\operatorname{adj}A$ لزوماً متقارن نیست.

۳) اگر A ماتریسی حقیقی، وارون‌پذیر و پادمتقارن باشد، آنگاه $\operatorname{adj}A$ نیز پادمتقارن است.

۴) اگر A ماتریسی ۳×۳ با دترمینان ناصفر باشد، آنگاه $\det\left(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}A)\right)=(\det A)^۳$.

۴۲. تعداد ماتریس‌های مقدماتی سطری ۲×۲ با درایه‌های متعلق به $\mathbb{Z}_۲$ برابر است با **(ریاضی ۸۶)**

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۸

۴۳. تعداد ماتریس‌های ۳×۳ با درایه‌های متعلق به $\mathbb{Z}_۲$ که در شرط $A^t=-A$ صدق می‌کنند برابر است با **(ریاضی ۸۷)**

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۴۴. ماتریس وارون‌پذیر A با درایه‌های صحیح به گونه‌ای است که درایه‌های $A^{-۱}$ نیز عدد صحیح هستند در این صورت **(ریاضی ۸۷)**

۱) $\det A=-۱$ ۲) $\det A=۱$ ۳) $|\det A|>۱$ ۴) $|\det A|=۱$

۴۵. اگر $A,B\in\mathcal{M}_n$، آنگاه **(ریاضی ۸۷)**

۱) $\operatorname{adj}(۲A)=۲^n\operatorname{adj}A$ ۲) $\operatorname{adj}(A+B)=\operatorname{adj}A+\operatorname{adj}B$

۳) $\operatorname{adj}(AB)=(\operatorname{adj}A).(\operatorname{adj}B)$ ۴) $\operatorname{adj}(AB)=(\operatorname{adj}B).(\operatorname{adj}A)$

۴۶. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$ و $r(A) = r$. کدام گزینه درست است؟ **(ریاضی ۸۷)**

۱) دو ماتریس وارون‌پذیر مانند P و Q وجود دارند به طوری که $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$.

۲) A با ماتریس $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ متشابه است.

۳) $r(A^۲) = r$

۴) $r(A^۲) = r$

۴۷. اگر $A \in \mathcal{M}_۷$ و $A^۷ = O$، آنگاه $\mathrm{tr}(I + A + A^۲ + \ldots + A^۷)$ برابر است با **(ریاضی ۸۷)**

۱) ۷- ۲) ۰ ۳) ۷ ۴) ۴۲

۴۸. ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ و عدد طبیعی $۱ \leq r < n$ مفروض‌اند. اگر r درایهٔ A را به دلخواه تغییر دهیم، آنگاه **(ریاضی ۸۷)**

۱) $r(A)$ تغییر نمی‌کند.

۲) $n(A)$ دقیقاً r تا تغییر می‌کند.

۳) $n(A)$ حداکثر r تا تغییر می‌کند.

۴) $n(A)$ دست کم r تا تغییر می‌کند.

۴۹. در ماتریس $A \in \mathcal{M}_{۱۰}$ درایه‌های قطر اصلی ۳ و درایه‌های دیگر ۲ هستند. در این صورت $\det A$ برابر است با **(ریاضی ۸۸)**

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۵۰. فرض کنیم درایه‌های ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ (که در آن $n > ۱$) عدد صحیح باشند و $AA^t = nI$. در این صورت n کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟ **(ریاضی ۸۸)**

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

۵۱. ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای است که $A^۲ = A$ و $(A - A^t)^۲ = O$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟ **(ریاضی ۸۸)**

۱) $(AA^t)^۲ = A^tA$

۲) $(AA^t)^۲ = AA^t$

۳) $(AA^t + A^tA)^۲ = O$

۴) $(AA^t - A^tA)^۲ = O$

۵۲. فرض کنیم ماتریس $A \in \mathcal{M}_{mn}$ وارون چپ داشته باشد. در این صورت **(ریاضی ۸۸)**

۱) $r(A) = m$

۲) $r(A) = n$

۳) $r(A) = \min\{m, n\}$

۴) $r(A) = \max\{m, n\}$

۵۳. **فرض کنیم** $A, B \in \mathcal{M}_n$ **و** $r(A) = ۱$. **اگر** $AB \neq O$، **آنگاه** $r(AB)$ **برابر است با** **(ریاضی ۸۸)**

۱) ۱ ۲) n ۳) $n - ۱$ ۴) $r(B)$

۵۴. **دو ماتریس** $A, B \in \mathcal{M}_{۱۰}$ **در رابطهٔ** $ABA = A$ **صدق می‌کنند. در این صورت** **(ریاضی ۸۸)**

۱) $\mathrm{tr}A = ۱$
۲) A پوچ ــ توان است.
۳) $\mathrm{tr}(BA) \leq ۱۰$
۴) A خود ــ توان است.

۵۵. **دو ماتریس ناصفر** $A, B \in \mathcal{M}_n$ **در رابطهٔ** $ABA = O$ **صدق می‌کنند. در این صورت** $\mathrm{tr}(I + BA)$ **برابر است با** **(ریاضی ۸۸)**

۱) $-n$ ۲) $-n/۲$ ۳) $n/۲$ ۴) n

۵۶. **دو ماتریس** $A, B \in \mathcal{M}_n$ **به گونه‌ای هستند که** $A^t = A$ **و** $B^t = -B$. **کدام گزینه نادرست است؟** **(ریاضی ۸۹)**

۱) $A^pB^qA^p$ متقارن است هرگاه q زوج باشد.
۲) $AB - BA$ متقارن است.
۳) $AB + BA$ پادمتقارن است.
۴) $B^pA^qB^r$ پادمتقارن است هرگاه p و r زوج باشند.

۵۷. **اگر** $A \in \mathcal{M}_{mn}$، $B \in \mathcal{M}_{np}$ **و** $AB = O$، **آنگاه** **(ریاضی ۸۹)**

۱) $r(A) + r(B) > n$
۲) $r(A) + r(B) \leq n$
۳) $r(A) + r(B) < n$
۴) $r(A) + r(B) \geq n$

۵۸. **رتبهٔ ماتریس** $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۳ & -۱ \end{bmatrix}$ **برابر است با** **(ریاضی ۸۹)**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۹

۵۹. **اگر ماتریس** $A \in \mathcal{M}_{mn}$ **وارون راست داشته باشد، آنگاه** $r(A)$ **برابر است با** **(ریاضی ۹۰)**

۱) m
۲) n
۳) $\max\{m, n\}$
۴) $m + n$

۶۰. اگر تعداد سطرهای دو ماتریس A و B یکسان باشند، آنگاه رتبهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} A & B \\ ۲A & -۵B \end{bmatrix}$ برابر است با (ریاضی ۹۰)

۱) $r(A).r(B)$
۲) $r(A)+r(B)$
۳) $|r(A)-r(B)|$
۴) $۲r(A)+۵r(B)$

۶۱. فرض کنیم $\{x, y\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای $\mathbb{R}^۲$ باشد و $A = xy^t$. در این صورت $r(A)$ و $r(A^۲)$ به ترتیب برابرند با (ریاضی ۹۰)

۱) ۰ و ۱
۲) ۱ و ۰
۳) ۰ و ۰
۴) ۱ و ۱

۶۲. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{M}_n$. کدام گزاره نادرست است؟ (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $r(AB-BA) \leq ۲\min\{r(A), r(B)\}$
۲) $r(AB-BA) \leq r(A)+r(B)$
۳) $|r(AB)-r(BA)| \leq r(AB-BA)$
۴) $r(AB-BA) \leq \lfloor n/۲ \rfloor$

۶۳. فرض کنیم $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_n$ باشد. اگر $A(i|j)$ ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام در A باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟ (دکتری ریاضی ۹۱)

۱) $f'(x) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} x \det(xI - A(i|j))$

۲) $f'(x) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} \det(xI - A(i|j))$

۳) $f'(x) = \sum_{j=۱}^{n} x \det(xI - A(j|j))$

۴) $f'(x) = \sum_{j=۱}^{n} \det(xI - A(j|j))$

۶۴. ماتریس $D=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۷ \end{bmatrix}$ و ماتریس وارون‌پذیر $P\in\mathcal{M}_۲$ به گونه‌ای هستند که $A=PDP^{-۱}$. در این صورت ماتریس $۵I-۳A+A^۲$ با کدام ماتریس زیر متشابه است؟ **(ریاضی ۹۲)**

۱) $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & -۳۳ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & ۳۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & -۳۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳۳ \end{bmatrix}$

۶۵. ماتریس $A\in\mathcal{M}_n$ در رابطهٔ $A=A^{-۱}$ صدق می‌کند. در این صورت **(ریاضی ۹۲)**

۱) $\frac{۱}{۲}(I-A)$ خود – توان است. ۲) $I-A$ خود – توان است.

۳) $۲I-A$ خود – توان است. ۴) $I+A$ خود – توان است.

۶۶. فرض کنیم $n\geq ۲$ و $A\in\mathcal{M}_n$. شرط لازم و کافی برای اینکه به ازای هر $B\in\mathcal{M}_n$ داشته باشیم $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}A.\mathrm{tr}B$ آن است که **(ریاضی ۹۲)**

۱) $\mathrm{tr}A=۰$ ۲) $\mathrm{tr}A^۲=۰$

۳) $A=O$ ۴) A پوچ – توان باشد.

۶۷. فرض کنیم $A\in\mathcal{M}_{۵\times۶}$، $B\in\mathcal{M}_{۶\times۵}$ و $O=(AB)^{۱۰۰}$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟ **(ریاضی ۹۲)**

۱) $(AB)^۴=O$ ۲) $(BA)^۶=O$ ۳) $\det(BA)=۰$ ۴) $\mathrm{tr}(AB)=۰$

۶۸. اگر

$$f(x)=\det\begin{bmatrix} x^۳ & x^۲ & x & ۱ \\ ۲۷ & ۹ & ۳ & ۱ \\ ۸ & ۴ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

آنگاه $f(x)$ برابر است با **(ریاضی ۹۲)**

۱) $-۲(x-۱)(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۳})$ ۲) $۲(x-۱)(x-\sqrt{۲})(x-\sqrt{۳})$

۳) $-۲(x-۱)(x-۲)(x-۳)$ ۴) $۲(x-۱)(x-۲)(x-۳)$

۶۹. اگر

$$A=\begin{bmatrix} t & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & t & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & t & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_۴(\mathbb{R})$$

و $r(A)=۳$، آنگاه t برابر است با (دکتری ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۳- ۴) ۱-

۷۰. اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_n$ پادمتقارن باشد، آنگاه $\operatorname{adj}A$ ... (دکتری ریاضی ۹۲)

۱) متقارن است.

۲) پادمتقارن است.

۳) متقارن است هرگاه n فرد باشد و پادمتقارن است هرگاه n زوج باشد.

۴) پادمتقارن است هرگاه n فرد باشد و متقارن است هرگاه n زوج باشد.

۷۱. فرض کنیم A ماتریسی ۱۰×۱۰ با درایه‌های ±۱ باشد. در این صورت (دکتری ریاضی ۹۲)

۱) $۳^۹ \mid \det A$ ۲) $۵^۹ \mid \det A$ ۳) $۷^۹ \mid \det A$ ۴) $۲^۹ \mid \det A$

۷۲. فرض کنیم $A \in \mathcal{M}_n$ $(n \geq ۲)$. در این صورت شرط لازم و کافی برای اینکه بـه ازای هـر $B \in \mathcal{M}_n$ داشته باشیم $\det(A+B)=\det A+\det B$ آن است که (دکتری ریاضی ۹۲)

۱) $\det A=۰$ ۲) $A=O$

۳) $\operatorname{tr}A=۰$ ۴) A پوچ – توان باشد.

۷۳. ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای است که به ازای هر ستون X داریــم $X^tAX=۰$. در این صورت (ریاضی و آمار ۹۳)

۱) $A^t=-A$ ۲) $A^tA^۲=O$ ۳) $A^t=A$ ۴) $A=O$

۷۴. معادلهٔ $X^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ چند جواب در $\mathcal{M}_۲$ دارد؟ (علوم کامپیوتر ۹۳)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بینهایت

۷۵. اگر دو ماتریس $A,B \in \mathcal{M}_{۱۰}$ در رابطهٔ $ABA = A$ صدق کنند، آنگاه (دکتری ریاضی ۹۳)

۱) $۰ \le \operatorname{tr}(AB) \le ۱۰$
۲) $\operatorname{tr}(AB) = ۰$
۳) $۵ \le \operatorname{tr}(AB) \le ۱۵$
۴) $\operatorname{tr}(AB) \ge ۱۰$

۷۶. ماتریس سطری حقیقی $X = [۱ \quad ۰ \quad a \quad ۱ \quad b]$ مفروض است. در این صورت پوچی ماتریس $X^t X$ برابر است با (ریاضی و آمار ۹۴)

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲ هرگاه $a = b = ۰$
۴) ۱ هرگاه $a = b = ۱$

۷۷. ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای است که $A^۲ \neq O$ ، $A^۳ = O$ و

$$(I + ۲A)^{-۱} = I + \alpha A + \beta A^۲$$

در این صورت (علوم کامپیوتر ۹۴)

۱) $\alpha = -۲$ ، $\beta = ۴$
۲) $\alpha = ۲$ ، $\beta = -۴$
۳) $\alpha = -۲$ ، $\beta = -۴$
۴) $\alpha = ۲$ ، $\beta = ۴$

۷۸. فرض کنیم ماتریس $A \in \mathcal{M}_۲$ به گونه‌ای باشد که $\det A(I + A) = ۵ + \det A$. در این صورت $\operatorname{tr} A$ برابر است با (علوم کامپیوتر ۹۴)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۷۹. ماتریس‌های حقیقی ناصفر $A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲۰} \in \mathcal{M}_{۱۰}$ در رابطهٔ $A_۱ A_۲ \ldots A_{۲۰} = O$ صدق می‌کنند. حداکثر مقدار $\sum_{i=۱}^{۲۰} r(A_i)$ کدام است؟ (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) ۵۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۹۰
۴) ۱۹۹

۸۰. دو ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_{۱۰}$ و $B \in \mathcal{M}_{۱۲}$ به گونه‌ای هستند که $\det A = ۲$ و $\det B = ۳$. اگر حاصلضرب (کرونکر) $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{kl})$ به صورت $A \times B = (a_{ij}B)$ تعریف شود، آنگاه $\det(A \times B)$ برابر است با (دکتری ریاضی ۹۴)

۱) $۲^{۱۲}.۳^{۱۰}$
۲) $۲^{۱۰}.۳^{۱۲}$
۳) $۶^{۱۰}$
۴) $۱۲^{۱۰}$

پیوست ۲)

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل ۱

۱. گزینهٔ (۳).
قضیهٔ ۸۸.۱ را ببینید.

۲. گزینهٔ (۴).
مثال ۵۶.۱ (یک) را ببینید.

۳. گزینهٔ (۴).

تذکر بعد از مثال ۳۸.۱ را (که در آن $\lambda = ۱/۲$) ببینید. از این گذشته، $(I - \frac{۱}{۲}A)^{-۱} = I + A$.

۴. گزینهٔ (۱).

چون $r(A) = n$، پس A وارون‌پذیر است و اگر دو طرف $AB = O$ را از چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنیم می‌بینیم که $B = O$.

۵. گزینهٔ (۳).
از فرض مسأله نتیجه می‌شود که $|A|.|B| = -۱$ و از این رو،

$$A + B = AB^tB + AA^tB = A(B^t + A^t)B = A(A+B)^tB$$
$$\Rightarrow\ |A+B| = |A|.|B|.\left|(A+B)^t\right|$$
$$\Rightarrow\ |A+B| = -|A+B|\ \Rightarrow\ |A+B| = ۰$$

۶. گزینهٔ (۴).
مثال ۲۵.۱ (ج) نشان می‌دهد که A پادمتقارن است و مثال ۵۶.۱ (یک) نشان می‌دهد که n زوج است.

۷. گزینهٔ (۱).
چون A پوچ – توان است، همهٔ ویژه – مقدارهای آن صفر هستند (مثال ۱۲.۶ (پنج)) و از این رو، $\mathrm{tr}A = ۰$. بنابراین،

$$\mathrm{tr}(I + A) = \mathrm{tr}I + \mathrm{tr}A = n$$

۸. گزینهٔ (۴).
می‌دانیم که اگر دو ماتریس $A, B \in \mathcal{M}_n$ متشابه باشند، آنگاه $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$ (قضیهٔ ۹۲.۱ (چ)).

۹. گزینهٔ (۱).
مثال ۶۸.۱ (سه) را ببینید.

۱۰. گزینهٔ (۲).

در حقیقت فرض کنیم A وارون‌پذیر باشد. در این صورت $\mathrm{tr}(A^{-1}BA) = \mathrm{tr}B$ و از این رو،

$$AB - BA = A \;\Rightarrow\; B - A^{-1}BA = I \;\overset{\mathrm{tr}}{\Rightarrow}\; 0 = n$$

این تناقض نشان می‌دهد که A تکین است.

۱۱. گزینهٔ (۴).

قضیهٔ ۹۱.۱ را ببینید.

۱۲. گزینهٔ (۴).

در حقیقت

$$B^{-1} + A^{-1} \text{ وارون‌پذیر } \Rightarrow A^{-1}(A+B)B^{-1} \text{ وارون‌پذیر } \Rightarrow A+B \text{ وارون‌پذیر}$$

۱۳. گزینهٔ (۲).

به طور کلی فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ باشد که در آن همهٔ درایه‌های قطر اصلی برابر با a و همهٔ درایه‌های دیگر برابر با b هستند. اگر همهٔ ستون‌ها را به ستون اول بیفزاییم، سپس در ستون اول از $a + (n-1)b$ فاکتور بگیریم و سرانجام b برابر ستون اول را از ستون‌های دیگر کم کنیم، می‌بینیم که

$$\det A = (-1)^{n-1}\Big(a + (n-1)b\Big)(a-b)$$

۱۴. گزینهٔ (۱).

مثال ۵۶.۱ (دو) را ببینید.

۱۵. گزینهٔ (۲).

با استفاده از عمل‌های سطری مقدماتی می‌بینیم که

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۶. گزینهٔ (۳).

مثال ۹۶.۳ (دو) را ببینید.

۱۷. گزینهٔ (؟).

ماتریس C با رتبهٔ ۱ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $A = \frac{1}{2}C$ و $B = \frac{1}{3}C$. اکنون می‌بینیم که هیچکدام از گزینه‌ها درست نیست.

۱۸. گزینهٔ (۳).

ماتریس‌های مقدماتی E و F در تذکر ۹۸.۱ (یک) را در نظر می‌گیریم. اکنون کافی است توجه کنیم که

$$B = EA \Rightarrow B^{-1} = A^{-1}E^{-1} \Rightarrow B^{-1} = A^{-1}F$$

۱۹. گزینهٔ (۱).

مثال ۹۵.۱ را ببینید.

۲۰. گزینهٔ (۳).

با توجه به $A^t = -A$ می‌بینیم که

$$(\text{adj}A)^t = \text{adj}A^t = \text{adj}(-A) = (-1)^{n-1}\text{adj}A$$

پس اگر n فرد باشد، آنگاه $\text{adj}A$ متقارن و اگر n زوج باشد، آنگاه $\text{adj}A$ پادمتقارن است.

۲۱. گزینهٔ (۱).

از چپ، دترمینان اولی برابر با ۱۲− و دترمینان دومی برابر با ۶ است.

۲۲. گزینهٔ (۲).

با فرض $f(t) = t^2 + 2t - 2$ داریم $f(A) = O$. اکنون کافی است مثال ۳۷.۱ (سه) را به کار ببریم. از این گذشته، داریم $A^{-1} = I + \frac{1}{2}A$ (چرا؟).

۲۳. گزینهٔ (۱).

قرار می‌دهیم $D = A^{-1}B$ و می‌بینیم که

$$cA + B \text{ تکین است } \Leftrightarrow -A(-cI - D) \text{ تکین است } \Leftrightarrow (-cI - D) \text{ تکین است}$$

$$\Leftrightarrow (-c) \text{ ویژه – مقدار } D \text{ است}$$

ولی می‌دانیم که D حداکثر n ویژه – مقدار دارد.

۲۴. گزینهٔ (۳).

قضیهٔ ۸۲.۳ را ببینید.

۲۵. گزینهٔ (۱).

مشابه تست شمارهٔ ۸.

۲۶. گزینهٔ (۴).

با فرض $\operatorname{adj}A = (b_{ij})$ می‌دانیم که $b_{ij} = A_{ji}$ کـه در آن A_{ji} همـسازهٔ درایـهٔ (j,i) در A است. بنابراین،

$$b_{۲۳} = A_{۳۲} = -\begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۷$$

۲۷. گزینهٔ (؟).

با توجه به قضیه‌های ۹۱.۱ و ۹۲.۱ همهٔ گزینه‌ها درست‌اند.

۲۸. گزینهٔ (۲).

مثال ۶۸.۱ (۳) را ببینید.

۲۹. گزینهٔ (۱).

مشابه تست شمارهٔ ۱۹.

۳۰. گزینهٔ (۴).

فرع ۲۰ در پیوست فصل ۴ را ببینید.

۳۱. گزینهٔ (۴).

قضیهٔ ۹۴.۳ را ببینید.

۳۲. گزینهٔ (۱).

با توجه به قضیهٔ ۸۲.۳ داریم

$$r(P) = r\Big(P(I-(P+Q))\Big) = r(PQ)\ ,\ r(Q) = r\Big((I-(P+Q))Q\Big) = r(PQ)$$

۳۳. گزینهٔ (۱).

با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \det(I+A) = ۱ + \det A \ &\Leftrightarrow\ (a+۱)(d+۱) - bc = ۱ + ad - bc \\ &\Leftrightarrow\ a + d = ۰ \end{aligned}$$

۳۴. گزینهٔ (۲).

با توجه به $A = \begin{bmatrix} x_۱ + ۱ & x_۱ & x_۱ \\ x_۲ & x_۲ + ۱ & x_۲ \\ x_۳ & x_۳ & x_۳ + ۱ \end{bmatrix}$ به آسانی $\det A$ محاسبه می‌شود.

«روش تستی». قرار می‌دهیم $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۱$.

۳۵. گزینهٔ (۱).

فرض کنیم $\lambda = \mathrm{tr}C$. چون $r(C) = ۱$، بنابر مثال ۷۷.۳ (چهار) داریم $C^۲ = \lambda C$. ولی آشکارا $\lambda = ۰$. پس $C^۲ = O$.

۳۶. گزینهٔ (۱).

در حقیقت $\mathrm{tr}(AB - BA) = ۰$، در حالی که اثر ماتریس طرف راست برابر است با $۲ + \sqrt{۲}$.

۳۷. گزینه‌های (۳) و (۴).

با فرض $f(t) = ۵ - ۳t + t^۲$، $f(A)$ با $f(D)$ یعنی $\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳۳ \end{bmatrix}$ متشابه است. از سوی دیگر، با توجه به مسألهٔ حل شدهٔ ۳۱ (الف)، ماتریس اخیر هم با $\begin{bmatrix} ۳۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ متشابه است.

۳۸. گزینهٔ (۱).

با توجه به قضیهٔ ۹۴.۳ (و با فرض $n = ۱$) داریم

$$r(uv^t) \geq r(u) + r(v^t) - ۱ = ۱$$

از سوی دیگر، روشن است که $r(uv^t) \leq r(u) = ۱$.

۳۹. گزینهٔ (۱).

مثال ۵۶.۱ (دو) را ببینید.

۴۰. گزینهٔ (۴).

با استفاده از قضیهٔ ۸۵.۱ می‌بینیم که

$$\mathrm{tr}(AA^t) = n(۱^۲ + ۲^۲ + \ldots + n^۲) = \frac{n^۲(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

۴۱. گزینهٔ (۳).

با استفاده از مثال ۵۶.۱ (یک) می‌بینیم که n زوج است. اکنون با توجه به تست شمارهٔ ۲۰ می‌بینیم که $\mathrm{adj}A$ پادمتقارن است.

۴۲. گزینهٔ (۱).

مشابه تست شمارهٔ ۱۹.

۴۳. گزینهٔ (۴).

هر درایهٔ قطر اصلی، هم می‌تواند صفر باشد هم ۱ (زیرا در $\mathbb{Z}_۲$ داریم $۰ = ۱ + ۱$). هـر درایـهٔ بالای قطر اصلی نیز هم می‌تواند صفر باشد هم ۱. به این ترتیب برای هر یک از ۶ درایهٔ قطـر اصـلی و بـالای آن ۲ حالـت داریــم و بنــابراین، در کــل $۲^۶ = ۶۴$ مــاتریس پــاد متقــارن $A \in \mathcal{M}_۳(\mathbb{Z}_۲)$ وجود دارد.

● **تذکر**. تعداد ماتریس‌های متقارن $A \in \mathcal{M}_۳(\mathbb{Z}_۲)$ نیز برابر است با $۲^۶ = ۶۴$.

۴۴. گزینهٔ (۴).

$\det A$ و $\det A^{-۱}$ هـر دو، عـدد صـحیح هـستند و حاصلضربـشان برابـر اسـت بـا (زیـرا $AA^{-۱} = I$). پس $\det A = \pm ۱$ یا $|\det A| = ۱$.

۴۵. گزینهٔ (۴).

قضیهٔ ۷۲.۱ (الف) را ببینید.

۴۶. گزینهٔ (۱).

قضیهٔ ۱۱۳.۱ را ببینید.

۴۷. گزینهٔ (۳).

چون اثر هر ماتریس پوچ – توان برابر است بـا صـفر (تـست شـمارهٔ ۷ را ببینیـد)، پـس اثـر خواسته شده برابر است با $\operatorname{tr} I$، یعنی ۷.

۴۸. گزینهٔ (۳).

کافی است حالت $r = ۱$ را در نظر بگیـریم. فـرض کـنـیم $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$، $a_{kl} = \alpha$ و اینکه α را به β تبدیل کنیم. معنی ایـن سـخن ایـن اسـت کـه مـاتریس A بـه مـاتریس $B = A + (\beta - \alpha)E_{kl}$ (که در آن E_{kl} یکای ماتریسی (k,l) است) تبدیل شـود. اکنـون کافی است توجه کنیم که

$$\left|r(A) - r(E_{kl})\right| \le r(B) \le r(A) + r(E_{kl})$$

یا

$$r(A) - ۱ \le r(B) \le r(A) + ۱$$

۴۹. گزینهٔ (۴).

تست شمارهٔ ۱۳ را ببینید.

۵۰. گزینهٔ (۲).

از فرض نتیجه می‌شود که $(\det A)^{۲} = n^n$ یا $|\det A| = n^{n/۲}$. چون طرف چپ برابری اخیر عددی صحیح است پس یا باید $n = ۲k$ یا $n = (۲l+۱)^{۲}$.

۵۱. گزینهٔ (۳).

ماتریس $B = A - A^t$ آشکارا پادمتقارن است. اکنون قضیهٔ ۸۵.۱ نشان می‌دهد که رابطهٔ $B^{۲} = O$ یا $BB^t = O$ مستلزم $B = O$ است. بنابراین، $A = A^t$. بدین سان، گزینهٔ (۳) به صورت $A = O$ در می‌آید که نادرست است.

۵۲. گزینهٔ (۲).

قضیهٔ ۹۱.۳ را ببینید.

۵۳. گزینهٔ (۱).

می‌بینیم که

$$AB \neq O \;\Rightarrow\; ۱ \leq r(AB) \leq r(A) = ۱ \;\Rightarrow\; r(AB) = ۱$$

۵۴. گزینهٔ (۳).

بنابر مثال ۶۰.۶ (یک) می‌دانیم که اگر ماتریس $C \in \mathcal{M}_n$ خود – توان باشد، آنگاه $\operatorname{tr} C = r(C)$. اکنون می‌بینیم که

$$ABA = A \;\Rightarrow\; (BA)^{۲} = BA \;\Rightarrow\; \operatorname{tr}(BA) = r(BA) \leq ۱۰$$

۵۵. گزینهٔ (۴).

می‌دانیم که اثر هر ماتریس پوچ – توان برابر است با صفر (تست شمارهٔ ۷). از سوی دیگر،

$$ABA = O \;\Rightarrow\; (BA)^{۲} = O \;\Rightarrow\; BA \text{ پوچ - توان } \;\Rightarrow\; \operatorname{tr}(I + BA) = n$$

۵۶. گزینهٔ (۴).

در حقیقت با فرض $C = B^p A^q B^r$ می‌بینیم که $C^t = B^r A^q B^p$ و از این رو، رابطهٔ $C^t = -C$ برقرار نیست.

۵۷. گزینهٔ (۲).

تست ۱۶ را ببینید.

۵۸. گزینهٔ (۲).

مشابه تست ۱۵.

۵۹. گزینهٔ (۱).

تست ۵۲ را ببینید.

۶۰. گزینهٔ (۲).

با استفاده از عمل‌های سطری مقدماتی می‌بینیم که

$$\begin{bmatrix} A & B \\ ۲A & -۵B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ O & -۷B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

فرض کنیم r و s به ترتیب تعداد سطرهای مستقل خطی A و B باشند. در این صورت روشن است که تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ برابر است با $r+s$.

۶۱. گزینهٔ (۲).

روشن است که $r(x) = r(y) = ۱$. بنابراین، با توجه به قضیهٔ ۹۴.۳ (و با فرض $n = ۱$) داریم

$$۱ = r(x) \geq r(xy^t) \geq r(x) + r(y^t) - ۱ = ۱ \ \Rightarrow\ r(A) = ۱$$

از سوی دیگر، با توجه به فرض داریم $y^t x = ۰$. پس

$$A^۲ = (xy^t)(xy^t) = x(y^t x)y^t = O \ \Rightarrow\ r(A^۲) = ۰$$

۶۲. گزینهٔ (۴).

مثال نقض برای (۴): $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$.

برای درستی گزینه‌های دیگر، تذکر ۸۳.۳ و قضیهٔ ۸۴.۳ را به کار ببرید.

۶۳. گزینهٔ (۴).

اگر به ازای هر دو اندیس $n \geq i, j \geq ۱$، $f_{ij}(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(x) = \det\left(f_{ij}(x)\right)$، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که

$$f'(x) = \begin{vmatrix} f'_{۱۱} & f'_{۱۲} & \cdots & f'_{۱n} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} & \cdots & f_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n۱} & f_{n۲} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} & \cdots & f_{۱n} \\ f'_{۲۱} & f'_{۲۲} & \cdots & f'_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n۱} & f_{n۲} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} f_{۱۱} & f_{۱۲} & \cdots & f_{۱n} \\ f_{۲۱} & f_{۲۲} & \cdots & f_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n۱} & f'_{n۲} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}$$

اکنون فرض کنیم $f(x)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ $A=(a_{ij})$ باشد، یعنی

$$f(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix} x-a_{۱۱} & -a_{۱۲} & \dots & -a_{۱n} \\ -a_{۲۱} & x-a_{۲۲} & \dots & -a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n۱} & -a_{n۲} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

اگر مطابق قاعدهٔ قبل از $f(x)$ مشتق بگیریم، می‌بینیم که

$$f'(x)=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ -a_{۲۱} & x-a_{۲۲} & \dots & -a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n۱} & -a_{n۲} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x-a_{۱۱} & -a_{۱۲} & \dots & -a_{۱n} \\ ۰ & ۱ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n۱} & -a_{n۲} & \dots & x-a_{nn} \end{vmatrix}+\dots$$

$$=\det(xI-M_{۱۱})+\det(xI-M_{۲۲})+\dots+\det(xI-M_{nn})$$

که در آن M_{jj} ماتریس حاصل از حذف سطر jام و ستون jام در A است.

۶۴. گزینهٔ (۴).

تست ۳۷ را ببینید.

۶۵. گزینهٔ (۱).

در حقیقت از فرض $A=A^{-۱}$ نتیجه می‌شود که $A^{۲}=I$ و از این رو،

$$\left(\frac{۱}{۲}(I-A)\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}(I^{۲}-۲IA+A^{۲})=\frac{۱}{۲}(I-A)$$

۶۶. گزینهٔ (۳).

قرار می‌دهیم $\mathrm{tr}A=\lambda$. بنابراین، به ازای هر $B\in\mathcal{M}_n$ داریم

$$\mathrm{tr}(AB)=(\mathrm{tr}A).(\mathrm{tr}B)\ \Rightarrow\ \mathrm{tr}\Big((A-\lambda I)B\Big)=۰$$

اکنون مسألهٔ حل شدهٔ ۲۵ (یک) نشان می‌دهد که $A-\lambda I=O$. اگر از این رابطه tr بگیریم، می‌بینیم که $\lambda=۰$ و از این رو، $A=O$.

۶۷. گزینهٔ (۱).

چون AB پوچ – توان است و $AB\in\mathcal{M}_۵$، پس بنابر مثال ۴۶.۳ داریم $(AB)^{۵}=O$.

● **تذکر.** چون AB پوچ – توان است، $\mathrm{tr}(AB)=۰$. همچنین،

$$(BA)^{۶}=B(AB)^{۵}A=O\ \Rightarrow\ \det(BA)=۰$$

۶۸. گزینهٔ (۴).

با فرض $a_{۱} = x$، $a_{۲} = ۳$، $a_{۳} = ۲$ و $a_{۴} = ۱$، دستور دترمینـان واندرمونـد (مـسألهٔ حـل شدهٔ ۱۷ و تمرین ۹) را به کار ببرید.

۶۹. گزینهٔ (۳).

با توجه به توضیحات ارائه شده در حل تست ۱۳ داریم $\det A = (t-۱)^{۳}(t+۳)$. بـه ازای $t = -۳$ می‌بینیم که $r(A) = ۳$.

۷۰. گزینهٔ (۳).

تست ۲۰ را ببینید.

۷۱. گزینهٔ (۴).

اگر سطر اول را به ۹ سطر دیگر بیفزاییم و در هر سطر از عامل ۲ فاکتور بگیـریم، مـی‌بینـیم که $\det A = ۲^{۹}.k$.

۷۲. گزینهٔ (۲).

اگر شرط مفروض برقرار باشد، آنگاه با انتخاب $B = A$ مـی‌بینـیم کـه $|A| ۲ = |A|^{n} ۲$ و از ایـن رو، $|A| = ۰$ یـا $r(A) < n$. فـرض کنـیم اتفاقـاً $r(A) = r \geq ۱$ و اینکـه سـطرهای $R_{i_۱}$، ... ، R_{i_r} در A استقلال خطی داشته باشند. بردارهـای $\varepsilon_{r+۱}$، ... ، ε_n متعلـق بـه $\mathbb{K}^n$ را طوری اختیار می‌کنیم که مجموعهٔ

$$\{R_{i_۱}, \dots, R_{i_r}, \varepsilon_{r+۱}, \dots, \varepsilon_n\}$$

پایه‌ای بـرای $\mathbb{K}^n$ بـشود. اکنـون $\varepsilon_{r+۱}$، ... ، ε_n را بـه سـطرهای دیگـر A مـی‌افـزاییم و مـاتریس حاصـل را B مـی‌نـامیم. مـاتریس $A+B$ آشـکارا وارون‌پـذیر اسـت و از ایـن رو، $|A+B| \neq ۰$. از سوی دیگر، داریم $|A| + |B| = ۰$. این نشان می‌دهد که فـرض $r(A) \geq ۱$ ما را به تناقض می‌کشاند. بنابراین، باید $r(A) = ۰$ یا $A = O$.

۷۳. گزینهٔ (۱).

مثال ۲۵.۱ (ج) را ببینید.

۷۴. گزینهٔ (۱).

با توجه به فرض می‌بینیم که $X^۴ = O$. پس ماتریس X پوچ ـ توان است. چون $X \in \mathcal{M}_۲$، باید $X^۲ = O$ و این هم تناقض است. بدین سان، معادلهٔ مفروض در $\mathcal{M}_۲$ جواب ندارد.

۷۵. گزینهٔ (۱).

تست ۵۴ را ببینید.

۷۶. گزینهٔ (۱).

از یک سو داریم $r(X^tX) \leq r(X) = ۱$ و از سوی دیگر،

$$r(X^tX) = ۰ \;\Rightarrow\; X^tX = O \;\Rightarrow\; \mathrm{tr}(X^tX) = ۰ \;\Rightarrow\; ۲ + a^۲ + b^۲ = ۰$$

این تناقض نشان می‌دهد که $r(X^tX) \geq ۱$. پس $r(X^tX) = ۱$. سرانجام،

$$n(X^tX) = ۵ - r(X^tX) = ۴$$

۷۷. گزینهٔ (۱).

A پوچ ـ توان با مرتبهٔ پوچ ـ توانی ۳ است. پس $B = -۲A$ نیز چنین است. اکنون با استفاده از مثال ۴۳.۱ (ج) می‌بینیم که

$$(I + ۲A)^{-۱} = (I - B)^{-۱} = I + B + B^۲ = I - ۲A + ۴A^۲$$
$$\Rightarrow I + \alpha A + \beta A^۲ = I - ۲A + ۴A^۲ \Rightarrow \alpha = -۲, \beta = ۴$$

۷۸. گزینهٔ (۱).

با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌بینیم که

$$\text{فرض مسأله} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+۱ & b \\ c & d+۱ \end{vmatrix} = ۵ + (ad - bc) \;\Rightarrow\; a + d = ۴$$

● **تمرین**. این تست را با استفاده از «مفهوم چندجمله‌ای مشخصه» حل کنید.

۷۹. گزینهٔ (۳).

بنابر قضیهٔ ۹۴.۳ می‌دانیم که

$$A, B \in \mathcal{M}_n \;\Rightarrow\; r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$$

مجموعۀ پرسش‌های

چهارگزینه‌ای سال ۱۳۹۵

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای کارشناسی ارشد ریاضی و آمار (۱۳۹۵)

۱. کدام ماتریس زیر را می‌توان به حاصلضربی از ماتریس‌های مقدماتی تجزیه کرد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۴ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۲. معادلهٔ $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = ۲XY^۲ - YXY - Y^۲X$ **چند جفت جواب** (X,Y) **در** $\mathcal{M}_۲$ **دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

۳. رتبهٔ عملگر خطی

$$T : \mathcal{M}_۴ \to \mathcal{M}_۴ \quad , \quad TA = A + A^t$$

کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۴. A **ماتریسی** ۱۰×۱۰ **است که یک زیر ماتریس صفر** $r \times s$ **دارد. کدام گزینه درست است؟**

۱) اگر $r + s = ۹$، آنگاه $\det A \neq ۰$.
۲) اگر $r + s = ۱۰$، آنگاه $\det A = ۰$.
۳) اگر $r + s = ۱۱$، آنگاه $\det A = ۰$.
۴) اگر $r + s = ۱۰$، آنگاه $\det A \neq ۰$.

۵. ماتریس $A \in \mathcal{M}_۳(\mathbb{C})$ **به‌گونه‌ای است که** $\det A = ۱$ **و** $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^{-۱} = ۰$**. در این صورت کدام گزاره درست است؟**

۱) $A^۲ = I$
۲) $A^۲ + A + I$ وارون‌پذیر نیست.
۳) $A^۳ = A + I$
۴) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۶. فرض کنیم A **یک ماتریس** ۲۰×۲۰ **باشد که درایه‌های قطر اصلی آن همگی صفرند و درایه‌های دیگرش همگی ۱ و ۱- هستند. در این صورت**

۱) $r(A) \leq ۹$ ۲) $r(A) = ۱۰$ ۳) $r(A) = ۱۹$ ۴) $r(A) = ۲۰$

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر (۱۳۹۵)

۱. رتبهٔ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & a & a \\ b & ۰ & a \\ b & b & b \end{bmatrix}$ **کدام عدد نمی‌تواند باشد؟**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. ماتریس ناصفر $A \in \mathcal{M}_۲$ **در رابطهٔ** $A^۲ = 0$ **صدق می‌کند. اگر** $c \in \mathbb{R}$**، آنگاه کدام گزاره در بارهٔ** $\det(cI - A)$ **نادرست است؟**

۱) برابر است با $c^۲ + ۱$.

۲) برابر است با $c^۲$.

۳) برابر است با $\frac{c^۲}{۲}\operatorname{tr}(I + A)$.

۴) برابر است با $\frac{c^۲}{۲}\operatorname{tr}(I - A)$.

۳. اگر سه عدد حقیقی a**،** b **و** c **متمایز باشند، آنگاه کدام ماتریس زیر بر** $\mathbb{R}$ **قطری ـ شدنی است؟**

۱) $\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ b & a & ۰ \\ c & b & a \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ a & ۱ & ۰ \\ c & b & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \\ c & b & ۰ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۱ & ۱ & c \end{bmatrix}$

۴. تحت کدام شرط بر a **و** b**، دستگاه**

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ b & ۳ & b \\ ۲ & ۲ & a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳b \\ ۷ \end{bmatrix}$$

بینهایت جواب دارد؟

۱) $a \neq ۲$، $b \neq ۳$

۲) $a = ۲$، $b \neq ۳$

۳) $a \neq ۲$، $b = ۳$

۴) $a = ۲$، $b = ۳$

۵. ماتریس حقیقی $A \in \mathcal{M}_۲$ به‌گونه‌ای است که $A \neq I$ و $A^۳ = I$. در این صورت $\mathrm{tr}A$ برابر است با

۱) ۱-　　۲) ۰　　۳) ۱　　۴) ۲

۶. فرض کنیم ماتریس مربعی A وارون‌پذیر و ماتریس B از تعویض سطرهای iام و jام A به دست آمده باشد. کدام گزاره درست است؟

۱) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام A به دست می‌آید.

۲) $B^{-۱}$ از تعویض سطرهای iام و jام $A^{-۱}$ به دست می‌آید.

۳) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام A به دست می‌آید.

۴) $B^{-۱}$ از تعویض ستون‌های iام و jام $A^{-۱}$ به دست می‌آید.

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای دکتری ریاضی (۱۳۹۵)

۱. بعد زیرفضای برداری تولید شده به وسیلهٔ

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۵ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۲. فرض کنیم U و V دو زیرفضای برداری چهار بعدی متمایز در $\mathbb{R}^۵$ باشند. در این صورت بعد $U \cap V$ برابر است با

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۳. با کدام شرط زیر، دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۲ \\ ۶ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۵ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

جواب دارد؟

۱) $b = ۲a + c$ ۲) $b = ۲a - c$ ۳) $b = ۳(c - a)$ ۴) $b = ۳(c + a)$

۴. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بر هیأت $\mathbb{F}$ با مشخصهٔ ۲ باشد. همچنین، فرض کنیم عملگر خطی $T : V \to V$ به گونه‌ای باشد که $T^۲ = I$. اگر $W = \{v \in V : Tv = v\}$، آنگاه کدام گزینه برای $\dim W$ درست است؟

۱) $\dim W \geq \frac{n}{۲}$ ۲) $\dim W < \frac{n}{۲}$

۳) $\dim W = n - ۱$ ۴) $\dim W = n$

۵. دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ **برابر است با**

۱) ۳۰-   ۲) ۰   ۳) ۳۰   ۴) ۴۸-

۶. فرض کنیم W آن زیرفضایی از $\mathcal{M}_n$ باشد که هر $A \in W$ متقارن است و اینکه

$$C_A(t) = t^n + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + a_1 t + a_0$$

در این صورت $\dim W$ برابر است با

۱) $\frac{(n-1)^2}{4}$ ۲) $\frac{n(n+2)}{4}$ ۳) $\frac{n(n-1)}{2}$ ۴) $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

۷. فضای برداری $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ بر $\mathbb{Z}_2$ و زیرفضای برداری $W \subseteq V$ مفروض‌اند. قرار می‌دهیم

$W' = \{(a,b) : aa' + bb' = 0$ داریم $(a',b') \in W$ به ازای هر$\}$

کدام گزاره درست است؟

۱) $W \bigcap W' = \{0\}$.
۲) $\dim W + \dim W' = 2$.
۳) W' زیرفضای برداری V نیست.
۴) همواره $W' \neq W$.

۸. دو ماتریس خود – توان $A \;,\; B \in \mathcal{M}_n$ به گونه‌ای هستند که $A + B$ نیز خود – توان است. در این صورت

۱) $\text{tr}(AB) = 0$
۲) $\text{tr}A = \text{tr}B$
۳) $I + A$ خود – توان است.
۴) $I + A - B$ خود – توان است.

۹. اگر $W = \{f \in P_{1394} : f(2) = 0\}$، آنگاه $\dim W$ برابر است با

۱) ۱۳۹۲ ۲) ۱۳۹۳ ۳) ۱۳۹۴ ۴) ۱۳۹۵

۱۰. دو زیرفضای برداری U و V در $\mathbb{R}^n$ به‌گونه‌ای هستند که $U \nsubseteq V$ و $V \nsubseteq U$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟ ($L(A)$ زیرفضای برداری تولید شده به وسیلهٔ زیرمجموعهٔ A است.)

۱) $L(U \bigcup V) = U + V$
۲) $L(U \bigcap V) = U \bigcap V$
۳) $L(U \Delta V) = U \Delta V$
۴) $L(U \setminus V) = U$

۱۱. مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت، $\mathbb{R}_+$، را مجهز به دو عمل

$$x \dotplus y == xy \quad , \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad , \quad rx = x^r$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت $\mathbb{R}_+$

۱) یک فضای برداری یک بعدی است.
۲) فضایی برداری نیست.
۳) یک فضای برداری دو بعدی است.
۴) یک فضای برداری نامتناهی – بعد است.

۱۲. اگر $A \in \mathcal{M}_n$ و $A^{۳} = A$، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $r(A) = \mathrm{tr}A^{۲}$ ‏ ۲) $(\mathrm{tr}A)^{۲} = (\mathrm{tr}A^{۲})^{۲}$

۳) $(\mathrm{tr}A^{۲})^{۲} = (\mathrm{tr}A^{۴})^{۲}$ ‏ ۴) $r(A^{۳}) = \mathrm{tr}A^{۲}$

۱۳. ماتریس $A \in \mathcal{M}_{۷}$ به‌گونه‌ای است که $A^{۳} = ۵A^{۲} - ۶A$ و $\mathrm{tr}A = ۸$. در این صورت $r(A)$ برابر است با

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۵

۱۴. A ماتریسی ۱۰×۱۰ است که درایه‌های قطر اصلی آن همگی ۱ و درایه‌های دیگر آن همگی ۱- هستند. در این صورت مجموع درایه‌های $A^{-۱}$ برابر است با

۱) $\frac{-۳}{۲}$ ‏ ۲) -۱ ‏ ۳) $\frac{-۵}{۴}$ ‏ ۴) $\frac{-۳}{۴}$

۱۵. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱۳۹۴ & ۱ & \sqrt{۲} & -۴ \\ ۴ & ۱۳۹۵ & ۹ & \sqrt{۵} \\ -\sqrt{۷} & ۳ & ۱۳۹۶ & ۹۶ \\ ۱۳ & ۹۷ & \sqrt{۳} & ۱۳۹۷ \end{bmatrix}$$

در این صورت

۱) A تکین و ۱ ویژه – مقدار آن است. ‏ ۲) A وارون‌پذیر و ۱ ویژه – مقدار آن است.

۳) A تکین و ۱ ویژه – مقدار آن نیست. ‏ ۴) A وارون‌پذیر و ۱ ویژه – مقدار آن نیست.

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای دکتری علوم کامپیوتر (۱۳۹۵)

۱. پوچی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۳ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲. فرض کنیم U و W دو زیرفضای برداری ۴ بعدی متمایز فضای برداری ۶ بعدی V باشند. در این صورت بعد $U \bigcap W$ برابر است با

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۲ یا ۳ ۳) ۳ یا ۴ ۴) ۱ یا ۲ یا ۳

۳. اگر $V = \mathcal{M}_۲ \times \mathcal{M}_۳$ باشد، آنگاه $\dim V$ برابر است با

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۳ ۴) ۳۶

۴. درجهٔ چندجمله‌ای مینیمال

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵. به ازای کدام مقدار b، بردار $(-۱, ۲, ۰, ۵)$ در فضای تولید شده به وسیلهٔ بردارهای

$$(۱, ۱, -۳, ۲) \quad , \quad (-۱, ۰, ۱, ۱) \quad , \quad (۱, -۱, b, -۱)$$

قرار دارد؟

۱) $b \neq ۱$ ۲) $b \neq ۳$
۳) $b = ۲$ ۴) چنین bای وجود ندارد.

۶. اگر ماتریس $A \in \mathcal{M}_۳$ به گونه‌ای باشد که $\det A = ۱$ و $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A^{-۱} = ۰$، آنگاه

۱) $A^۲ = I$ ۲) $A^۴ = I$
۳) $A + A^{-۱} = I$ ۴) $A^۳ = I$

۷. فضای برداری متناهی-بعد V و عملگر خطی $T : V \to V$ مفروض‌اند. بعد $\operatorname{Ker} T \bigcap T(V)$ کدام است؟

۱) $\dim T(V) - \dim T^{۲}(V)$ ۲) $\dim T^{۲}(V)$

۳) $\dim T(V) - \dim T^{۳}(V)$ ۴) $\dim T(V) - \dim T^{۲}(V) - T^{۳}(V)$

۸. رتبهٔ تبدیل خطی

$$T : P_{۲} \to P_{۳} \quad , \quad (Tf)(x) = ۲f'(x) + ۳\int_{۰}^{x} f(t)dt$$

کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۹. فرض کنیم همهٔ درایه‌های ماتریس $B \in \mathcal{M}_{۳}$ برابر باشند با ۱. ماتریس بلوکی $A = \begin{bmatrix} I & B \\ O & B \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که $A^{۴} = \begin{bmatrix} I & C \\ O & B^{۴} \end{bmatrix}$. در این صورت C برابر است با

۱) $۴۰B$ ۲) $۸۰B$ ۳) $۲۴۲B$ ۴) $۱۲۱B$

۱۰. دو ماتریس ناصفر $A, B \in \mathcal{M}_{۳}$ به‌گونه‌ای هستند که $AB + BA = 0$، در این صورت

۱) $A^{۲} = 0$ ۲) A وارون‌پذیر است.

۳) $\operatorname{tr} A = ۰$ ۴) AB تکین است.

۱۱. اگر ماتریس مربعی A در رابطهٔ $A^{۳} = ۲I$ صدق کند، آنگاه کدام ماتریس زیر ممکن است تکین باشد؟

۱) $A - I$ ۲) $A + ۲I$ ۳) $A^{۲} - ۲A + ۲I$ ۴) $A^{۲} - \sqrt[۳]{۲}\,A$

۱۲. بعد زیرفضای برداری تولید شده به وسیلهٔ ویژه-بردارهای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

برابر است با

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۱۳. ماتریس $A \in \mathcal{M}_۷$ به‌گونه‌ای است که $A^۳ = ۵A^۲ - ۶A$ و $\mathrm{tr}A = ۸$. در این صورت $r(A)$ برابر است با

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

۱۴. A ماتریسی ۸×۸ است که درایه‌های قطر اصلی آن همگی ۱ و درایه‌های دیگر آن همگی ۱− هستند. در این صورت مجموع درایه‌های $A^{-۱}$ برابر است با

۱) $\frac{-۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{-۴}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۵. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} ۱۳۹۴ & ۱ & \sqrt{۲} & -۴ \\ ۴ & ۱۳۹۵ & ۹ & \sqrt{۵} \\ -\sqrt{۷} & ۳ & ۱۳۹۶ & ۹۶ \\ ۱۳ & ۹۷ & \sqrt{۳} & ۱۳۹۷ \end{bmatrix}$$

در این صورت

۱) A تکین و ۱ ویژه – مقدار آن است.   ۲) A وارون‌پذیر و ۱ ویژه – مقدار آن است.

۳) A تکین و ۱ ویژه – مقدار آن نیست.   ۴) A وارون‌پذیر و ۱ ویژه – مقدار آن نیست.

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای سال ۱۳۹۵

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای کارشناسی ارشد ریاضی و آمار (۱۳۹۵)

۱. گزینهٔ (۱).

کافی است توجه کنیم که این ماتریسی وارون‌پذیر است (قضیه ۱۰۹.۱).

۲. گزینهٔ (۱).

در حقیقت اگر ماتریس طرف چپ رابطهٔ مفروض را A بنامیم، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}A &= ۲\mathrm{tr}(XY^{۲}) - \mathrm{tr}(Y\,XY) - \mathrm{tr}(Y^{۲}\,X)\\ &= ۲\mathrm{tr}(XY^{۲}) - \mathrm{tr}(XY^{۲}) - \mathrm{tr}(XY^{۲}) = ۰\end{aligned}$$

درحالی که اثر ماتریس طرف راست برابر است با ۱- .

۳. گزینهٔ (۴).

بنابر مثال ۱۱.۴ (یک) داریم

$$\mathrm{Im}\,T = \left\{B \in \mathcal{M}_{۴} : \text{متقارن } B\right\}$$

اکنون مثال ۵۰.۳ (پنج) نشان می‌دهد که

$$r(t) = \dim \mathrm{Im}\,T = \frac{۴.۵}{۲} = ۱۰$$

۴. گزینهٔ (۳).

همواره می‌توان فرض کرد که این زیرماتریس صفر در گوشهٔ چپ بالای A قرار دارد (چرا؟). از برابری $r + s = ۱۱$ نتیجه می‌شود که $r \geq ۶$ یا $s \geq ۶$ (چرا؟). فرض کنیم $r \geq ۶$ و r سطر اول A را در نظر می‌گیریم. در این وضع، هر ماتریس کهاد $r \times r$ مانند $\mathcal{M}$ که با این r سطر ساخته می‌شود دارای دترمینان صفر است. اکنون قضیهٔ ۶۵.۱ (دستور تعمیم یافتهٔ لاپلاس) نشان می‌دهد که $\det A = ۰$.

۵. گزینهٔ (۲).

با توجه به رابطهٔ $A^{-۱} = \dfrac{۱}{\det A}\mathrm{adj}A$ داریم $A^{-۱} = \mathrm{adj}A$. پس $\mathrm{tr}\,\mathrm{adj}A = ۰$. اکنون مثال ۱۲.۶ (دو) و قضیهٔ کیلی – همیلتون نشان می‌دهند که

$$\begin{aligned}C_{A}(t) &= t^{۳} - (\mathrm{tr}A)t^{۲} + (\mathrm{tr}\,\mathrm{adj}A)t - \det A\\ &= t^{۳} - ۱ \quad\Rightarrow\quad A^{۳} - I = 0 \quad\Rightarrow\quad (A - I)(A^{۲} + A + I) = 0\end{aligned}$$

اگر $A^{۲}+A+I$ وارون‌پذیر باشد، آنگاه $A-I=0$ یا $A=I$. در نتیجه، $\mathrm{tr}A=۳$ و این هم خلاف فرض است.

۶. گزینهٔ (۴).

اگر «به پیمانهٔ ۲» عمل کنیم، آنگاه

$$A\overset{۲}{\equiv}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & \dots & ۱ \\ \vdots & & & & \\ ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۰ \end{bmatrix}=B$$

اکنون با استفاده از تست ۱۳ در فصل ۱ داریم $\det B=۱$. پس

$$\det A\overset{۲}{\equiv}\det B \quad\Rightarrow\quad \det A\overset{۲}{\equiv}۱ \quad\Rightarrow\quad \det A\neq ۰$$

و این هم دقیقاً یعنی $r(\mathrm{A})=۲۰$.

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر (۱۳۹۵)

۱. گزینهٔ (۲). در حقیقت با توجه به $\det A = a^{۲}b$ می‌بینیم که

$$r(A) = \begin{cases} ۰ & a = ۰\,, b = ۰ \\ ۲ & a = ۰\,, b \neq ۰ \\ ۲ & a \neq ۰\,, b = ۰ \\ ۳ & a \neq ۰\,, b \neq ۰ \end{cases}$$

۲. گزینهٔ (۱).

چون A پوچ – توان است، بنابر مثال ۱۲.۶ (پنچ) داریم

$$\det(tI - A) = C_A(t) = t^{۲} \quad \Rightarrow \quad \det(cI - A) = c^{۲}$$

۳. گزینهٔ (۴).

چون این ماتریسی مثلثی است پس ویژه –مقدارهای آن عبارت‌اند از درایه‌های قطر اصلی، یعنی a، b و c. چون این سه عدد متمایزند، ماتریس مفروض قطری –شدنی است (مثال ۵۳.۶ (چهار)).

۴. گزینهٔ (۳).

با فرض $X = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه مفروض به صورت

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱ \\ (۳ - b)x_۲ = ۰ \\ (a - ۲)x_۳ = ۱ \end{cases}$$

در می‌آید. نخست روشن است که باید $a \neq ۲$. از سوی دیگر، با فرض $b = ۳$، $x_۲$ متغیری آزاد می‌شود و از این رو، دستگاه بینهایت جواب خواهد داشت.

۵. گزینهٔ (۱).

در حقیقت، با فرض $f(t) = t^{۳} - ۱$ می‌بینیم که

$$\text{فرض مسأله} \Rightarrow f(A) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_A(t) \big| f(t) = (t - ۱)(t^{۲} + t + ۱)$$

چون $A \neq I$ پس $p_A(t) \neq t - ۱$ و از این‌رو، $p_A(t) \big| t^{۲} + t + ۱$. چون $t^{۲} + t + ۱$ تحویل‌ناپذیر است داریم $p_A(t) = t^{۲} + t + ۱$. با توجه به $A \in \mathcal{M}_۲$ نتیجه می‌گیریم که $C_A(t) = t^{۲} + t + ۱$ و از این‌رو، $\mathrm{tr}A = -۱$.

۶. گزینهٔ (۴). این همان تست شمارهٔ ۱۸ در فصل ۱ است.

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای دکتری ریاضی (۱۳۹۵)

۱. گزینهٔ (۲).

اگر پایهٔ متعارف $\mathcal{M}_۲$ یعنی $B = \{E_{۱۱}, E_{۱۲}, E_{۲۱}, E_{۲۲}\}$ را که از یکاهای ماتریسی ساخته شده است در نظر بگیریم، آنگاه ماتریس مختصات بردارهای مفروض نسبت به این پایه عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ & ۰ \\ -۵ & ۱ & -۴ & ۶ \\ -۴ & -۱ & -۵ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۷ & ۳ \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از عمل‌های سطری – مقدماتی می‌بینیم که

بعد مورد نظر $= r(A) = ۲$

۲. گزینهٔ (۳).

درست مانند مسألهٔ حل شدهٔ ۱۵ در پایان فصل ۳.

۳. گزینهٔ (۴).

اگر دستگاه مفروض را به صورت $AX = B$ بنویسیم، آنگاه با استفاده از قضیهٔ ۸۵.۳ می‌دانیم که

$$r(A \mid B) = r(A) \iff \text{دستگاه } AX = B \text{ جواب دارد}$$

از سوی دیگر، با به کارگیری عمل‌های سطری – مقدماتی می‌بینیم که ماتریس افزوده تبدیل می‌شود به

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۱ & \frac{a}{۲} \\ ۰ & ۵ & -۱ & \frac{b}{۳} - a \\ ۰ & ۰ & ۰ & a + c - \frac{b}{۳} \end{array}\right]$$

بنابراین، $r(A) = ۲$. پس برای تحقق شرط $r(A \mid B) = r(A)$ باید $a + c - \frac{b}{۳} = ۰$ یا $b = ۳(a + c)$.

۴. گزینهٔ (۱).

در حقیقت، چون مشخصهٔ $\mathbb{F}$ برابر است با ۲، پس $I = -I$ و از این‌رو،

$$T^۲ = I \Rightarrow (T - I)(T + I) = O \Rightarrow (T - I)^۲ = O$$

اکنون مسألهٔ حل شدهٔ ۲۱ (الف) در پایان فصل ۴ نشان می‌دهد که $r(T-I) \le \frac{n}{۲}$. از سوی دیگر، روشن است که $W = \mathrm{Ker}\ (T-I)$. بنابراین، با توجه به قضیهٔ رتبه می‌بینیم که

$$\dim \mathrm{Ker}(T-I) + \dim \mathrm{Im}(T-I) = n \ \Rightarrow\ \dim W + r(T-I) = n$$

$$\Rightarrow \dim W \ge n - \frac{n}{۲} = \frac{n}{۲}$$

۵. گزینهٔ (۴).

با استفاده از عمل‌های سطری – مقدماتی می‌بینیم که

$$\text{دترمینان مورد نظر} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۳ & -۴ & ۳ \\ ۰ & -۳ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۵ & ۴ & -۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -۳ & -۴ & ۳ \\ -۳ & ۰ & ۳ \\ ۵ & ۴ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ۱۲ & ۸ & ۰ \\ ۱۲ & ۱۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ & -۱ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۱۲ & ۸ \\ ۱۲ & ۱۲ \end{vmatrix} = -۱۲.۴ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -۴۸$$

۶. گزینهٔ (۴).

روشن است که به ازای هر $A \in W$ داریم $\mathrm{tr}A = ۰$. پس اگر قرار دهیم

$$F = \left\{A \in \mathcal{M}_n : \text{متقارن } A\right\} \quad , \quad G = \left\{A \in \mathcal{M}_n : \mathrm{tr}A = ۰\right\}$$

آنگاه $W = F \bigcap G$. با توجه به مثال‌های ۵۰.۳ (پنج) و ۲۸.۴ (یک) می‌دانیم که

$$\dim F = \frac{n(n+۱)}{۲} \quad , \quad \dim G = n^{۲} - ۱$$

از سوی دیگر، هر $A \in \mathcal{M}_n$ مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن است. چون اثر ماتریس دوم برابر است با صفر، پس $\mathcal{M}_n = F + G$ و از این‌رو، $\dim(F+G) = n^{۲}$. اکنون رابطهٔ

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \bigcap G)$$

نشان می‌دهد که $\dim W = \frac{(n-۱)(n+۲)}{۲}$.

۷. گزینهٔ (۲).

V فقط ۵ زیرفضای برداری دارد (که در زیر فهرست شده‌اند) و از این‌رو، با فرض $\circ = (\circ,\circ)$،

$$\left.\begin{array}{ll} W = \{\circ\} & \Rightarrow W' = V \\ W = \{\circ,(۱,\circ)\} & \Rightarrow W' = \{\circ,(\circ,۱)\} \\ W = \{\circ,(\circ,۱)\} & \Rightarrow W' = \{\circ,(۱,\circ)\} \\ W = \{\circ,(۱,۱)\} & \Rightarrow W' = W \\ W = V & \Rightarrow W' = \{\circ\} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim W + \dim W' = ۲$$

۸. گزینهٔ (۱).

می‌بینیم که

$$\begin{aligned}(A+B)^۲ = A+B \quad &\Rightarrow \quad A^۲ + B^۲ + AB + BA = A + B \\ &\Rightarrow AB + BA = O \\ &\overset{\text{tr}}{\Rightarrow} ۲\text{tr}(AB) = \circ \quad \Rightarrow \quad \text{tr}(AB) = \circ\end{aligned}$$

۹. گزینهٔ (۳).

می‌دانیم که $\dim P_{۱۳۹۴} = ۱۳۹۵$. از سوی دیگر، تابع

$$T : P_{۱۳۹۴} \to \mathbb{R} \qquad , \qquad Tf = f(۲)$$

آشکارا فرمی خطی است و اینکه $W = \text{Ker}\ f$. اکنون با استفاده از مثال ۲۸.۴ (یک) می‌بینیم که

$$\dim W = ۱۳۹۵ - ۱ = ۱۳۹۴$$

● **تذکر**. تست شمارهٔ ۳۲ در فصل ۳ را نیز ببینید.

۱۰. گزینهٔ (۳).

روشن است که $\circ \notin U\Delta V$. پس $U\Delta V$ زیرفضای برداری نیست و از این‌رو، نمی‌تواند با زیرفضای برداری $L(U\Delta V)$ برابر باشد.

● **تذکر**. برای درستی گزینه‌های دیگر، مثال ۱۴.۳ را ببینید.

۱۱. گزینهٔ (۱).

مسأله‌های حل شدهٔ ۳ و ۱۱ در پایان فصل ۳ را ببینید.

۱۲. گزینهٔ (۲).

با فرض $f(t) = t^۳ - t$ داریم $f(A) = O$ و از این‌رو، $p_A(t)\big|f(t)$. پس A قطری ـ شدنی است و ویژه ـ مقدارهای آن متعلق به مجموعهٔ $\{۱, ۰, -۱\}$ هستند. از سوی دیگر، اگر A با ماتریس قطری B متشابه باشد، آنگاه

$$r(A) = r \Rightarrow \text{درایهٔ ۱ و ۱- بر قطر اصلی } B \text{ قرار دارند } r$$

$$\Rightarrow r(A^\ell) = r(A) \quad , \quad \operatorname{tr}(A^{۲k}) = \operatorname{tr}(B^{۲k}) = r$$

اکنون به آسانی نتیجه می‌شود که گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) درست هستند.

● مثال نقض برای گزینهٔ (۲): $A = \operatorname{diag}(۱, -۱, ۰, \ldots, ۰)$

۱۳. گزینه‌های (۲ و ۳).

فرض کنیم $f(t) = t^۳ - ۵t^۲ + ۶t$. در این صورت $f(A) = O$ و از این‌رو،

$$p_A(t)\big|f(t) = t(t-۲)(t-۳)$$

پس A قطری ـ شدنی است و در ادامه می‌توانیم فرض کنیم که A قطری است. ویژه ـ مقدارهای A متعلق به مجموعهٔ $\{۳, ۲, ۰\}$ هستند. اکنون با توجه به فرض $\operatorname{tr}A = ۸$ فقط ۲ حالت برای A داریم:

$$A = \operatorname{diag}(۲,۲,۲,۲,۰,۰,۰) \quad , \quad A = \operatorname{diag}(۲,۳,۳,۰,۰,۰,۰)$$

بنابراین، $r(A) = ۴$ یا $r(A) = ۳$.

● **تذکر.** اگر فرض $\operatorname{tr}A = ۷$ را بپذیریم، آنگاه $r(A) = ۳$ (چرا؟).

۱۴. گزینهٔ (۳).

فرض کنیم B ماتریسی ۱۰×۱۰ باشد که همهٔ درایه‌های آن -۱ هستند. در این صورت

$$A = B + ۲I \quad , \quad r(B) = ۱ \quad , \quad p_B(t) = t^۲ + ۱۰t$$

(مثال ۳۷.۶ (هشت)). پس

$$p_A(t) = p_B(t-۲) = t^۲ + ۶t - ۱۶$$

و از این‌رو،

$$p_A(A) = O \quad \Rightarrow \quad A^۲ + ۶A - ۱۶I = O$$
$$\Rightarrow A(\frac{۱}{۱۶}(A + ۶I)) = I$$
$$\Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۶}(A + ۶I)$$

اکنون با توجه به اینکه مجموع درایه‌های $A+6I$ برابر است ۲۰- (چرا؟) داریم

$$A^{-1} \text{ مجموع درایه‌های } = \frac{1}{16}.(-20) = -\frac{5}{4}$$

۱۵. گزینهٔ (۴).

در حقیقت A و $A-I$ هر دو در شرط ارائه شده در مسألهٔ حل شدهٔ ۷ در پایان فصل ۲ صدق می‌کنند. پس هر دوی آنها وارون‌پذیرند. از سوی دیگر، می‌دانیم که

$A-\lambda I$ وارون‌پذیر است $\Leftrightarrow$ λ ویژه – مقدار A نیست

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای دکتری علوم کامپیوتر (۱۳۹۵)

۱. گزینهٔ (۳).

با استفاده از عمل‌های سطری – مقدماتی می‌بینیم که $r(A) = ۲$. از سوی دیگر، با استفاده از قضیهٔ رتبه (قضیهٔ ۸۰.۳) می‌دانیم که پوچی هر $A \in \mathcal{M}_{mn}$ برابر است با $n - r(A)$.

۲. گزینهٔ (۲).

مسالهٔ حل شدهٔ ۱۵ در پایان فصل ۳ را ببینید.

۳. گزینهٔ (۳).

می‌دانیم که $\dim \mathcal{M}_۲ = ۴$ و $\dim \mathcal{M}_۳ = ۹$. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۱۲۲.۳ مـی‌بینـیم که

$$\dim V = \dim \mathcal{M}_۲ + \dim \mathcal{M}_۳ = ۱۳$$

۴. گزینهٔ (۳).

اگر قرار دهیم

$$\mathcal{M}_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad \mathcal{M}_۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

آنگاه می‌دانیم که $p_{M_۱}(t) = (t-۲)^۲$ و $p_{M_۲}(t) = (t-۲)(t-۵)$. اکنـون بـا اسـتفاده از مثال ۳۷.۶ (نه) داریم

$$p_A(t) = \left[p_{M_۱}(t) \ , \ p_{M_۲}(t) \right] = (t-۲)^۲(t-۵)$$

و از این‌رو، $\deg p_A(t) = ۳$.

۵. گزینهٔ (؟).

اگر مانند تست شمارهٔ ۱ در فصل ۳ عمل کنیم باید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۱ & ۰ \\ ۵ & ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

تکین باشد. از حل معادلهٔ $\det A = ۰$ می‌بینیم که $b = -\frac{۷}{۲}$ و این هم در گزینـه‌هـا وجـود ندارد.

۶. گزینهٔ (۴).

مسالهٔ حل شدهٔ ۱۸ در پایان فصل ۶ را ببینید.

۷. گزینهٔ (۱).

به طور کلی اگر W یک زیرفضای برداری دلخواه V باشد و تبدیل خطی

$$S : W \to V \qquad . \qquad Sx = Tx$$

یعنی تحدید T به W، را در نظر بگیریم، آنگاه روشن است که

$$\text{Ker}S = \text{Ker}\,T \bigcap W \qquad , \qquad S(W) = T(W)$$

بنابراین،

$$\dim KerS + \dim S(W) = \dim W \Rightarrow \dim(\text{Ker}\,T \bigcap W) + \dim T(W) = \dim W$$

پس در حالت خاص، به ازای $W = T(V)$ می‌بینیم که

$$\dim(\text{Ker}\,T \bigcap T(V)) = \dim T(V) - \dim T^{۲}(V)$$

۸. گزینهٔ (۳).

پایهٔ متعارف $B = \{۱\,, x\,, x^{۲}\}$ برای $P_{۲}$ را در نظر می‌گیریم و می‌بینیم که T این سه چندجمله‌ای را به

$$۳x \;\;,\;\; ۲ + \frac{۳}{۲}x^{۲} \;\;,\;\; ۴x + x^{۳}$$

تبدیل می‌کند. چون اینها مستقل خطی‌اند و $T(P_{۲})$ را تولید می‌کنند، پس پایه‌ای برای $T(P_{۲})$ می‌سازند و از این‌رو،

$$r(T) = \dim T(P_{۲}) = ۳$$

● **تذکر.** تست شمارهٔ ۸۳ در فصل ۴ را نیز ببینید.

۹. گزینهٔ (۱).

چون $r(B) = ۱$، مثال ۳۷.۶ (هشت) نشان می‌دهد که $p_B(t) = t^{۲} - ۳t$. پس با توجه به $p_B(B) = 0$ داریم $B^{۲} = ۳B$. اکنون می‌بینیم که

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ O & B \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} I & B + B^{۲} \\ O & B^{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۴} = \begin{bmatrix} I & B + B^{۲} + B^{۳} + B^{۴} \\ O & B^{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & ۴۰B \\ O & B^{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow C = ۴۰B$$

۱۰. گزینهٔ (۴).

می‌بینیم که

$$AB + BA = O \quad \Rightarrow \quad AB = -BA$$

$$\overset{\det}{\Rightarrow} \quad \det(AB) = -\det(BA) = -\det(AB)$$

$$\Rightarrow \det(AB) = ۰$$

۱۱. گزینهٔ (۴).

با فرض $f(t) = t^{۳} - ۲$ می‌بینیم که $f(A) = O$ و از این‌رو،

$$p_A(t) \Big| f(t) = (t - \sqrt[۳]{۲})g(t)$$

بنابراین، ممکن است $\sqrt[۳]{۲}$ یک ویژه – مقدار A باشد. در این وضع $A - \sqrt[۳]{۲}\ I$ و در نتیجه، ماتریس

$$A(A - \sqrt[۳]{۲}\ I) = A^{۲} - \sqrt[۳]{۲}\ A$$

تکین خواهد بود.

۱۲. گزینهٔ (۴).

اگر قرار دهیم

$$M_{۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad M_{۲} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

آنگاه می‌دانیم که $p_{M_{۱}}(t) = t(t - ۳)$ و $p_{M_{۲}}(t) = (t - ۳)(t - ۵)$. اکنون با استفاده از مثال ۳۷.۶ (نه) داریم

$$p_A(t) = \left[p_{M_{۱}}(t)\ ,\ p_{M_{۲}}(t) \right] = t(t - ۳)(t - ۵)$$

بنابراین، A قطری شدنی است (قضیهٔ ۵۹.۶). در نتیجه، ویـژه – بردارهـای A پایـه‌ای بـرای $\mathbb{R}^{۴}$ می‌سازند (قضیهٔ ۵۶.۶).

۱۳. گزینه‌های (۲ و ۳).

این همان تست شماره ۱۳ در پرسش‌های چهار گزینه‌ای دکتری ریاضی (۱۳۹۵) است.

۱۴. گزینهٔ (۳).

فرض کنیم B ماتریسی ۸×۸ باشد که همهٔ درایه‌های آن $۱-$ هستند. در این صورت

$$A = B + ۲I \quad , \quad r(B) = ۱ \quad , \quad p_B(t) = t(t + ۸)$$

مثال (۳۷.۶ (هشت)). پس

$$p_A(t) = p_B(t-۲) = t^{۲} + ۴t - ۱۲$$

و از این‌رو،

$$\begin{aligned} p_A(A) = O \quad &\Rightarrow \quad A^{۲} + ۴A - ۱۲I = O \\ &\Rightarrow \quad A\left(\frac{۱}{۱۲}(A+۴I)\right) = I \\ &\Rightarrow \quad A^{-۱} = \frac{۱}{۱۲}(A+۴I) \end{aligned}$$

اکنون با توجه به اینکه مجموع درایه‌های $A + ۴I$ برابر است با ۱۶− (چرا؟) داریم

$$\text{مجموع درایه‌های } A^{-۱} = \frac{۱}{۱۲}.(-۱۶) = \frac{-۴}{۳}$$

۱۵. گزینهٔ (۴).

این همان تست شمارهٔ ۱۵ در پرسش‌های چهار گزینه‌ای دکتری ریاضی (۱۳۹۵) است.

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای جبر خطی (دکتری ریاضی ۱۳۹۶)

۱. فرض کنیم A ماتریسی ۵×۴ با رتبهٔ ۴ و B ماتریسی ۴×۵ با رتبهٔ ۳ باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) نه AB وارون‌پذیر است نه BA .

۲) هم AB وارون‌پذیر است هم BA .

۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB الزاماً وارون‌پذیر نیست.

۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA الزاماً وارون‌پذیر نیست.

۲. اگر ماتریس $A\in\mathcal{M}_{۳}(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^{۲}+۴A+۳I=0$ صدق کند، $\operatorname{tr}A$ کدام یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱- ۲) ۳- ۳) ۵- ۴) ۷-

۳. ماتریس $A\in\mathcal{M}_{۵}(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^{۲}-۴A-I=0$ صدق می‌کند و دارای ویژه‌ـمقدارهای $a_{۱}$، … ، $a_{۵}$ است. در این صورت مقدار $\sum_{i=۱}^{۵}\left(a_i-\frac{۱}{a_i}\right)$ برابر است با

۱) ۴ ۲) ۲۰- ۳) ۲۰ ۴) ۴-

۴. A ماتریسی ۱۳۹۵×۱۳۹۵ است که درایه‌های قطری آن همگی صفر و درایه‌های دیگر آن همگی ۱ هستند. A بر هیأتی چندعضوی وارون‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۷ ۴) ۴۱

۵. عدد ۲ یک ویژه‌ـمقدار مرتبهٔ ۷ برای دو ماتریس قطری‌ـشدنی $A,B\in\mathcal{M}_{۱۰}(\mathbb{R})$ است. رتبهٔ ماتریس $A-B$ حداکثر چند است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۶. فرض کنیم

$$A\in\mathcal{M}_{۵\times۴}(\mathbb{R})\ ,\ r(A)=۳\ ,\ B\in\mathcal{M}_{۳\times۴}(\mathbb{R})\ ,\ r(B)=۲$$

در این صورت $\dim\{X\in\mathcal{M}_{۴\times۳}(\mathbb{R}):AXB=0\}$ برابر است با

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای جبر خطی (دکتری ریاضی ۱۳۹۶)

۱. گزینهٔ (۱).

در حقیقت، AB تکین است زیرا $AB \in \mathcal{M}_4$ ولی $r(AB) \leq 3$. همچنین، BA تکین است زیرا $BA \in \mathcal{M}_5$ ولی $r(AB) \leq 3$.

۲. گزینهٔ (۱).

در حقیقت، با فرض $f(t) = t^2 + 4t + 3$ می‌بینیم که

$$f(A) = 0 \Rightarrow p_A(t) \mid (t+3)(t+1)$$

پس A قطری ـ شدنی است و از این رو،

$$p_A(t) = \begin{cases} t+3 \\ t+1 \\ (t+3)(t+1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_A(t) = \begin{cases} (t+3)^3 \\ (t+1)^3 \\ (t+3)^2(t+1) \\ (t+3)(t+1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tr}A \in \{-9, -3, -7, -5\}$$

۳. گزینهٔ (۳).

با فرض $f(t) = t^2 - 4t - 1$ داریم $f(t) = (t-\alpha)(t-\beta)$ که در آن

$$\alpha = 2 - \sqrt{5} \quad , \quad \beta = 2 + \sqrt{5}$$

چون $f(A) = 0$ پس $p_A(t) \mid f(t)$ و از این رو A، قطری ـ شدنی است. بنابراین،

$$C_A(t) = (t-\alpha)^k (t-\beta)^l \quad , \quad C_{A^{-1}}(t) = \left(t - \frac{1}{\alpha}\right)^k \left(t - \frac{1}{\beta}\right)^l$$

که در آن $k + l = 5$. بدین‌سان،

$$\text{مقدار مورد نظر} = \mathrm{tr}A - \mathrm{tr}A^{-1} = (k\alpha + l\beta) - \left(\frac{k}{\alpha} + \frac{l}{\beta}\right) = \ldots = 4k + 4l = 20$$

۴. گزینهٔ (۲).

مشابه تست ۱۳ در فصل ۱ داریم

$$\det A = 1394 \,.\, (-1)^{1394} = 2 \,.\, 17 \,.\, 41$$

و از این رو، اگر $\operatorname{char}\mathbb{K}$ مشخصهٔ هیأت مورد بحث را نشان دهد، می‌بینیم که

A وارون‌پذیر است $\Leftrightarrow \det A \neq ۰ \Leftrightarrow \operatorname{char}\mathbb{K} \notin \{۲, ۱۷, ۴۱\}$

این نشان می‌دهد که مشخصهٔ $\mathbb{K}$ می‌تواند ۳ باشد و بنابراین، $\mathbb{K}$ می‌تواند $۹ = ۳^۲$ عضو داشته باشد.

۵. گزینهٔ (۴).

در حقیقت، با توجه به فرض مسأله، ماتریس وارون‌پذیری مانند $P \in \mathcal{M}_{۱۰}(\mathbb{R})$ هست به طوری که

$$A = P^{-۱}\operatorname{diag}(\underbrace{۲, \ldots, ۲}_{\text{۷ بار}}, a, b, c)P$$

$$= P^{-۱}(۲I + D_۱)P \quad , \quad (r(D_۱) \leq ۳)$$

$$= ۲I + A_۱ \quad , \quad (r(A_۱) \leq ۳)$$

به طور مشابهی می‌بینیم که

$$B = ۲I + B_۱ \quad , \quad (r(B_۱) \leq ۳)$$

بنابراین،

$$r(A - B) = r(A_۱ - B_۱) \leq r(A_۱) + r(B_۱) = ۶$$

۶. گزینهٔ (۳).

تبدیل خطی

$$T : \mathcal{M}_{۴\times۳} \to \mathcal{M}_{۵\times۴} \quad , \quad TX = AXB$$

را در نظر می‌گیریم. روشن است که بعد مورد نظر عبارت است از $\dim \operatorname{Ker} T$ یا $n(T)$. از سوی دیگر، ماتریس T نسبت به پایه‌های متعارف $\mathcal{M}_{۴\times۳}$ و $\mathcal{M}_{۵\times۴}$ برابر است با $B^t \times A$ (حاصلضرب کرونکرِ B^t و A [۱]) یعنی $[T] = B^t \times A$ و از این رو،

$$r(T) = r([T]) = r(B^t).r(A) = ۲.۳ = ۶$$

(همان مرجع قبل). اکنون با استفاده از قضیهٔ رتبه داریم

$$n(T) = \dim \mathcal{M}_{۴\times۳} - r(T) = ۱۲ - ۶ = ۶$$

۱- برای تعریف و ویژگی‌های حاصلضرب کرونکر دو ماتریس، فصل ۴ در کتاب *Roger A. Horn, "Topics in Matrix Analysis"* را ببینید.

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای جبر خطی کارشناسی ارشد ریاضی (۱۳۹۶)

۱. **اگر H فضای جواب دستگاه** $\begin{cases} ۲x - y + ۳z = ۰ \\ x + y + ۳z = ۰ \end{cases}$ **باشد، آنگاه** $\dim H$ **برابر است با**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۲. **اگر** $A = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۵ \\ ۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$**، آنگاه** $A^{۱۰۰}$ **کدام است؟**

۱) $۲۵I$ ۲) $۱۰^{۱۰۰}I$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰^{۱۰۰} & ۲۵^{۱۰۰} \\ ۰ & ۱۰^{۱۰۰} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰^{۱۰۰} & ۲۵^{۱۰۰} \\ ۰ & -۱۰^{۱۰۰} \end{bmatrix}$

۳. **فرض کنیم U فضای چندجمله‌ای‌های (با ضریب‌های حقیقی) تولید شده به وسیلهٔ ۱، $x^۲$، $x^۴$، $x^۶$ باشد. بردار مختصات بردار** $f(x) = x^۶ + x^۴ - x^۲ - ۲$ **نسبت به پایهٔ مرتب** $\{۱ - x^۲, x^۲ - x^۴, x^۴ - x^۶, ۱ + x^۶\}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}(۵, ۳, ۳, -۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(-۳, ۵, ۳, -۱)$

۳) $\frac{۱}{۲}(-۵, -۳, ۳, ۱)$ ۴) $\frac{۱}{۲}(-۳, -۵, -۳, -۱)$

۴. **با فرض** $A, B \in \mathcal{M}_۴(\mathbb{R})$ **و** $c \in \mathbb{R}$ **کدام گزینه درست است؟**

۱) $\text{adj}(cA) = c^۴\text{adj}A$ ۲) $\text{adj}(A + B) = \text{adj}A + \text{adj}B$

۳) $\text{adj}(AB) = (\text{adj}A)(\text{adj}B)$ ۴) $\det(\text{adj}A) = (\det A)^۳$

۵. **اگر** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **و** $r(A) = k > ۰$**، آنگاه**

۱) $r(A^۲) = k$

۲) $r(A^۲) < k$

۳) ماتریس‌هایی با رتبهٔ ۱ مانند $A_۱$، ... ، A_k وجود دارند به طوری که $A = \sum_{i=۱}^{k} A_i$.

۴) ماتریس‌هایی با رتبهٔ ۱ مانند $A_۱$، ... ، A_k وجود دارند به طوری که $A = A_۱ \dots A_k$.

۶. **اگر** $A \in \mathcal{M}_۲(\mathbb{R})$**، آنگاه به ازای چند عدد** $\varepsilon > ۰$ **داریم** $A^{۱۰۰} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ - \varepsilon \end{bmatrix}$؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌نهایت

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای جبر خطی کارشناسی ارشد ریاضی (۱۳۹۶)

۱. گزینهٔ (۱).

اگر ماتریس ضریب‌ها را A بنامیم، آنگاه آشکارا $r(A)=۲$. اکنون قضیهٔ رتبه نشان می‌دهد که

$$\dim H = ۳-۲=۱$$

۲. گزینهٔ (۲).

با فرض $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ داریم $A=۵B$. از سوی دیگر، $C_۵(t)=t^۲-۴$ و از این رو،

$$t^{۱۰۰}=C_B(t).q(t)+at+b$$

اگر به جای t عددهای ۲ و ۲− را بگذاریم، آنگاه دستگاه $\begin{cases} ۲a+b=۲۰^{۱۰۰} \\ -۲a+b=۲^{۱۰۰} \end{cases}$ به دست می‌آید. پس $a=۰$ و $b=۲^{۱۰۰}$. پس

$$B^{۱۰۰}=0+۲^{۱۰۰}I \Rightarrow A^{۱۰۰}=۱۰^{۱۰۰}I$$

۳. گزینهٔ (۴).

اگر عضوهای این پایه را از چپ به راست $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$ و $e_۴$ بنامیم، آنگاه $f(x)=\alpha e_۱+\beta e_۲+\gamma e_۳+\delta e_۴$. برای یافتن α، β، γ و δ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{cases} x=۰ \;:\; \alpha+\delta=-۲ \\ x=۱ \;:\; ۲\delta=-۱ \end{cases} \Rightarrow \delta=-\frac{۱}{۲} \;,\; \alpha=-\frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^۶}=۱ \Rightarrow -\gamma+\delta=۱ \Rightarrow \gamma=-\frac{۳}{۲}$$

$$x=\mathrm{i} \;:\; ۲\alpha-۲\beta+۲\gamma=-۱ \Rightarrow \beta=-\frac{۵}{۲}$$

● **تذکر.** البته می‌توانیم ضریب‌های توان‌های یکسان در دو طرف رابطهٔ

$$f(x)=\alpha e_۱+\beta e_۲+\gamma e_۳+\delta e_۴$$

را برابر قرار دهیم و سپس دستگاه حاصل (نسبت به مجهول‌های α، β، γ و δ) را حل کنیم.

۴. گزینهٔ (۴).

قضیهٔ ۶۹.۱ (ت) را ببینید.

۵. گزینهٔ (۳).

برای مثال، فرض کنیم ستون‌های C_1، ... ، C_k در A استقلال خطی داشته باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} A &= [C_1 \dots C_k \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i C_i \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i C_i \dots] \\ &= \underbrace{[C_1 \ O \dots O \ \alpha_1 C_1 \ \beta_1 C_1 \dots]}_{A_1} + \underbrace{[O \ C_2 \ O \dots O \ \alpha_2 C_2 \ \beta_2 C_2 \dots]}_{A_2} \\ &= A_1 + A_2 + \dots + A_k \end{aligned}$$

و آشکار داریم $r(A_1) = \dots = r(A_k) = 1$.

۶. گزینهٔ (۱).

در حقیقت، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} t^{100} = C_A(t) \cdot q(t) + at + b \ &\Rightarrow \ A^{100} = aA + bI \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{bmatrix} = aA + bI \\ &\Rightarrow a \neq 0 \ , \ A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \lambda^{100} = -1 \end{aligned}$$

و این هم تناقض است.

● **تذکر**. به طور کلی اگر $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $A^k = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ که در آن $\alpha \neq \beta$، آنگاه

$$\exists \lambda, \mu : A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

و از این رو، $\lambda^k = \alpha$ و $\mu^k = \beta$.